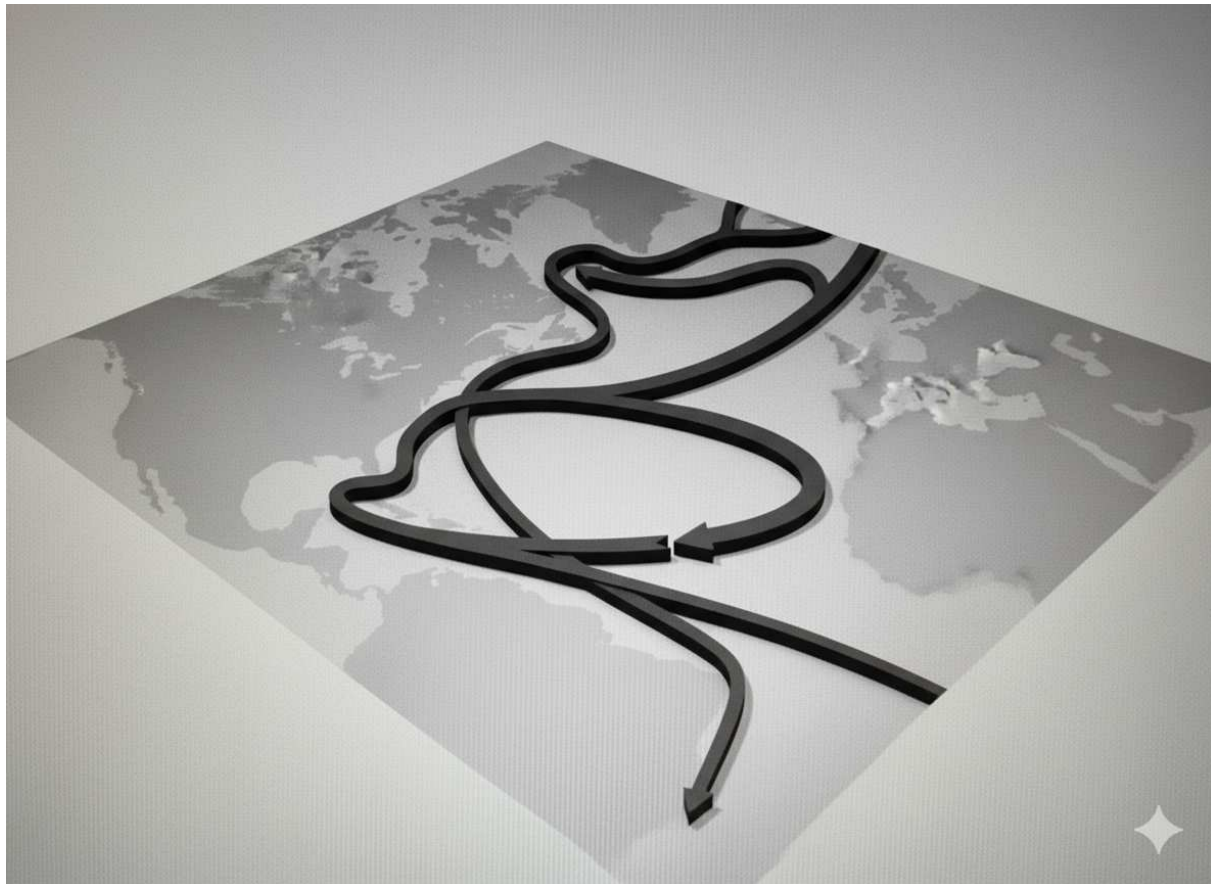


EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E DINÂMICA CLIMÁTICA



JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

DMAT – UFPR

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E DINÂMICA CLIMÁTICA

JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PRIMEIRA VERSÃO: 2014

ÚLTIMA VERSÃO: 2025

Dedicado aos meus pais, Conça e Amândio,
e aos meus filhos, Theo e Ani.

Prefácio

Inicializando ...

Saudações universitárias!

Embora esse texto tenha sido aperfeiçoado para servir de material de apoio para a disciplina *modelagem matemática em ciências da natureza* (CMI064) do curso de Matemática Industrial da Universidade Federal do Paraná, sua primeira versão foi esboçada no final de 2014, tendo como base o artigo seminal [Stommel (1961)], a obra prima [Kaper e Engler (2013)] e algumas outras referências importantes da área. Portanto, a idéia inicial, mantida nas versões subsequentes, era escrevermos (em português) um texto básico sobre a utilização das *equações diferenciais ordinárias (edos)* em modelos climáticos.

Doas partes

Para podermos introduzir modelos matemáticos baseados em *edos*, a primeira parte desse texto representa uma introdução elementar sobre o assunto, ficando a segunda parte mais diretamente ligada à modelagem climática pela *teoria qualitativa das edos*.¹ Em outras palavras, esse texto está dividido da seguinte maneira:

- **Parte I.** Curso introdutório sobre *edos*;
- **Parte II.** Curso introdutório sobre modelagem climática via *edos*.

Ao final de cada uma das partes supracitadas, são propostos alguns exercícios que, em sua grande maioria, podem ser resolvidos via cálculos apresentados em exemplos de capítulos anteriores.

Modelos climáticos vistos como modelos mecânicos

Em relação à modelagem supracitada, podemos considerá-la como se o clima terrestre fosse uma partição de subsistemas mecânicos, ou seja, nesse contexto, modelos climáticos podem ser representados por modelos mecânicos. Essa abordagem está baseado em três princípios fundamentais:

- **Equivalência estrutural.** Cada um desses dois modelos têm componentes interativas distintas que, coletivamente, determinam o estado do sistema;

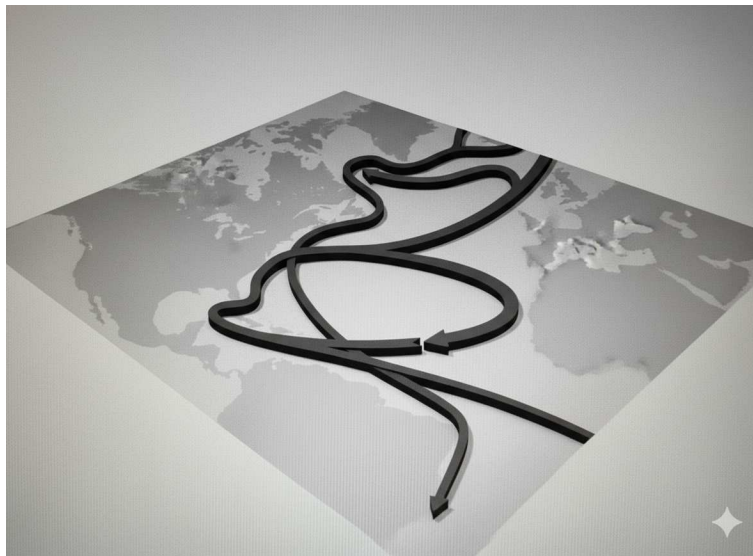
¹Conhecida como *sistemas dinâmicos*.

- **Fundamentação na Física determinística.** Os dois modelos estão baseados nas leis de conservação de massa e energia;
- **Reduccionismo.** Os dois modelos simplificam consideravelmente as(os) hipóteses, dimensionalidades, parâmetros, etc., dos respectivos sistemas.

Circulação oceânica

Nesse texto, a modelagem climática preponderante será a da *circulação termohalina (cth)* atlântica, representada na figura 1. Essa circulação, que será vista como um tipo de problema

Figura 1: Imagem conceitual, gerada por IA (*Gemini*), da *cth* atlântica



mecânico nos capítulos 6 e 7, é causada por diferenças de densidades salinas e temperaturas entre “duas ou três caixas oceânicas”, representando regiões de altas e baixas latitudes.²

Análises qualitativas e quantitativas via equações diferenciais

Em geral, essas análises têm objetivos distintos e geram diferentes tipos de informações:

- Na qualitativa, os modelos são de baixa dimensionalidade e buscamos o entendimento do comportamento de longa duração, dos tipos de estabilidade/instabilidade e das propriedades das soluções das *edos*, em particular das soluções de equilíbrio,³ sem a necessidade de obtermos fórmulas analíticas/explicitas dessas soluções.
- Na quantitativa, os modelos são de alta dimensionalidade e buscamos obter valores numéricos exatos das soluções em conjuntos de pontos específicos.

Analisaremos (apenas) qualitativamente os modelos climáticos, pois, estudos quantitativos utilizam (fortemente) as *equações diferenciais parciais, transformadas e séries de Fourier*,⁴ que estão fora do escopo desse texto.

²Confira as figuras 6.6 e 7.29, páginas 116 e 180.

³Toda essa terminologia será estudada nos capítulos vindouros!

⁴Cf. [Mackenzie (2007)]

Objetivos gerais

- Estudo de alguns métodos de resolução (inclusive *séries de funções, transformadas de Laplace e teoria qualitativa*) de alguns tipos de *edoss*;
- Aplicação dos métodos supracitados em *dinâmica climática*;
- Verificação do comportamento mecanicista dos modelos climáticos.

Diagramação

Na produção do texto e de suas figuras,⁵ utilizamos os seguintes programas:⁶

- \LaTeX , que é uma bem conhecida linguagem científica de editoração eletrônica;
- \TikZ , que é uma ferramenta poderosa para a geração de figuras e gráficos na linguagem supracitada;
- GNU Octave, que é uma linguagem de programação científica e computação numérica, com ferramentas de plotagem e visualização embutidas.

Errata

Para futuras complementações ou correções desse texto, confira a página acadêmica do autor no seguinte endereço eletrônico:

www.ufpr.br/~jrrb

⁵Excetuando-se a figura 1, p. iv.

⁶Todos do tipo “software livre”.

