Cálculo 2 - Dois exercícios de otimização

Departamento de Matemática - UFPR

Pontos extremos de funções

Consideremos a função

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

1. Encontre e classifique todos os pontos críticos de f.
2. Encontre o máximo e o mínimo de f no círculo $x^2 + y^2 \leq 16/25$

Pontos extremos de funções

(x, y) ponto crítico $\iff \vec{\nabla} f(x, y) = (0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left(-y^2 - x^2 + 1\right) - 2x^2 y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\left(-y^2 - x^2 + 1\right) - 2x\, y^2$$

Fatorando (que tipicamente é essencial para conseguir os pontos críticos), temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\left(y^2 + 3x^2 - 1\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\left(3y^2 + x^2 - 1\right)$$

Cada derivada parcial é o produto de dois fatores. Para encontrar *todos* os pontos críticos, precisamos considerar todas as possíveis combinações dos fatores se anular.

Pontos extremos de funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\left(y^2 + 3x^2 - 1\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\left(3y^2 + x^2 - 1\right)$$

1. $x = 0, y = 0$
2. $y = 0, \left(3y^2 + x^2 - 1\right) = 0$
3. $x = 0, \left(y^2 + 3x^2 - 1\right) = 0$
4. $\left(3y^2 + x^2 - 1\right) = 0, \left(y^2 + 3x^2 - 1\right) = 0$

Os itens (1),(2), (3) fornecem os pontos críticos $(0,0), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$. O item 4 fornece mais um monte de pontos críticos.

Pontos extremos de funções

$(3y^2 + x^2 - 1) = 0, (y^2 + 3x^2 - 1) = 0$
Chamemos $X = x^2$, $Y = y^2$; então temos o sistema de equações

$$X + 3Y = 1$$
$$3X + Y = 1$$

Antes de resolver o sistema, advertimos que se a solução tem X ou Y negativo, devemos descartar ela! Porém, a solução do sistema acima é $X = Y = 1/4$, que fornece 4 pontos críticos a mais:

$$(1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$$

Pontos extremos de funções

Classifiquemos agora os pontos críticos pelo critério do Hessiano. Temos

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} -6xy & -3y^2 - 3x^2 + 1 \\ -3y^2 - 3x^2 + 1 & -6xy \end{pmatrix}$$

O critério depende do determinante e mais uma informação (o sinal do traço ou de algum dos elementos da diagonal, o que chamei de "I" na aula, nestes slides uso o traço). Uma dica prática é evitar calcular o determinante genérico: fica uma conta muito prolixa. Ao invés disso, calcular a matriz Hessiana em cada ponto crítico e o determinante *após* avaliar.

Pontos extremos de funções

$$(0,0) \to Hess(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det = -1 \implies \text{sela}$$

$$(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$$

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \det = -4 \implies \text{sela}$$

$$(1/2, 1/2), (-1/2, -1/2)$$

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \det = 2, \ \text{traço} < 0 \implies \text{máximo local}$$

$$(1/2, -1/2), (-1/2, 1/2)$$

$$Hess(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \det = 2, \ \text{traço} > 0 \implies \text{mínimo local}$$

Pontos extremos de funções

Agora para a segunda questão,
Encontre o máximo e o mínimo de f no círculo
$x^2 + y^2 \leq 16/25$

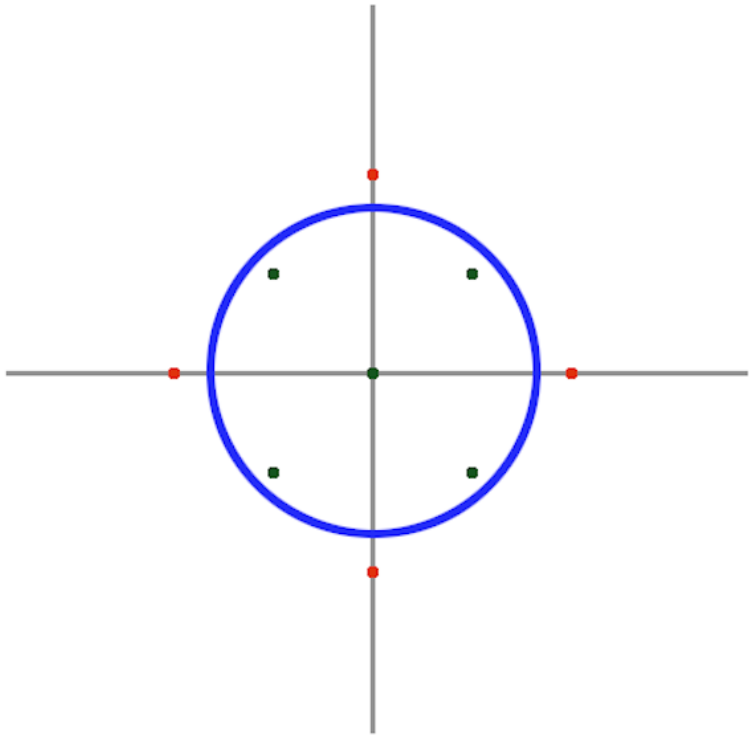


Figura: Fonte: o autor

Pontos extremos de funções

No interior do círculo,

- $f(0,0) = 0$
- $f(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} = 0,125$
- $f(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} = -0,125$

Na fronteira do círculo, $x^2 + y^2 = 16/25$, e $f(xy) = \frac{9}{25}xy$.
Fazemos $x = \frac{4}{5}\cos(t), y = \frac{4}{5}\operatorname{sen}(t)$, e temos o problema de Cálculo em uma variável

Encontrar o máximo e o mínimo de $\frac{9\cdot16}{25\cdot25}\cos(t)\operatorname{sen}(t) = \frac{9\cdot8}{25\cdot25}\operatorname{sen}(2t)$ *para* $t \in [0, 2\pi]$.
Até sem usar cálculo, o máximo é $\frac{9\cdot8}{25\cdot25} = 0,1152$ e o mínimo é $-\frac{9\cdot8}{25\cdot25} = -0,1152$.