Conteúdo

Prefácio	iii
I Introdução às equações diferenciais ordinárias (<i>edos</i>)	3
1 Teoria de I ordem	5
1.1 <i>edo</i> linear de primeira ordem	7
1.2 <i>edo</i> não linear de primeira ordem	11
1.2.1 Separável	11
1.2.2 Exata	13
1.2.3 Bernoulli	16
1.2.4 Homogênea	20
2 Teoria de II ordem - equação característica	23
2.1 <i>edo</i> linear de II ordem homogênea	23
2.1.1 Linearidade das soluções	23
2.1.2 LD e LI	24
2.1.3 Solução geral	25
2.2 <i>edo</i> linear de II ordem não homogênea	30
2.2.1 Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados	31
2.2.2 Método de variação de parâmetros	33
3 Séries de Taylor e <i>edos</i>	37
3.1 Séries numéricas	37
3.1.1 Convergência ou divergência	38
3.2 Séries de funções	48
3.2.1 Exemplo fundamental: série geométrica	48
3.2.2 Definição de convergência absoluta	50
3.3 Séries de potências	51
3.4 Séries de Taylor e funções analíticas	55
3.4.1 Séries de potências e <i>edos</i>	58
4 Transformada de Laplace (TL) e <i>edos</i>	67
4.1 TL	67
4.2 <i>pvi</i> resolvido via TL e TLI	83
4.2.1 Função delta de Dirac ($\delta(t)$)	87
4.2.2 TL e sistemas de <i>edos</i>	90
5 Exercícios para a parte I	93

II	Introdução à dinâmica climática qualitativa	105
6	Matemática e clima	107
6.1	Climatologia	107
6.2	Modelo de equilíbrio/balço energético terrestre (<i>meet</i>)	109
6.2.1	<i>meet</i> básico	110
6.2.2	<i>meet</i> com efeito estufa	111
6.2.3	<i>meet</i> com múltiplos pontos de equilíbrio	112
6.2.4	<i>meet</i> de Budiko	114
6.2.5	Introduzindo bifurcações	115
6.3	Oceanos e clima	115
6.3.1	2-box model (modelo de duas caixas) para a <i>cth</i> do Atlântico Norte	116
7	Teoria qualitativa	127
7.1	Sistemas dinâmicos	127
7.1.1	<i>edo</i> (vetorial) autônoma de primeira ordem	127
7.1.2	Existência e unicidade de soluções da equação (7.1)	129
7.1.3	Regularidade das soluções de (7.6) em relação às condições iniciais	134
7.1.4	Fluxos, órbitas, espaços de fase, pontos críticos e estabilidade	135
7.1.5	Dinâmica das soluções com condições iniciais próximas de X^*	139
7.1.6	Órbitas da linearização aproximando órbitas em torno dos pontos de equilíbrio do sistema não linear	140
7.2	Teoria de bifurcações	156
7.2.1	Bifurcação transcítica	157
7.2.2	Bifurcação sela-nó	161
7.2.3	Bifurcação forquilha supercrítica	163
7.2.4	Múltiplas bifurcações	164
7.2.5	Bifurcações para campos vetoriais planares	166
7.3	De volta ao modelo de duas caixas	170
7.3.1	Stommel	170
7.3.2	Reduzindo a dimensão	170
7.3.3	Adimensionalizando as variáveis, alterando a escala de tempo e diminuindo o número de constantes	171
7.3.4	Sumarizando o sistema a ser estudado	172
7.3.5	Soluções de equilíbrio (pontos fixos)	173
7.3.6	Dinâmica na vizinhança de (x^*, y^*)	177
7.3.7	Um modelo de três caixas para a <i>cth</i>	180
8	Exercícios para a parte II	185
	Referências	194

Parte I

Introdução às equações diferenciais ordinárias (*edos*)

Capítulo 1

Teoria de I ordem

O que é uma edo?

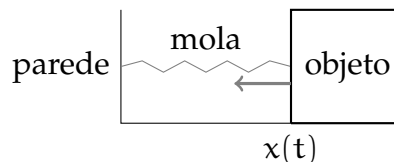
Uma *equação diferencial ordinária (edo)* é uma equação que relaciona uma função incógnita, digamos $x(t)$ ou $y(t)$, com algumas de suas derivadas. Caso essa função seja real e a ordem de sua derivada de maior ordem (nessa equação) seja n , a *edo* é dita (*escalar e*) *de ordem* n . Determinarmos que funções satisfazem uma *edo* significa obtermos suas *soluções*.¹ A propósito, esse tipo de equação tem lugar na modelagem matemática de inúmeros fenômenos científicos, tecnológicos, sociais, econômicos, etc.

Exemplo

Considere a seguinte *edo* de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x. \quad (1.1)$$

Figura 1.1: Força restauradora oposta ao esticamento do objeto



Desconsiderando-se as unidades de medida, podemos pensar que, num instante t , a derivada de segunda ordem representa a aceleração de um objeto de massa unitária, deslocando-se em linha reta sobre um plano horizontal, sem atrito, e a função incógnita representa a posição desse objeto em relação à uma parede vertical. Esse deslocamento é causado por uma mola, que pode ser esticada ou comprimida horizontalmente e tem extremidades conectadas ao objeto e à parede, conforme a figura 1.1. Portanto, (1.1) representa a interdependência entre a aceleração e a posição do objeto, ou seja, pela segunda lei de Newton,² a força restauradora (do comprimento original da mola) e a posição do objeto (conectado à mola) são

¹Na parte I desse livro, o termo *escalar* será omitido e métodos para obtermos “soluções analíticas” para $n > 2$ não serão considerados.

²“ $F=ma$ ”!

interdependentes,³ observando-se que essa força atua no objeto no sentido contrário ao deslocamento do objeto.

Note que as funções $\cos t$ e $\sin t$ são soluções da (isto é, satisfazem à) equação (1.1). De fato, *combinações lineares* dessas funções, ou seja,

$$x = cte_1 \cos t + cte_2 \sin t,$$

são soluções de (1.1), onde cte_1 e cte_2 são constantes numéricas.⁴

Técnicas de resolução

Além de resoluções analíticas, existem ainda resoluções numéricas, que estão fora do escopo desse texto, e qualitativas, que estudaremos na parte II.

Domínio das soluções

É importante observarmos o maior domínio da solução de uma *edo*, dito *maximal*, que, geralmente, é um conjunto *aberto* da reta real, isto é, um intervalo aberto ou uma união de intervalos abertos.

Exemplo

No exemplo anterior, o domínio das soluções é o conjunto \mathbb{R} , ou seja, o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Teorema de existência e unicidade (TEU)

O problema de valor inicial (pvi)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & (edo) \\ x(t_0) = x_0 & (condição inicial) \end{cases}$$

admite uma única solução $x = x(t)$ num intervalo aberto maximal I contendo t_0 , caso f e f_x sejam contínuas num retângulo aberto

$$R = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid a < t < b \text{ e } c < x < d \right\}$$

*contendo $P_0 = (t_0, x_0)$, com $I \subset (a, b)$.*⁵

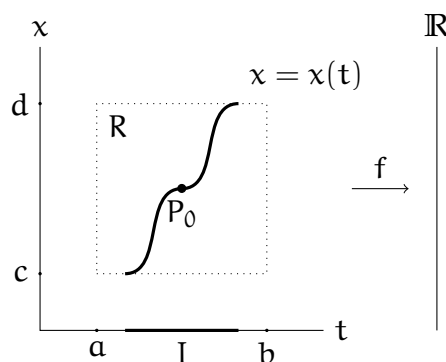
Para uma representação geométrica do TEU, considere a figura 1.2.

³A palavra restauradora, aqui, é um abuso de linguagem: o objeto fica em constante movimento, aproximando-se da parede, quando a mola vai sendo comprimida, e afastando-se da parede, quando a mola vai sendo esticada.

⁴Verifique!

⁵Para uma demonstração, embora num nível mais avançado, confira a referência [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

Figura 1.2: TEU



1.1 *edo* linear de primeira ordem

Sejam $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, onde I é um intervalo aberto em \mathbb{R} , e o *pvi*

$$\begin{cases} x' = ax + b; & (\text{edo}) \\ x(t_0) = x_0. & (\text{condição inicial}) \end{cases}$$

Pelo TEU, considerando-se $f(t, x) = a(t)x + b(t)$, esse *pvi* admite uma única solução.

Vamos considerar os seguintes casos:

I. a é a função nula

Nesse caso, temos a seguinte *solução geral*, via integração simples:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = b(t) &\implies \int \frac{dx}{dt} dt = \int b(t) dt \\ &\implies x(t) = \int b(t) dt + \text{cte}. \end{aligned}$$

Exemplos

$$1. \begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \cos t dt + \text{cte} \\ &= \text{sen } t + \text{cte}. \end{aligned}$$

Por outro, pela condição inicial,

$$0 = x(0) = \text{sen } 0 + \text{cte} \implies \text{cte} = 0.$$

Portanto, $x(t) = \text{sen } t$ é a solução desse *pvi*.⁶

⁶Note que $I = \mathbb{R}$.

$$2. \begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \frac{1}{t} dt + \text{cte} \\ &= \ln |t| + \text{cte}. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela condição inicial,

$$0 = x(1) = \ln |1| + \text{cte} \implies \text{cte} = 0.$$

Portanto, $x(t) = \ln t$ é a solução desse *pvi* com $I = (0, \infty)$.

II. b é a função nula.

Nesse caso, a solução geral é obtida pela seguinte resolução:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = a(t)x &\implies \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a(t) \\ &\implies \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] = a(t) \\ &\implies \int \frac{d}{dt} [\ln |x(t)|] dt = \int a(t) dt \\ &\implies \ln |x(t)| = \int a(t) dt + \text{cte}_1 \\ &\implies e^{\ln |x(t)|} = e^{\int a(t) dt} \cdot e^{\text{cte}_1} \\ &\implies |x(t)| = \text{cte}_2 e^{\int a(t) dt} \\ &\implies x(t) = \text{cte} e^{\int a(t) dt}. \end{aligned}$$

De cima para baixo, na primeira implicação, assumimos que x não se anula; na segunda, usamos a *regra da cadeia*; na penúltima, denotamos $\text{cte}_2 = e^{\text{cte}_1}$; na última, consideramos cte como sendo qualquer uma das constantes $\pm \text{cte}_2$.

Exemplos

$$1. x' = \frac{t}{1+t^2} x.$$

Se $u = 1 + t^2$, a solução geral segue de

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{cte} e^{\int \frac{t}{1+t^2} dt} \\ &= \text{cte} e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du} \\ &= \text{cte} e^{\ln \sqrt{1+t^2}} \\ &= \text{cte} \sqrt{1+t^2}. \end{aligned}$$

Note que, ao derivarmos $x = \text{cte} (1 + t^2)^{1/2}$ em relação à variável t , podemos obter a *edo* desse exemplo. De fato:

$$\begin{aligned} x' &= \text{cte} \cdot 2t \cdot \frac{1}{2} (1 + t^2)^{-1/2} \\ &= \text{cte} t (1 + t^2)^{-1 + \frac{1}{2}} \\ &= t \cdot \frac{1}{1 + t^2} \cdot \text{cte} (1 + t^2)^{1/2} \\ &= \frac{t}{1 + t^2} x. \end{aligned}$$

Obviamente, uma *cte* (e portanto uma solução particular) é obtida se considerarmos um *pvi* composto de tal *edo* e de uma condição inicial.

2. Seja

$$\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{cte} e^{\int 2t dt} \\ &= \text{cte} e^{t^2}. \end{aligned}$$

Por outro, como

$$1 = x(0) = \text{cte} e^{0^2} \implies \text{cte} = 1,$$

a solução do *pvi* é $x = e^{t^2}$.⁷

III. a e b podem não ser identicamente nulas

Nesse caso, sendo

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds, \quad (1.2)$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right). \quad (1.3)$$

Primeiramente, note que as soluções dos casos I e II supracitados são casos particulares da equação (1.3).⁸ Além disso, em relação à equação (1.2), note que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t a(s) ds &= A(t) \\ &= A(t) - 0 \\ &= A(t) - A(t_0) \\ &= A(s) \Big|_{s=t_0}^{s=t}, \end{aligned}$$

⁷Note que $I = \mathbb{R}$.

⁸Cf. pp. 7 e 8.

ou seja, A é a primitiva, isto é, a integral, de a , variando de t_0 até t .
Para demonstrar (1.3), como $\frac{dA}{dt} = a(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[e^{-A(t)} x \right] &= e^{-A(t)} x' - a(t) e^{-A(t)} x \\ &= e^{-A(t)} [x' - a(t)x] \\ &= e^{-A(t)} b(t),\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese $x' - ax = b$. Assim, integrando de t_0 até t , obtemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left[e^{-A(s)} x \right] ds &= \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \implies e^{-A(t)} x - e^{-A(t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies e^{-A(t)} x = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \\ &\implies x = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right).\end{aligned}$$

Embora a fórmula (1.3) possa ser usada para obter a solução do caso III, em vez de memorizá-la, apresentaremos a técnica do *fator integrante*, na qual podemos reobter (1.3) e, concomitantemente, obter um processo de resolução que, agora, descreveremos.

O objetivo é escrevermos o primeiro membro da equação

$$x' - a(t)x = b(t) \tag{1.4}$$

como a derivada de um produto, para podermos utilizar o caso I supracitado.⁹ Assim, pela multiplicação da equação (1.4) por $\mu(t) \neq 0$, temos

$$\mu(t)x' - a(t)\mu(t)x = \mu(t)b(t), \tag{1.5}$$

onde vamos supor que $\mu' = -a\mu$. Consequentemente, pelo caso II supracitado,¹⁰ temos

$$\mu = \text{cte}_1 e^{\int (-a(t)) dt}.$$

Além disso, sem perda de generalidade, consideremos $\text{cte}_1 = 1$. Finalmente, a equação (1.5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mu x) &= \mu b \implies \int \frac{d}{dt}(\mu x) dt = \int \mu b dt \\ &\implies \mu x = \int \mu b dt + \text{cte} \\ &\implies x = \mu^{-1} \left(\text{cte} + \int \mu(t)b(t) dt \right).\end{aligned}$$

Portanto, ao utilizarmos alguma condição inicial $x(t_0) = x_0$, obtemos (1.3).

⁹Cf. p. 7.

¹⁰Cf. p. 8.

Exemplo

Seja

$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

Para $t \neq 0$, a *edo* pode ser escrita como

$$x' + \frac{1}{t}x = t.$$

Então, pelo fator integrante

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{1}{t} dt} \\ &= e^{\ln t} \\ &= t, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu x) = \mu t &\implies \frac{d}{dt}(tx) = t^2 \\ &\implies tx = \frac{t^3}{3} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Note que a condição inicial foi utilizada em $\ln|t| = \ln t$, no cálculo de μ .¹¹ Além disso, como essa condição acarreta $\text{cte} = x_0 - \frac{1}{3}$, a solução é dada por

$$x = \frac{t^2}{3} + \frac{x_0 - \frac{1}{3}}{t}$$

em $I = (0, \infty)$.

1.2 *edo* não linear de primeira ordem

Caso $f(t, x)$ seja como no TEU,¹² a *edo* pode ser de um dos seguintes tipos:

1.2.1 Separável

Para esse tipo de *edo*,

$$f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)},$$

¹¹De fato, $t_0 = 1$ não pode ser ponto do domínio de $\ln(-t)$.

¹²Cf. p. 6.

onde g e $h \neq 0$ são contínuas. Além disso, h admite uma primitiva H invertível, isto é, existe H com inversa H^{-1} tal que $\frac{dH}{dx} = h$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} &\implies h(x) \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{dH}{dx} \frac{dx}{dt} = g(t) \\ &\implies \frac{d}{dt}[H(x(t))] = g(t) \\ &\implies H(x(t)) = \int g(t) dt + cte \\ &\implies x(t) = H^{-1} \left(\int g(t) dt + cte \right), \end{aligned}$$

onde cte pode ser obtida pela condição inicial de um *pvi*. Além disso, note que, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* na terceira implicação e uma integração em t na quarta.

Exemplos

1.
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Como

$$x' = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}},$$

temos $g(t) = 1$ e $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ satisfazendo as condições exigidas para essas funções. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} \frac{dx}{dt} = 1 &\implies \frac{d}{dt}[\arctan x(t)] = 1 \\ &\implies \arctan x(t) = \int 1 dt + cte \\ &\implies x(t) = \tan(t + cte). \end{aligned}$$

Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente.

Aqui, a cte é obtida via

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\implies \tan(0 + cte) = 0 \\ &\implies cte = \arctan 0 \\ &\implies cte = 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = \tan t$, $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,¹³ é a solução desse *pvi*.

¹³Embora o domínio mais geral de uma função \tan seja $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{(2n-1)\pi}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$, como solução desse *pvi*, seu domínio é o maior intervalo aberto que contenha $t_0 = 0$.

$$2. x' = \frac{t^2}{x^2}.$$

Analogamente à resolução do exemplo anterior, temos

$$\begin{aligned} x^2 \frac{dx}{dt} = t^2 &\implies \frac{d}{dx} \left[\frac{x(t)^3}{3} \right] = t^2 \\ &\implies \frac{x(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + cte_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt[3]{t^3 + cte}, \end{aligned}$$

onde $cte = 3 cte_1$. Note que, nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente.

O domínio I de $x(t)$ é \mathbb{R} ?

Conforme o TEU, x' deve ser contínua. Portanto, como

$$x'(t) = 3t^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(t^3 + cte)^2}} \rightarrow \infty$$

quando $t \rightarrow -\sqrt[3]{cte}$, temos uma assíntota vertical em $t = -\sqrt[3]{cte}$. Assim, I é igual a $(-\infty, -\sqrt[3]{cte})$ ou a $(-\sqrt[3]{cte}, \infty)$.

$$3. xx' = -t, x > 0.$$

Analogamente aos dois exemplos anteriores, temos

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} = -t &\implies \frac{d}{dx} \left[\frac{x(t)^2}{2} \right] = -t \\ &\implies \frac{x(t)^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + cte_1 \\ &\implies x(t) = \sqrt{cte - t^2}, \end{aligned}$$

onde $cte = 2 cte_1$. Nas duas primeiras implicações, de cima para baixo, usamos a *regra da cadeia* e uma integração em t , respectivamente. Na última, consideramos $x > 0$.

Para o domínio I de $x(t)$, note que, $t^2 \leq cte$. Na verdade, como $x \neq 0$, $t^2 < cte$, ou seja, $t \in (-\sqrt{cte}, \sqrt{cte})$. I também pode ser obtido, observando que

$$x(t)^2 + t^2 = (\sqrt{cte})^2$$

é a equação da circunferência de centro $(0,0)$ e raio \sqrt{cte} . Assim, o domínio de x é dado por $I = (-\sqrt{cte}, \sqrt{cte})$.

1.2.2 Exata

Aqui,

$$f(t, x) = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)},$$

ou seja, a *edo* pode ser escrita da forma

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0, \tag{1.6}$$

e existe alguma função $F(t, x)$ com

$$F_t = M \text{ e } F_x = N \quad (1.7)$$

contínuas. Portanto, a substituição das condições (1.7) na equação (1.6) acarreta

$$F_t + F_x x' = 0,$$

isto é, temos o produto interno nulo dado por

$$(F_t, F_x) \cdot (1, x') = 0,$$

ou seja, pela *regra da cadeia*,¹⁴ temos

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0,$$

isto é,

$$F(t, x) = \text{cte}$$

é uma solução *implícita* da *edo*, para qualquer constante cte.

Como saber se uma *edo* da forma $M + Nx' = 0$ é exata?

Caso a condição (1.7) seja válida, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \\ &= \frac{\partial N}{\partial t} \end{aligned}$$

em algum conjunto *aberto* de \mathbb{R}^2 (se F tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas nesse aberto).¹⁵ Consequentemente,

$$M_x = N_t$$

é uma condição necessária para que a *edo* seja exata, caso M e N tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto de \mathbb{R}^2 .

Exemplos

- $(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x) \frac{dx}{dt} = 0.$

Para $M = 2tx - 3t^2$ e $N = t^2 - 2x$, temos

$$M_x = 2t = N_t.$$

¹⁴Cf. [Barbosa (2024)].

¹⁵Cf. [Barbosa (2024)].

Logo, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int M(t, x) dt \\ &= \int (2tx - 3t^2) dt \\ &= t^2x - t^3 + g(x), \end{aligned}$$

onde $g(x)$ é constante como resultado dessa integração em t . Por outro lado, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{dg}{dx} = t^2 - 2x &\implies g(x) = -2 \int x dx \\ &\implies g(x) = -x^2 - cte \\ &\implies F(t, x) = t^2x - t^3 - x^2 - cte \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x)x' = 0.$$

$$2. \begin{cases} (\cos t - t \sin t + x^2) + 2tx \frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$$

Por um lado, para $M = \cos t - t \sin t + x^2$ e $N = 2tx$, temos

$$M_x = 2x = N_t.$$

Portanto, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \int N(t, x) dx \\ &= \int 2tx dx \\ &= tx^2 + h(t), \end{aligned}$$

onde $h(t)$ é constante como resultado dessa integração em x . Assim, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{dh}{dt} = \cos t - t \sin t + x^2 &\implies h(t) = \int \cos t dx - \int t \sin t dt \\ &\implies h(t) = \sin t + cte_1 - (-t \cos t + \sin t + cte_2) \\ &\implies h(t) = t \cos t + cte \\ &\implies F(t, x) = tx^2 + t \cos t + cte, \end{aligned}$$

onde $cte = cte_1 - cte_2$, e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(F(t, x(t))) = 0 \iff (\cos t - t \sin t + x^2) + 2txx' = 0.$$

Agora, pela condição inicial, temos $(\pi)(1)^2 + (\pi) \cos(\pi) = cte$, isto é, $cte = 0$. Consequentemente, a solução implícita do *pvi* é dada por

$$tx^2 + t \cos t = 0.$$

Note que, para $t \neq 0$, como $x(\pi) = 1$, o domínio de

$$x(t) = \sqrt{-\cos t}$$

é dado por $I = (\pi/2, 3\pi/2)$.

Separável é exata

Qualquer *edo* separável $x' = \frac{g(t)}{h(x)}$, isto é,

$$-g(t) + h(x) \frac{dx}{dt} = 0,$$

é exata. De fato,

$$M(t, x) = -g(t) \text{ e } N(t, x) = h(x) \implies M_x = 0 = N_t.$$

EXERCÍCIO

Em sendo possível, resolva os exemplos dados para as equações separáveis,¹⁶ agora considerando aquelas equações como exatas.

1.2.3 Bernoulli

Nesse tipo de *edo*,

$$f(t, x) = -p(t)x + q(t)x^n,$$

onde $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, I é um intervalo real e $n \in \mathbb{R}$ é constante.¹⁷

Note que, como $f(t, x)$ é linear para $n \in \{0, 1\}$, podemos descartar esses valores de n . Assim, ao considerarmos

$$y = x^{1-n},$$

a derivada temporal (d/dt) dessa mudança de variáveis é dada por

$$y' = (1 - n)x^{-n}x',$$

que acarreta

$$\begin{aligned} x' + p(t)x &= q(t)x^n \implies x^{-n}x' + p(t)x^{1-n} = q(t) \\ &\implies \left(\frac{1}{1-n}\right)y' + p(t)y = q(t), \end{aligned}$$

que é linear.

Exemplos

1. $\begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$
Como $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} y &= x^{1-n} \\ &= x^{-1}, \end{aligned}$$

¹⁶Cf. subseção 1.2.1.