Assim, tanto o máximo quanto o mínimo são atingidos nos pontos críticos do interior, máximo = 0,125, mínimo= -0,125.

Multiplicadores de Lagrange

Encontre os pontos da superfície $z^2 - xy = 1$ que estão mais perto da origem.

Ou seja, encontrar os pontos que realizam o mínimo de $d(x, y, z) =$ distância de um ponto à origem $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, restrita à superfície $z^2 - xy = 1$.

Truque padrão: como a raíz quadrada é uma função crescente no seu domínio, o problema é equivalente a encontrar os pontos que realizam o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restrita superfície $z^2 - xy = 1$.

Exercício Mostre que, se não acredita no truque, a própria conta leva a mesma conclusão: o fator que vêm de derivar a raiz quadrada fica absorvido no multiplicador de Lagrange.

Multiplicadores de Lagrange

Encontrar os pontos que realizam o mínimo da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restrita superfície $z^2 - xy = 1$. Seja $g(x, y, z) = z^2 - xy$

$$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z), \quad \vec{\nabla} g = (-y, -x, 2z)\,.$$

Equação de multiplicador de Lagrange:

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(-y, -x, 2z)$$

Caso 1: $z \neq 0 \implies \lambda = 1$ e $-xy = 1 \implies$ nem x nem y podem ser zero. Temos

$$2x = -y, \quad 2y = -x$$

A única solução do sistema acima é $x = y = 0$ e então $z^2 = 1 \implies z = \pm 1$. Então temos dois candidatos, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

Multiplicadores de Lagrange

Precisamos tomar cuidado: e $z = 0$? Neste caso temos $xy = -1$ e nem x nem y podem ser zero. Assim, temos $(2x, 2y, 0) = \lambda(-y, -x, 0)$.

- O lado esquerdo não é o vetor nulo, assim $\lambda \neq 0$.
- Dividindo a segunda coordenada pela primeira, corta o λ e temos $y/x = x/y$ ou $x^2 = y^2$, ou seja, $y = \pm x$.
- Substituindo em $xy = -1$, vemos que só o caso $y = -x$ da certo.
- Assim temos $x^2 = 1$ e $x = \pm 1 \implies y = \mp 1$.

Ou seja, o caso $z = 0$ fornece os candidatos $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$. Vejam que podemos ver que $\lambda = 2$ mas *não interessa* para o cálculo dos máximo e mínimos.

Multiplicadores de Lagrange

Avaliando, temos

- $f(0,0,1) = f(0,0,-1) = 1$
- $f(1,-1,0) = f(-1,1,0) = 2$

Assim, o mínimo da distância à origem é 1, atingido nos pontos $(0,0,\pm 1)$ (observem que o *valor mínimo* é 1 porque $1 = \sqrt{1}$)

Multiplicadores de Lagrange

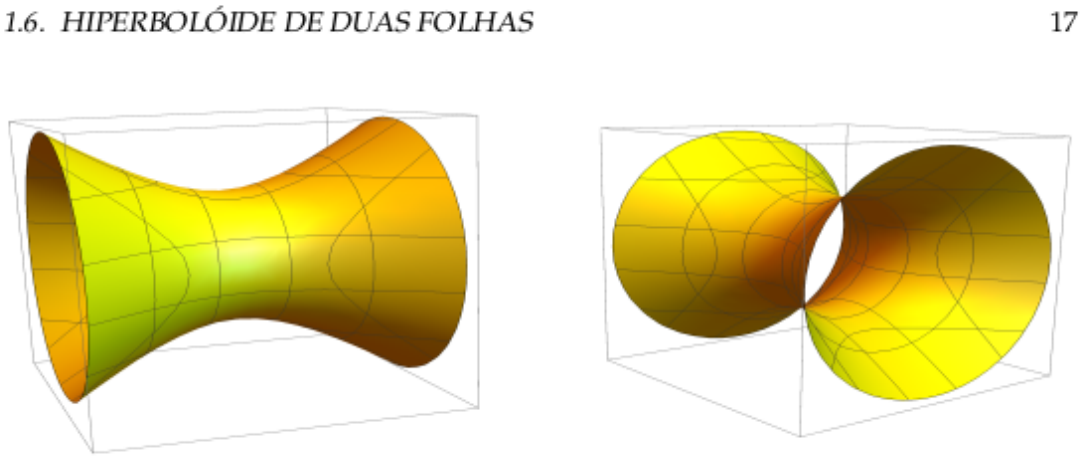


Figura: Fonte: apostilha-texto dos profs. Mauricio A. Vilches e Maria Luiza Corrêa - Departamento de Análise - IME UERJ