¹⁷Pelo TEU, o *pvi* associado a esse tipo de *edo* tem solução (única).

cuja derivada temporal é dada por

$$y' = -x^{-2}x'.$$

Logo

$$\begin{aligned} x' + \frac{4}{t}x &= t^3x^2 \implies x^{-2}x' + \frac{4}{t}x^{-1} = t^3 \\ &\implies -y' + \frac{4}{t}y = t^3 \\ &\implies y' - \frac{4}{t}y = -t^3 \\ &\implies (t^{-4}y)' = -t^{-1} \\ &\implies t^{-4}y = -\int \frac{1}{t} dt \\ &\implies y = t^4(-\ln t + \text{cte}) \\ &\implies x = \frac{1}{t^4(\ln \frac{1}{t} + \text{cte})}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-4/t) dt} \\ &= e^{-4 \ln t} \\ &= t^{-4}. \end{aligned}$$

No cálculo de $\mu(t)$, $\ln|t| = \ln t$, pela condição inicial.¹⁸ Assim, o domínio de $x(t)$ só pode ter pontos $t > 0$ e

$$-1 = \frac{1}{2^4(\ln(1/2) + \text{cte})} \implies \text{cte} = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^4(\ln \frac{1}{t} + \ln 2 - \frac{1}{16})} \\ &= \frac{1}{t^4(\ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16})} \end{aligned}$$

cujo domínio, como $t > 0$ e

$$\begin{aligned} \ln \frac{2}{t} - \frac{1}{16} &= 0 \implies \ln \frac{2}{t} = \frac{1}{16} \\ &\implies \frac{2}{t} = e^{1/16} \\ &\implies t = 2e^{-1/16}, \end{aligned}$$

é dado por $(2e^{-1/16}, \infty)$.¹⁹

¹⁸De fato, $t_0 = 2$ não pode ser ponto do domínio de $\ln(-t)$.

¹⁹A outra possibilidade para o domínio de $x(t)$, $(0, 2e^{-1/16})$, é descartada pela condição inicial.

$$2. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Como $n = -2$, temos

$$y = x^{1-n} \\ = x^3,$$

cuja derivada temporal é dada por

$$y' = 3x^2x'.$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned} x' - 5x &= e^{-2t}x^{-2} \implies x^2x' - 5x^3 = e^{-2t} \\ \implies \frac{1}{3}y' - 5y &= e^{-2t} \\ \implies y' - 15y &= 3e^{-2t} \\ \implies (e^{-15t}y)' &= 3e^{-17t} \\ \implies e^{-15t}y &= 3 \int e^{-17t} dt \\ \implies e^{-15t}y &= -\frac{3}{17}e^{-17t} + \text{cte} \\ \implies y &= e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \\ \implies x &= \left(e^{15t}\text{cte} - \frac{3}{17}e^{-2t} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Na quarta implicação, de cima para baixo, usamos o fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int (-15)dt} \\ &= e^{-15t}. \end{aligned}$$

Agora, pela condição inicial, temos

$$2 = \left(e^0\text{cte} - \frac{3}{17}e^0 \right)^{1/3} \implies \text{cte} = \frac{139}{17}.$$

Temos, então, a solução

$$x = \sqrt[3]{\frac{139e^{15t} - 3e^{-2t}}{17}}$$

para o *pvi*, com domínio dado por $I = \mathbb{R}$.

$$3. \begin{cases} x' + \frac{x}{t} - \sqrt{x} = 0; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Note que, se

$$y = x^{1-\frac{1}{2}} \\ = x^{1/2},$$

então

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x'.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}x' + \frac{x}{t} = x^{1/2} &\implies \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' + \frac{1}{2t}x^{1/2} = \frac{1}{2} \\ &\implies y' + \frac{1}{2t}y = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Assim, a multiplicação da última equação, de cima para baixo, pelo fator integrante

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt} &= e^{\ln|t|^{1/2}} \\ &= e^{\ln t^{1/2}} \quad (\text{pela condição inicial}) \\ &= t^{1/2}\end{aligned}$$

resulta em

$$\begin{aligned}y't^{1/2} + y\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2}t^{1/2} \implies \frac{d}{dt}(yt^{1/2}) = \frac{1}{2}t^{1/2} \\ &\implies y = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} \int t^{1/2} dt \\ &\implies y = t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t^{3/2}}{3} + \text{cte}_1 \right) \\ &\implies x^{1/2} = t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{t^{3/2} + \text{cte}}{3} \right) \\ &\implies x = t^{-1} \left(\frac{t^{3/2} + \text{cte}}{3} \right)^2.\end{aligned}$$

Logo, como

$$\begin{aligned}0 &= x(1) \\ &= \left(\frac{1 + \text{cte}}{3} \right)^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\text{cte} = -1,$$

temos

$$x = \frac{1}{t} \left(\frac{t^{3/2} - 1}{3} \right)^2$$

definida em $I = (0, \infty)$.²⁰

²⁰Lembrete: $1 \in I$.

1.2.4 Homogênea

Para esse tipo de *edo*,

$$f(t, x) = F\left(\frac{x}{t}\right)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} v = \frac{x}{t} &\implies x = tv \text{ e } x' = F(v) \\ &\implies v + tv' = x' = F(v) \\ &\implies tv' = F(v) - v \\ &\implies \frac{1}{F(v) - v} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

que é uma *edo* separável. Além disso, note que, nenhuma solução $x = x(t)$ pode interceptar o eixo vertical $t = 0$.

Exemplos

$$1. \begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} x' &= -4 - \left(\frac{x}{t}\right)^2 \implies vx' = -4 - v^2 \\ &\implies v(v + tv') = -4 - v^2 \\ &\implies vtv' = -4 - 2v^2 \\ &\implies t \frac{dv}{dt} = -\frac{4 + 2v^2}{v} \\ &\implies \frac{v}{4 + 2v^2} dv = -\frac{1}{t} dt \\ &\implies \frac{1}{4} \ln(4 + 2v^2) = -\ln t + \text{cte}_1 \\ &\implies (4 + 2v^2)^{1/4} = \text{cte}_2 \frac{1}{t} \\ &\implies 4 + 2v^2 = \frac{\text{cte}}{t^4} \\ &\implies v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{cte}}{t^4} - 4 \right) \\ &\implies x^2 = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{\text{cte} - 4t^4}{t^4} \right). \end{aligned}$$

Na sexta implicação, de cima para baixo, a condição inicial $t_0 = 2$ elimina a possibilidade do uso de $\ln(-t)$ e indica que o domínio de $x(t)$ só contém $t > 0$. Ainda, pela condição inicial, temos

$$(-7)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \left(\frac{\text{cte} - 4 \cdot 2^4}{2^4} \right) \implies \text{cte} = 456.$$

Portanto, como $x_0 = -7$ e $t > 0$, temos

$$x = -\sqrt{\frac{228 - 2t^4}{t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned} 228 - 2t^4 \geq 0 &\implies t^4 \leq 114 \\ &\implies 0 < t \leq \sqrt[4]{114}. \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} x' = \frac{x(t+x)}{t^2}; \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

A edo desse *pvi*, reescrita como

$$x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2,$$

e a implicação

$$x = vt \implies x' = v't + v$$

acarretam

$$\begin{aligned} v't + v &= v + v^2 \implies \frac{dv}{dt}t = v^2 \\ &\implies \int v^{-2} dv = \int \frac{1}{t} dt \\ &\implies -v^{-1} = \ln t + \text{cte} \quad (\text{pela condição inicial}) \\ &\implies -\frac{t}{x} = \text{cte} + \ln t \\ &\implies x = -\frac{t}{\text{cte} + \ln t}. \end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} -1 &= x(1) \\ &= -\frac{1}{\text{cte}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{cte} = 1,$$

temos

$$x = -\frac{t}{1 + \ln t}.$$

Note que, como

$$\ln t \neq -1,$$

isto é,

$$t \neq \frac{1}{e},$$

o domínio I de $x(t)$ é um dos dois intervalos:

$$\left(0, \frac{1}{e}\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{e}, \infty\right).$$

Consequentemente, como $1 \in I$,²¹ o primeiro intervalo está descartado.

²¹Pela condição inicial!

Capítulo 2

Teoria de II ordem - equação característica

Uma *edo linear de segunda ordem* é dada por

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d, \quad (2.1)$$

onde as funções reais $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ e $d = d(t)$ são contínuas num intervalo I , $a \neq 0$ e qualquer *solução* de (2.1), ou seja, qualquer função duas vezes diferenciável $x = x(t)$ que satisfaça a equação (2.1), também é contínua em I .

Uma aplicação importante: sistema massa-mola

Esse sistema, que ilustra a conhecida lei de Hooke, pode ser modelado por (2.1), como vimos no primeiro exemplo do capítulo 1 e veremos no primeiro exemplo da seção 4.2 do capítulo 4.¹

2.1 edo linear de II ordem homogênea

A *edo* (2.1) é dita *homogênea* caso $d = 0$, isto é,

$$ax'' + bx' + cx = 0. \quad (2.2)$$

Exemplo

$x'' + x' - 6x = 0$ é homogênea, com $a(t) = b(t) = 1$ e $c(t) = -6$ (para cada $t \in \mathbb{R}$).

2.1.1 Linearidade das soluções

Combinações lineares de soluções da equação (2.2) também são soluções dessa equação, isto é, se x_1 e x_2 satisfazem (2.2), então

$$x = cte_1 x_1 + cte_2 x_2 \quad (2.3)$$

também a satisfaz.²

¹De fato, confira as *edos* (1.1) e (4.9) (páginas 5 e 83).

²Para uma definição mais geral de combinações lineares, no contexto de *espaços vetoriais*, confira [Barbosa (2025)].

De fato, Se

$$ax_1'' + bx_1' + cx_1 = 0 \text{ e } ax_2'' + bx_2' + cx_2 = 0,$$

então, pela *linearidade* das derivadas do “cálculo 1”,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(\text{cte}_1x_1 + \text{cte}_2x_2)'' + b(\text{cte}_1x_1 + \text{cte}_2x_2)' + c(\text{cte}_1x_1 + \text{cte}_2x_2) \\ &= \text{cte}_1(ax_1'' + bx_1' + cx_1) + \text{cte}_2(ax_2'' + bx_2' + cx_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, x também satisfaz (2.2).

2.1.2 LD e LI

Duas funções são ditas LD quando são múltiplas escalares uma da outra. Caso contrário, são ditas LI.³

Exemplos

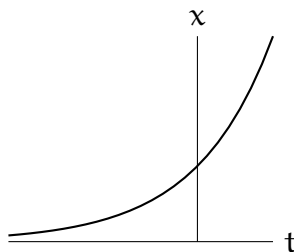
1. $x_1(t) = t^2$ e $x_2(t) = \frac{t^2}{2}$ são LD pois $x_1 = 2x_2$.
2. $x_1 = e^t$ e $x_2 = te^t$ são LI. De fato, supondo serem LD, existe uma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 = \alpha x_2 &\implies e^t = \alpha te^t \\ &\implies (\alpha t - 1)e^t = 0 \\ &\implies \alpha t = 1, \end{aligned}$$

que não é uma proposição verdadeira para, por exemplo, $t = 0$.

Note que, a terceira implicação, de cima para baixo, segue de $e^t \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, conforme a figura 2.1.

Figura 2.1: A reta $x = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $x = e^t$



Portanto, para quaisquer $r, t \in \mathbb{R}$, com r fixo e t variável,

$$e^{rt} = (e^t)^r \neq 0$$

e, analogamente, e^{rt} e te^{rt} são LI.

³Para uma definição mais geral de (in)dependência linear, no contexto de *espaços vetoriais*, confira [Barbosa (2025)].

2.1.3 Solução geral

Via álgebra linear,⁴ demonstra-se que, se x_1 e x_2 são soluções LI da equação (2.2),⁵ então qualquer outra solução dessa equação é dada por (2.3).⁶

Agora, sejam a , b , c e $r \neq 0$ constantes e suponha que $x(t) = e^{rt}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, é solução da equação (2.2). Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 &\iff (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \\ &\iff ar^2 + br + c = 0, \end{aligned}$$

chamada de *equação característica* de (2.2), com raízes dadas por

$$r_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Analisaremos os seguintes casos:

I. $b^2 - 4ac > 0$

Nesse caso, r_{\pm} são reais e distintas e $x_{\pm}(t) = e^{r_{\pm}t}$ são soluções LI de (2.2).⁷ Portanto, simplificando a notação dos índices via $\{+, -\} = \{1, 2\}$,

$$x(t) = cte_1 e^{r_1 t} + cte_2 e^{r_2 t}$$

é uma solução geral de (2.2), conforme (2.3).

Exemplos

1. Para $x'' + x' - 6x = 0$, como $a = b = 1$ e $c = -6$, $r^2 + r - 6 = 0$. Portanto, como $r \in \{-3, 2\}$,

$$x(t) = cte_1 e^{2t} + cte_2 e^{-3t}$$

é uma solução geral de $x'' + x' - 6x = 0$.

2. Para $3x'' + x' - x = 0$, como $a = 3$ e $b = 1$ e $c = -1$, $3r^2 + r - 1 = 0$. Portanto, como

$$r \in \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \right\},$$

$$x(t) = cte_1 e^{\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{6}\right)t} + cte_2 e^{\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right)t}$$

é uma solução geral de $3x'' + x' - x = 0$.

⁴Cf. [Barbosa (2025)].

⁵Cf. p. 23.

⁶Cf. p. 23.

⁷De fato, supondo serem LD, existe alguma constante α tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{r_+ t} = \alpha e^{r_- t} \iff e^{(r_+ - r_-)t} = \alpha,$$

que não é uma proposição verdadeira pois, como $r_+ - r_- \neq 0$, a exponencial do primeiro membro assume infinitos valores, enquanto α , no segundo membro, é constante.

II. $b^2 - 4ac = 0$

Nesse caso, r_- e r_+ são raízes reais e iguais a

$$r = -\frac{b}{2a} \quad (2.4)$$

e $x_1(t) = e^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, é solução de (2.2).⁸

Verificaremos, agora, que $x_2(t) = te^{rt}$, $t \in \mathbb{R}$, também satisfaz (2.2). De fato,

$$\begin{aligned} ax_2'' + bx_2' + cx_2 &= a(2re^{rt} + r^2te^{rt}) + b(e^{rt} + rte^{rt}) + cte^{rt} \\ &= e^{rt}(2ar + b) + te^{rt}(ar^2 + br + c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois (2.4) é raiz da equação $ar^2 + br + c = 0$. Por fim, como x_1 e x_2 são LI,⁹

$$x(t) = cte_1e^{rt} + cte_2te^{rt}$$

é uma solução geral de (2.2).

Exemplo

Para $4x'' + 12x' + 9x = 0$, como $a = 4$, $b = 12$ e $c = 9$, $4r^2 + 12r + 9 = 0$. Portanto, como $r = -\frac{3}{2}$,

$$x(t) = cte_1e^{-3t/2} + cte_2te^{-3t/2}$$

é uma solução geral de $4x'' + 12x' + 9x = 0$.

III. $b^2 - 4ac < 0$

Nesse caso, para obter uma solução geral, precisamos de algumas propriedades das *exponenciais complexas*,¹⁰ inclusive da *fórmula de Euler*, dada por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (2.5)$$

onde o quadrado da *unidade imaginária* é igual ao número real -1 , ou seja, $i \in \mathbb{C}$ e

$$i^2 = -1 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, as raízes da equação característica são dadas por

$$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta,$$

onde

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

⁸Cf. p. 23.

⁹Conforme demonstrado na subseção 2.1.2.

¹⁰Tal assunto é parte importante de um curso de *variáveis complexas* e, para uma rápida revisão do conjunto \mathbb{C} dos *números complexos*, confira [Barbosa (2025)].

e, analogamente ao caso I,¹¹ $x_{\pm} = e^{r_{\pm}t}$ são soluções LI de (2.2),¹² acarretando que

$$x(t) = cte_1 e^{r_1 t} + cte_2 e^{r_2 t}$$

é uma solução geral de (2.2) em \mathbb{C} .¹³ Assim, pelas propriedades supracitadas e via (2.5), uma solução geral de (2.2) em \mathbb{R} é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= cte_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + cte_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= cte_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} + cte_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 e^{i\beta t} + cte_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (cte_1 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + cte_2 (\cos \beta t - i \sin \beta t)) \\ &= e^{\alpha t} ((cte_1 + cte_2) \cos \beta t + i (cte_1 - cte_2) \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} (cte_I \cos \beta t + cte_{II} \sin \beta t), \end{aligned}$$

onde $cte_I = cte_1 + cte_2$ e $cte_{II} = i(cte_1 - cte_2)$, e, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, podemos considerar constantes cte_I e cte_{II} reais.

Exemplo

Para $x'' - 6x' + 13x = 0$, como $a = 1$, $b = -6$ e $c = 13$, $r^2 - 6r + 13 = 0$. Portanto, como $r_{\pm} = 3 \pm 2i$, ou seja, $\alpha = 3$ e $\beta = 2$,

$$x(t) = e^{3t}(cte_I \cos 2t + cte_{II} \sin 2t)$$

é uma solução geral de $x'' - 6x' + 13x = 0$.

TEU para uma edo linear de II ordem

Assim como para as equações de I ordem do capítulo 1, existe uma única solução para o seguinte *pvi*:

$$\begin{cases} a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0; \\ x(t_0) = x_0; \\ x'(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Note que, juntamente com (2.2), temos, agora, duas condições iniciais: “posição e velocidade em $t = t_0$ unidades de tempo”.

Exemplos

¹¹Cf. p. 25.

¹²Cf. p. 23.

¹³Como no caso I supracitado, para simplificar a notação dos índices, denotamos

$$\{-, +\} = \{1, 2\}.$$

1.

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

Uma solução geral da *edo*, conforme o caso I da subseção 2.1.3,¹⁴ é dada por

$$x(t) = cte_1 e^{2t} + cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = 2 cte_1 e^{2t} - 3 cte_2 e^{-3t}, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_1 e cte_2 . De fato, de

$$\begin{cases} cte_1 + cte_2 = x(0) = 0, \\ 2 cte_1 - 3 cte_2 = x'(0) = 1, \end{cases}$$

temos $cte_1 = \frac{1}{5}$ e $cte_2 = -\frac{1}{5}$. Portanto, a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-3t}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Sistema massa-mola sem forçamento¹⁵

$$\begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

Como $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$, uma solução geral da *edo* é dada por

$$x(t) = cte_I \cos t + cte_{II} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

Essa solução, juntamente com

$$x'(t) = -cte_I \sin t + cte_{II} \cos t, t \in \mathbb{R},$$

e as condições iniciais do *pvi*, determinam cte_I e cte_{II} . De fato, como

$$\begin{cases} cte_I = x(0) = 2, \\ cte_{II} = x'(0) = 3, \end{cases}$$

a solução do *pvi* é dada por

$$x(t) = 2 \cos t + 3 \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

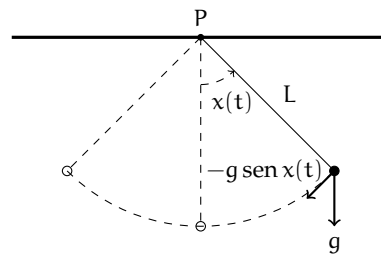
3. Pêndulo simples

Conforme a figura 2.2, considere um pêndulo oscilando livremente, sem sofrer resistência do ar, em torno de um ponto fixo P, onde não há atrito. O pêndulo é formado

¹⁴Cf. p. 25.

¹⁵Na figura 4.4, página 84, está ilustrado um sistema massa-mola com forçamento.

Figura 2.2: Pêndulo simples



por uma haste rígida de massa desprezível, medindo L unidades de comprimento, conectada a uma massa unitária puntiforme, fixada na extremidade oposta a P , e oscila sob a ação da aceleração da gravidade g . Seja $x(t)$ a *amplitude* do pêndulo, ou seja, o ângulo entre o pêndulo e a sua posição vertical de repouso.¹⁶ Assim, a força atuando sobre a massa supracitada é dada por

$$-g \operatorname{sen} x(t).$$

O *período* T é o tempo necessário para o pêndulo completar um *ciclo*, isto é, uma oscilação para a esquerda seguida de uma para a direita. Para oscilações “suficientemente pequenas”, temos $\operatorname{sen} x(t) \approx x(t)$, ou seja,

$$-g \operatorname{sen} x(t) \approx -gx(t),$$

e

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.¹⁷$$

Pela *segunda lei de Newton*, como esse movimento oscilatório depende apenas de g e L , temos a *edo*

$$Lx'' + g \operatorname{sen} x(t) = 0,$$

que, para oscilações “suficientemente pequenas”, pode ser escrita como

$$Lx'' + gx = 0,$$

ou seja,

$$x'' + \frac{g}{L}x = 0,$$

com solução geral dada por

$$x(t) = \operatorname{cte}_I \cos \left(\left(\sqrt{g/L} \right) t \right) + \operatorname{cte}_{II} \operatorname{sen} \left(\left(\sqrt{g/L} \right) t \right), t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, para condições iniciais x_0 “suficientemente pequenas”, podemos considerar o *pvi*

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

¹⁶Caso houvesse atrito e/ou resistência do ar, a amplitude diminuiria com o tempo, até que o movimento oscilatório cessasse na posição de repouso do pêndulo.

¹⁷Pesquise no *Google!*

Utilizando a solução geral supracitada, juntamente com as condições iniciais desse *pvi*, temos

$$\begin{cases} \text{cte}_I \cos(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \sin(T\sqrt{g/L}) = x_0; \\ \sqrt{g/L}(-\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L})) + \sqrt{g/L}(\text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L})) = 0, \text{ ou seja,} \\ -\text{cte}_I \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} \cos(T\sqrt{g/L}) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Multiplicando a primeira equação, de cima para baixo, de (2.6) por $\cos(T\sqrt{g/L})$, a última por $-\sin(T\sqrt{g/L})$ e somando as equações obtidas dessas multiplicações, obtemos

$$\text{cte}_I = x_0 \cos(T\sqrt{g/L}).$$

Substituindo essa constante na última equação de (2.6), temos

$$-x_0 \sin(T\sqrt{g/L}) + \text{cte}_{II} = 0.$$

Assim, a solução do *pvi* supracitado é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left(\cos(T\sqrt{g/L}) \cos\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) + \sin(T\sqrt{g/L}) \sin\left(\left(\sqrt{g/L}\right)t\right) \right) \\ &= x_0 \cos\left((T-t)\sqrt{g/L}\right). \end{aligned}$$

2.2 *edo* linear de II ordem não homogênea

Essa *edo* é dada por (2.1),¹⁸ agora com $d \neq 0$.

Solução geral

Se x_h é uma solução geral da *edo* homogênea associada à *edo* (2.1), isto é, solução geral de (2.2),¹⁹ e x_p é uma solução particular de (2.1), então

$$x = x_h + x_p \quad (2.7)$$

é uma solução geral de (2.1).

De fato,

$$\begin{aligned} ax'' + bx' + cx &= a(x_h + x_p)'' + b(x_h + x_p)' + c(x_h + x_p) \\ &= a(x_h'' + x_p'') + b(x_h' + x_p') + c(x_h + x_p) \\ &= ax_h'' + bx_h' + cx_h + ax_p'' + bx_p' + cx_p \\ &= 0 + d \\ &= d. \end{aligned}$$

¹⁸Cf. p. 23.

¹⁹Idem.

Caso a, b e c sejam constantes, como podemos obter x_p ?

Considere, por exemplo, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$, ou seja,

$$x'' - 3x' + 2x = d,$$

e $d(t)$ dada por uma das seguintes funções:

1. e^{3t} ;
2. $2t^2 + 4t + 1$;
3. $\cos t$;
4. $e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$.

Para cada d , como

$$\begin{aligned} x'' - 3x' + 2x = 0 &\iff r^2 - 3r + 2 = 0 \\ &\iff r \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

uma solução geral é dada por (2.7), com

$$x_h = \text{cte}_1 e^t + \text{cte}_2 e^{2t}.$$

Agora, para determinar uma solução particular x_p , dependendo da d considerada, usaremos o método seguinte:

2.2.1 Método dos coeficientes indeterminados, ou, a serem determinados

Nesse método, testamos “candidatas” para x_p , conforme o tipo de função d dada.

1. Para $d(t) = e^{3t}$, testaremos $x_p = Ae^{3t}$,²⁰ onde A é o coeficiente a ser determinado. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = e^{3t} &\implies (Ae^{3t})'' - 3(Ae^{3t})' + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies 9Ae^{3t} - 3(3Ae^{3t}) + 2Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (2A - 1)e^{3t} = 0. \end{aligned}$$

Então, $2A - 1 = 0$, ou seja, $A = \frac{1}{2}$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$ é dada por

$$x = \text{cte}_1 e^t + \text{cte}_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

²⁰Por quê?

2. Para $d(t) = 2t^2 + 4t + 1$, testaremos $x_p = At^2 + Bt + C$,²¹ onde A , B e C são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = 2t^2 + 4t + 1 &\implies (At^2 + Bt + C)'' - 3(At^2 + Bt + C)' \\ &\quad + 2(At^2 + Bt + C) = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies 2A - 3(2At + B) + 2At^2 + 2Bt + 2C = 2t^2 + 4t + 1 \\ &\implies (2A - 2)t^2 + (-6A + 2B - 4)t \\ &\quad + 2A - 3B + 2C - 1 = 0. \end{aligned}$$

Então, $2A = 2$, $-6A + 2B = 4$ e $2A - 3B + 2C = 1$, ou seja, $A = 1$, $B = 5$ e $C = 7$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + 4t + 1$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + t^2 + 5t + 7, t \in \mathbb{R}.$$

3. Para $d(t) = \cos t$, testaremos $x_p = A \cos t + B \sin t$,²² onde A e B são os coeficientes a serem determinados. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_p'' - 3x_p' + 2x_p = \cos t &\implies (A \cos t + B \sin t)'' - 3(A \cos t + B \sin t)' \\ &\quad + 2(A \cos t + B \sin t) = \cos t \\ &\implies -A \cos t - B \sin t - 3(-A \sin t + B \cos t) \\ &\quad + 2A \cos t + 2B \sin t = \cos t \\ &\implies (A - 3B - 1) \cos t + (3A + B) \sin t = 0. \end{aligned}$$

Então, $A - 3B = 1$ e $3A + B = 0$, ou seja, $A = \frac{1}{10}$ e $B = -\frac{3}{10}$. Portanto, uma solução geral de $x'' - 3x' + 2x = \cos t$ é dada por

$$x = cte_1 e^t + cte_2 e^{2t} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{10} \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

4. Analogamente aos itens 1, 2 e 3 da subseção 2.2.1, para $d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t$, uma "candidata" para solução particular pode ser escrita como

$$x_p = Ae^{3t} + Bt^2 + Ct + D + E \cos t + F \sin t.$$

A resolução do sistema nas variáveis A , B , C , D , E e F , fica como exercício.²³

Exemplo

Considere a *edo*

$$x'' - 6x' + 9x = e^{3t}. \quad (2.8)$$

²¹Por quê?

²²Idem.

²³Resolvendo o sistema supracitado, obtemos

$$A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 5, D = 7, E = \frac{1}{10} \text{ e } F = -\frac{3}{10}.$$

Portanto, uma solução particular do item 4 é a soma das soluções particulares obtidas nos itens 1, 2 e 3 supracitados.

Assim, como

$$\begin{aligned}x'' - 6x' + 9x = 0 &\iff r^2 - 6r + 9 = 0 \\ &\iff r = 3,\end{aligned}$$

uma solução geral da equação homogênea associada a (2.8) é dada por

$$x_h = \text{cte}_1 e^{3t} + \text{cte}_2 t e^{3t}.$$

Agora, escolhendo $x_p = Ae^{3t}$ como “candidata” a uma solução particular de (2.8), temos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies 9Ae^{3t} - 6(3Ae^{3t}) + 9Ae^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (9 - 18 + 9 - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies e^{3t} = 0,\end{aligned}$$

que é uma igualdade inválida. Tentaremos, então,

$$x_p(t) = y(t)e^{3t},$$

onde y é uma função a ser determinada. Logo, para cada t admissível,

$$\begin{aligned}x_p'' - 6x_p' + 9x_p = e^{3t} &\implies (y'' + 6y' + 9y)e^{3t} - 6(y' + 3y)e^{3t} + 9ye^{3t} = e^{3t} \\ &\implies (y'' - 1)e^{3t} = 0 \\ &\implies y'' = 1 \\ &\implies y'(t) = t + \text{cte}_3 \\ &\implies y(t) = \frac{t^2}{2} + \text{cte}_3 t + \text{cte}_4.\end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere $\text{cte}_i = 0$, $i = 3, 4$. Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$x_p(t) = \frac{t^2}{2} e^{3t}. \quad (2.9)$$

Agora, estudaremos outro método para obter uma solução particular, que também funciona caso $d(t)$ admita termos que não sejam exponenciais, polinomiais ou trigonométricos.

2.2.2 Método de variação de parâmetros

Wronskiano de $x_1(t)$ e $x_2(t)$

É definido como o determinante

$$W(t) := \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, com $x_1(t)$ e $x_2(t)$ diferenciáveis.

Exemplo

Para cada $t \in \mathbb{R}$, se $x_1(t) = e^{3t}$ e $x_2(t) = te^{3t}$, então

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} \\ &= e^{3t}(e^{3t} + 3te^{3t}) - 3te^{3t}e^{3t} \\ &= e^{6t}. \end{aligned}$$

Fórmula da variação de parâmetros

Se x_1 e x_2 são soluções li da equação homogênea (2.2) e $W(t)$ é o wronskiano dessas funções, pode ser demonstrado que

$$x_p(t) = x_1(t) \left(\int \frac{x_2(t)(-d(t))}{a(t)W(t)} dt \right) + x_2(t) \left(\int \frac{x_1(t)d(t)}{a(t)W(t)} dt \right)$$

é uma solução particular de (2.1).²⁴

Exemplos

1. Para a edo (2.8),²⁵

$$x(t) = cte_1 e^{3t} + cte_2 te^{3t} + x_p(t)$$

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$, $d(t) = e^{3t}$ e, pelo exemplo supracitado, $W(t) = e^{6t}$, temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{3t} \left(\int \frac{te^{3t}(-e^{3t})}{e^{6t}} dt \right) + te^{3t} \left(\int \frac{e^{3t}e^{3t}}{e^{6t}} dt \right) \\ &= e^{3t} \left(- \int t dt \right) + te^{3t} \left(\int 1 dt \right) \\ &= e^{3t} \left(-\frac{t^2}{2} \right) + te^{3t}t \\ &= \frac{t^2}{2} e^{3t}, \end{aligned}$$

coincidindo com (2.9).²⁶

2. Para a edo

$$x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2 + 1},$$

como $r^2 - 2r + 1 = 0$, isto é, $r = 1$,

$$x(t) = cte_1 e^t + cte_2 te^t + x_p(t)$$

²⁴Cf. p. 23.

²⁵Cf. p. 32.

²⁶Idem!

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$, $d(t) = \frac{e^t}{t^2+1}$ e $W(t) = e^{2t}$,²⁷ temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -e^t \int \frac{te^t e^t}{(t^2+1)e^{2t}} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{(t^2+1)e^{2t}} dt \\ &= -e^t \int \frac{t}{t^2+1} dt + te^t \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{e^t}{2} \ln(t^2+1) + te^t \arctan t. \end{aligned}$$

3. Para a *edo*

$$x'' + x = \sec t,$$

como $r^2 + 1 = 0$, isto é, $r = \pm i$, ou seja, $r = 0 \pm 1 \cdot i$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0 \cdot t} (cte_I \cos(1 \cdot t) + cte_{II} \sin(1 \cdot t)) + x_p(t) \\ &= cte_I \cos t + cte_{II} \sin t + x_p(t) \end{aligned}$$

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$, $d(t) = \sec t$ e $W(t) = 1$,²⁸ temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \cos t \left(\int \sin t (-\sec t) dt \right) + \sin t \left(\int \cos t \sec t dt \right) \\ &= \cos t \left(\int (-\tan t) dt \right) + \sin t \left(\int 1 dt \right) \\ &= \cos t \ln |\cos t| + t \sin t. \end{aligned}$$

Na penúltima igualdade, de cima para baixo, utilizamos $\sec t = \frac{1}{\cos t}$. Na última, de cima para baixo, utilizamos

$$\begin{aligned} \int (-\tan t) dt &= \int \frac{(-\sin t)}{\cos t} dt \quad (u = \cos t \implies du = -\sin t dt) \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + cte \\ &= \ln |\cos t| + cte. \end{aligned}$$

Para uma solução particular, considere $cte = 0$.

4. Para a *edo*

$$2x'' + 18x = 6 \tan(3t),$$

ou seja,

$$x'' + 9x = 3 \tan(3t),$$

como $r^2 + 9 = 0$, isto é, $r = \pm 3i$, ou seja, $r = 0 \pm 3 \cdot i$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{0 \cdot t} (cte_I \cos(3 \cdot t) + cte_{II} \sin(3 \cdot t)) + x_p(t) \\ &= cte_I \cos(3t) + cte_{II} \sin(3t) + x_p(t) \end{aligned}$$

²⁷Verifique!

²⁸Idem!

é solução geral e x_p é uma de suas soluções particulares. Como $a(t) = 1$, $d(t) = 3 \tan(3t)$ e $W(t) = 3$,²⁹ temos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= -\cos(3t) \left(\int \sin(3t) \tan(3t) dt \right) + \sin(3t) \left(\int \cos(3t) \tan(3t) dt \right) \\ &= -\cos(3t) \left(\int \frac{1 - \cos^2(3t)}{\cos(3t)} dt \right) + \sin(3t) \left(\int \sin(3t) dt \right) \\ &= -\cos(3t) \left(\int (\sec(3t) - \cos(3t)) dt \right) - \sin(3t) \frac{\cos(3t)}{3} \\ &= -\cos(3t) \int \sec(3t) dt \\ &= -\cos(3t) \cdot \frac{\ln |\sec(3t) + \tan(3t)|}{3}. \end{aligned}$$

Na última igualdade, de cima para baixo, utilizamos a integral

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + cte,$$

com $cte = 0$, e a mudança de variáveis

$$u = 3t.$$

²⁹Verifique!

Capítulo 3

Séries de Taylor e *edos*

Esse capítulo é dedicado ao uso de *séries de potências*, que são *séries de funções*, em resoluções de *edos*. Como, em geral, nem mesmo as *séries numéricas* são (devidamente) estudadas (em cursos de cálculo), vamos revisar (para alguns leitores) ou introduzir (para outros) esses importantes conceitos.¹

3.1 Séries numéricas

Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ uma sequência numérica. A expressão

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.1)$$

é uma *série* associada à sequência supracitada. Nesse caso,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

é a *n-ésima soma parcial* dessa série.

Exemplo

Para a *progressão geométrica* (*pg*)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad (3.2)$$

temos as seguintes somas parciais:

$$s_1 = \frac{1}{2} = 0,5, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875, \quad \dots$$

Observação

¹Na parte II desse texto, a série de potências da função exponencial, dada nesse capítulo, será fundamental na definição da *exponencial de matriz*, que é importante no estudo qualitativo das *edos*.

O primeiro índice de uma série pode ser algum inteiro não-negativo $n_0 \neq 1$. Nesse caso, podemos representá-la por

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Exemplo

Acrescentando o número 1 a (3.2), temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Retirando o número $1/2$ de (3.2), temos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

3.1.1 Convergência ou divergência

Suponha que a sequência

$$(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$$

de somas parciais converge para o número s , ou seja, existe o limite dessa sequência e esse limite é igual a s . Nesse caso, dizemos que a série $a_1 + a_2 + \cdots$ converge (para s) e denotamos

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n) \\ &=: \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Caso o limite s não exista, $a_1 + a_2 + \cdots$ é dita *divergente*.

Exemplo

Considere a pg

$$(a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, aq^n, \dots)$$

com razão $q \neq 0$ e primeiro termo $a_1 = a \neq 0$.² Temos, então, os seguintes casos:

DIVERGÊNCIA PARA $|q| \geq 1$

Nesse caso, temos os seguintes subcasos:

²Assim, o n -ésimo termo é $a_n = aq^{n-1}$.

$q = 1$

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$s_1 = a_1 = a, \quad s_2 = a_1 + a_2 = 2a, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + \dots + a_n = na, \quad \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} na \\ &= \begin{cases} \infty & \text{se } a > 0; \\ -\infty & \text{se } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

 $q = -1$

Aqui, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = a, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = a + (-a) = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 0 + a = a, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + (-a) = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Obviamente, essa sequência diverge.

 $|q| > 1$

Por um lado, como

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1},$$

temos

$$qs_n = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Assim, da diferença $s_n - qs_n$, temos

$$(1 - q)s_n = a(1 - q^n).$$

Logo, como $q \neq 1$,

$$s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \end{aligned} \tag{3.3}$$

é divergente. De fato, $|q^n|$ pode assumir valores tão grandes quanto se queira.**CONVERGÊNCIA PARA $|q| < 1$**

Nesse caso, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = 1,$$

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \quad (3.4)$$

por (3.3).

Exemplo

Para os dois primeiros exemplos desse capítulo, temos, via (3.4),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2.$$

Podemos, ainda, utilizar esse exemplo para ilustrar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1

A convergência/divergência da série (3.1), página 37, não é alterada pela exclusão de um número finito de seus termos e nem pela inclusão de um número finito de outros termos.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 1

Seja σ_k a soma de k termos da série (3.1). Assim, se $s_{n,k} = s_n - \sigma_k$, $n = 1, 2, \dots$, a existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,k}$ é equivalente a existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

PROPOSIÇÃO 2

Considere α constante e um número s tal que $a_1 + a_2 + \cdots = s$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots &= \alpha s \\ &= \alpha (a_1 + a_2 + \cdots). \end{aligned}$$

Exemplo

Pelo exemplo que segue a equação (3.4), temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + \cdots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 2 \\ &= 2 \cdot 1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha a_i \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \right) \\
&= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
&= \alpha s.
\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 3

Sejam s e S números tais que $a_1 + a_2 + \dots = s$ e $A_1 + A_2 + \dots = S$. Então,

$$\begin{aligned}
a_1 + A_1 + a_2 + A_2 + \dots &= s + S \\
&= (a_1 + a_2 + \dots) + (A_1 + A_2 + \dots).
\end{aligned}$$

Exemplo

Pelo exemplo que segue a equação (3.4),³ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \\
&= 2 \\
&= 1 + 1 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right).
\end{aligned}$$

³Cf. p. 40.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (a_i + A_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n A_i \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\
&= s + S.
\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 4

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Portanto, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots$$

diverge, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2n+1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{2} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4

Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convirja. Consequentemente, se $S_1 = 0$ e $S_n = s_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

é igual a um (único) número s . Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - S_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= s - s \\ &= 0.\end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 5

A recíproca da proposição 4 não é verdadeira, ou seja, é possível que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja divergente.

Exemplo

Embora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \quad (3.5)$$

diverge, pois, como

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \quad \text{etc.},$$

(3.5) “majora” a série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots$$

PROPOSIÇÃO 6

Considere $0 \leq a_n \leq A_n$ para cada índice $n \geq n_0$. Portanto, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge.

Exemplo

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

converge. De fato, como $(1/n)^n \leq (1/2)^n$ para cada inteiro $n > 1$, temos

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 6

Como $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge, existe um número S tal que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=n_0}^{\infty} A_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n_0}^n A_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, como $0 \leq a_n \leq A_n$ (para cada índice $n \geq n_0$), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_n = a_1 + \cdots + a_n \\ &\leq A_1 + \cdots + A_n =: S_n \\ &\leq S, \end{aligned}$$

por (3.6) e pela monotonicidade da sequência $(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots)$.⁴ Portanto, a sequência crescente $(s_{n_0}, s_{n_0+1}, \dots)$ também é limitada. Assim, existe um número s tal que

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 7

Considere $0 \leq A_n \leq a_n$ para cada índice $n \geq n_0$. Assim, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge se $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ diverge.

Exemplo

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$ diverge, pois $1/n \leq 1/\sqrt{n}$ (para cada inteiro positivo n) e a série (3.5) diverge.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 7

Suponha que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ convirja. Logo $\sum_{n=n_0}^{\infty} A_n$ converge, pela proposição 6.

PROPOSIÇÃO 8: TESTE DA RAZÃO (RESPECTIVAMENTE, RAIZ)

Considere $a_n > 0$ para todo índice $n \geq n_0$. Seja L um número tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad (\text{respectivamente, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L).$$

Portanto,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } L < 1; \\ \text{diverge se } L > 1; \\ \text{pode convergir ou divergir se } L = 1. \end{cases}$$

⁴Essa sequência é crescente.

Exemplos

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ converge.⁵ De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots$ diverge.⁶ De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

⁵De fato, pela proposição 6, basta observarmos que

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge.

⁶De fato, pela proposição 7, basta observarmos que

$$\frac{1}{n} < \frac{2^n}{n}, \text{ para } n \geq 1,$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots$ converge. De fato,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} \\ &= \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$ converge ou diverge?
Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Então, pela proposição 4, a série é divergente.

Outro modo de verificarmos que a série diverge, é observarmos que, para cada inteiro positivo n , temos $a_n = \frac{n}{n+1} < 1$ e

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \\ &= 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \\ &> 1, \end{aligned}$$

isto é, $a_{n+1} > a_n$. Assim, como

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 1$$

é uma sequência de termos positivos, estritamente crescente e limitada superiormente por 1, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in (0, 1].$$

Consequentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge, pela proposição 4.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ converge ou diverge?
Aqui, o teste da razão é inconclusivo. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+2}{n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, como, para cada inteiro positivo n ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, a série converge para 1.

PROPOSIÇÃO 9: TESTE DE LEIBNIZ

Considerem válidas as seguintes condições:

1. $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots > 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge para um número no intervalo $(0, a_1]$, isto é,

$$0 < a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \leq a_1.$$

Exemplo

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ converge para um número em $(0, 1]$. De fato, as duas condições da proposição 9 são satisfeitas para $a_n = \frac{1}{n}$.

3.2 Séries de funções

Considere uma sequência de funções, digamos $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, e um conjunto $I \neq \emptyset$ contido no domínio de todas essas funções.

Note que, para cada $t \in I$,

$$f_1(t) + f_2(t) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

é uma série numérica. Assim, todos os resultados apresentados (para as séries numéricas) permanecem válidos para $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, para cada $t \in I$. Portanto, caso exista um número $f(t)$, para cada $t \in I$, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = f(t),$$

diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para f (em I) e denotaremos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$. Nesse caso, I é dito domínio de convergência de f .

3.2.1 Exemplo fundamental: série geométrica

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \\ &= \frac{1}{1-t}, \end{aligned}$$

para $|t| < 1$, isto é, $t \in I = (-1, 1)$.⁷ Por outro lado, a série geométrica é divergente para $|t| \geq 1$, ou seja, $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.⁸

⁷Na segunda igualdade, utilizamos a mudança de índices $m = n - 1$. Na terceira, de cima para baixo, utilizamos (3.4), página 40.

⁸Cf. (3.3), página 39.

Exemplos

Utilizando a série geométrica, podemos obter representações em série de funções e I para:

$$1. g(t) = \frac{1}{1+t^3};$$

$$2. h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3};$$

$$3. \varphi(t) = \frac{t}{5-t};$$

$$4. \phi(t) = \frac{t^2}{t-5}.$$

De fato:

1. Se $u = -t^3$, então

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1 - (-t^3)} \\ &= \frac{1}{1 - u} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} \\ &= 1 - t^3 + t^6 - t^9 + \dots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.⁹

2.

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^3 g(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{3(n+1)} \\ &= 2t^3 - 2t^6 + 2t^9 - 2t^{12} + \dots, \end{aligned}$$

para $t \in I = (-1, 1)$.¹⁰

9

$$\begin{aligned} |t| < 1 &\implies |t|^3 < 1 \\ &\implies |t^3| < 1 \\ &\implies |-1| |t^3| < 1 \\ &\implies |-t^3| < 1 \\ &\implies |u| < 1. \end{aligned}$$

¹⁰Por definição, o domínio de convergência de h é igual ao de g .

3. Se $v = \frac{t}{5}$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{t}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{5}} \\ &= v \cdot \frac{1}{1 - v} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{t}{5} + \frac{t^2}{25} + \frac{t^3}{75} + \dots,\end{aligned}$$

para $t \in I = (-5, 5)$.¹¹

4.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= -t\varphi(t) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= -\frac{t^2}{5} - \frac{t^3}{25} - \frac{t^4}{75} + \dots,\end{aligned}$$

para $t \in I = (-5, 5)$.¹²

3.2.2 Definição de convergência absoluta

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absolutamente (em I), isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ converge absolutamente, para todo $t \in I$, quando $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ converge (em I).

Exemplo

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n}$ converge absolutamente, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, como, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$|\text{sen } nt| \leq 1 \implies \left| \frac{\text{sen } nt}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

¹¹

$$\begin{aligned}|t| < 5 &\implies \left| \frac{t}{5} \right| < 1 \\ &\implies |v| < 1.\end{aligned}$$

¹²Por definição, o domínio de convergência de ϕ é igual ao de φ .

e $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ converge,

$$\left| \frac{\text{sen } t}{2} \right| + \left| \frac{\text{sen } 2t}{4} \right| + \dots$$

converge, para todo $t \in \mathbb{R}$, pela proposição 6 da seção 3.1.

Pode ser demonstrado que convergência absoluta implica em convergência.¹³ Contudo, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo

No último exemplo da seção 3.1, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1/n$ converge. Contudo, a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} 1/n|$ diverge.¹⁴

3.3 Séries de potências

Uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é uma *série de potências em torno de t_0* quando

$$f_n(t) = a_n (t - t_0)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

isto é, quando a série é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots$$

Nesse caso, I é chamado de *intervalo de convergência* se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Exemplo

Para a série geométrica, página 48, temos $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ com $I = (-1, 1)$. Aqui, $f(t) = \frac{1}{1-t}$, $t_0 = 0$ e $a_n = 1$, para cada índice inteiro não negativo n .

Observação

Demonstra-se que, para $|t - t_0| < R$, se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots, \end{aligned}$$

¹³Assim, a série do exemplo anterior converge.

¹⁴Confira (3.5), página 43.

então

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Exemplo

Seja $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} (t^n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} \\ &= 1 + 2t + 3t^2 + \dots, \end{aligned}$$

para cada $t \in (-1, 1)$.

Teorema de convergência

Se, para todo $t \in I$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$ converge, então I é, exatamente, um dos seguintes conjuntos:

1. $\{t_0\}$;
2. \mathbb{R} ;
3. $(t_0 - R, t_0 + R)$;
4. $[t_0 - R, t_0 + R)$;
5. $(t_0 - R, t_0 + R]$;
6. $[t_0 - R, t_0 + R]$.

Nesse caso, R é dito *raio de convergência* da série de potências e, por abuso de notação, $R = 0$ e $R = \infty$ para as condições 1 e 2, respectivamente.

Exemplo

Para a série geométrica, página 48, como $I = (0 - 1, 0 + 1)$, temos $t_0 = 0$ e $R = 1$.

Teste da razão

Considere que:

- $a_n \neq 0$, para $n \geq n_0$;
- $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (t - t_0)^{n+1}}{a_n (t - t_0)^n} \right| = |t - t_0| \cdot L.$$

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$:

- converge absolutamente, para $|t - t_0| < \frac{1}{L}$;
- diverge, para $|t - t_0| > \frac{1}{L}$;
- pode convergir ou divergir, se $|t - t_0| = \frac{1}{L}$.

Note que, aqui, $R = \frac{1}{L}$.

Exemplos

1. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+1) (t-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n (t-2)^n} \right| &= |-1| \left| \frac{n+1}{n} \right| |t-2| \\ &= |t-2| \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &\rightarrow |t-2| \cdot 1 \end{aligned}$$

se $n \rightarrow \infty$, segue que $L = 1$, $R = 1$ e a série dada converge em $(2-1, 2+1) = (1, 3)$ e diverge em $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Por outro lado, a série também diverge em $\{1, 3\}$. De fato:

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} n \\ &= -(1 + 2 + 3 + 4 + \dots); \end{aligned}$$

- $t = 3$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots. \end{aligned}$$

Pela proposição 4, seção 3.1, essas séries numéricas divergem.

Portanto, $I = (1, 3)$.

2. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}$. Assim, por um lado, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{(t+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(t+1)^n} \right| &= \left| \frac{t+1}{2} \right| \cdot \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \frac{|t+1|}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ &\rightarrow |t+1| \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se $n \rightarrow \infty$, segue que $L = \frac{1}{2}$, $R = 2$ e a série dada converge em $(-1-2, -1+2) = (-3, 1)$ e diverge em $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. Por outro lado, a série converge para $t = -3$ e diverge para $t = 1$. De fato:

- $t = -3$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

que converge, pelo teste de Leibniz;

- $t = 1$ acarreta

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

que chamamos de série harmônica e verificamos ser divergente.

Portanto, $I = [-3, 1)$.

3. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n$. Assim, se $n \rightarrow \infty$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2(n+1))!(t-2)^{n+1}}{(2n)!(t-2)^n} \right| &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\ &= |t-2| \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(2n)!} \\ &= |t-2|(2n+2)(2n+1) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

somente em $t = 2$. Portanto, $I = \{2\}$.

3.4 Séries de Taylor e funções analíticas

Se a função $f(t)$ pode ser representada por uma série de potências em torno de $t = t_0$, isto é, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n \\ &= a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, e tem derivadas de todas as ordens num intervalo contendo $(t_0 - R, t_0 + R)$, então:

- $f(t_0) = a_0 \implies a_0 = \frac{f^{(0)}(t_0)}{0!};$
- Como, via (3.7),¹⁵

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t - t_0)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 (t - t_0) + 3a_3 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f'(t_0) = a_1 \implies a_1 = \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f')'(t) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t - t_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (t - t_0) + 12 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f''(t_0) = 2a_2 \implies a_2 = \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!};$$

- Como, via (3.7),

$$\begin{aligned} f'''(t) &= (f'')'(t) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (t - t_0)^{n-3} \\ &= 6a_3 + 24 (t - t_0) + 60 (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

para $|t - t_0| < R$, temos

$$f'''(t_0) = 6a_3 \implies a_3 = \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!};$$

¹⁵Cf. p. 52.

- Repetindo esse procedimento para a n -ésima derivada de f , demonstra-se, por *indução finita*, que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \\ &= \frac{f(t_0)}{0!} + \frac{f'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!} (t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

é a *série de Taylor* de f em torno de $t = t_0$ ou, especificamente, em $I = (t_0 - R, t_0 + R)$,¹⁶ e $f(t)$ é dita *analítica* em I .

Exemplos

1. Para a série geométrica,¹⁷ $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, para $|t| < 1$. Podemos confirmar esse resultado, verificando que $f(t) = \frac{1}{1-t}$ é analítica em $I = (-1, 1)$,¹⁸ via:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{1-0} = 1 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{2}{(1-0)^3} = 1 = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$, $f''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, etc.

2. $f(t) = e^t$ é analítica em $I = \mathbb{R}$,¹⁹ com

$$\begin{aligned} e^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1 = a_0; \\ f'(0) &= e^0 = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} = a_2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que, utilizamos $f^{(n)}(t) = e^t$, $n = 0, 1, 2, \dots$

¹⁶Se $t = 0$, (3.8) é a *série de Maclaurin* de f .

¹⁷Cf. p. 48.

¹⁸Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.

¹⁹Aqui, $t_0 = 0$ e $R = \infty$.

3. $f(t) = \ln(1+t)$ é analítica em $I = (-1, 1)$,²⁰ com

$$\begin{aligned}\ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}f(0) &= \ln(1+0) = 0 = a_0; \\ f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 = a_1; \\ \frac{f''(0)}{2} &= \frac{-\frac{1}{(1+0)^2}}{2} = -\frac{1}{2} = a_2; \\ \frac{f'''(0)}{3!} &= \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} = a_3; \\ &\vdots\end{aligned}$$

Note que, utilizamos $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$, etc.

EXERCÍCIO

Verifique que as funções seno e cosseno são analíticas em $I = \mathbb{R}$, com

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

Observação

A analiticidade, em $I = \mathbb{R}$, das funções seno, cosseno e exponencial, pode ser utilizada para demonstrar a *fórmula de Euler*,

$$e^{it} = \operatorname{cos} t + i \operatorname{sen} t,²¹$$

observando que

$$\begin{array}{cccc}i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}$$

²⁰Aqui, $t_0 = 0$ e $R = 1$.

²¹Cf. página 26.

3.4.1 Séries de potências e edos

Observações

- O índice de uma série é invariante por permutação de letras, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n &= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_i \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \\ &= \dots\end{aligned}$$

- A igualdade de duas séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$ implica na igualdade dos seus coeficientes de mesmos índices,²² ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n = 0 \implies a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

- Seja

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (3.10)$$

como na página 23, com a , b e c analíticas em $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Demonstra-se que suas soluções também são analíticas em I . Portanto, para obter uma solução geral de (3.10), via séries de Taylor em torno de $t_0 = 0$, considere as seguintes etapas:

- Assuma que $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ é solução de (3.10).
- Substitua x , $x' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ e $x'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n t^{n-2}$ em (3.10).
- Caso seja necessário, reindexe alguma série.²³
- Determine a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, utilizando (3.9).

Exemplos

²²De fato, para cada índice n , após ter obtido $a_n = b_n$ via $t = t_0$, calcule a derivada de ordem $n + 1$ das duas séries e repita o processo.

²³**Exemplos**

- Para $m = n - 2$,

$$x'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)a_{m+2}t^m.$$

1. $x'' + x = 0$.

$$\begin{aligned}
 x'' + x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\
 &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n] t^n = 0 \\
 &\implies (n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 &\implies a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série) e, depois, trocamos m por n . Então, para a_0 e a_1 constantes, temos:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{a_0}{1 \cdot 2}; \\
 a_3 &= -\frac{a_1}{2 \cdot 3}; \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}; \\
 a_5 &= -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = -\frac{a_1}{5!}; \\
 a_6 &= -\frac{a_4}{5 \cdot 6} = -\frac{a_0}{6!}; \\
 a_7 &= -\frac{a_5}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{7!}; \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Assim, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}.$$

Portanto, a solução de $x'' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\
 &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= a_0 \cos t + a_1 \sin t.
 \end{aligned}$$

· Para $m = n + 1$,

$$\begin{aligned}
 tx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} t^m.
 \end{aligned}$$

$$2. \quad x'' - tx = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - tx = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série, e $i = n + 1$, na segunda) e, depois, trocamos m e i por n . Logo, como $a_2 = 0$, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{(2)(3)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_2}{(4)(5)} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{(5)(6)} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{(6)(7)} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)}; \\ a_8 &= \frac{a_5}{(7)(8)} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)},$$

enquanto que, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{3n+2} = 0.$$

Portanto, a solução de $x'' - tx = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} t^{3n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n+1} t^{3n+1} \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n}}{(2)(3)(5)(6) \cdots (3n-1)(3n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3)(4)(6)(7) \cdots (3n)(3n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$3. x'' - t^2x = 0.$$

$$\begin{aligned} x'' - t^2x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies (1)(2)a_2 t^0 + (2)(3)a_3 t^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies 2a_2 + 6a_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_2 = a_3 = 0, a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

onde, na segunda implicação, de cima para baixo, reindexamos n (via $m = n - 2$, na primeira série, e $i = n + 2$, na segunda) e, depois, trocamos m e i por n . Logo, como $a_2 = a_3 = 0$, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_0}{(3)(4)}; \\ a_5 &= \frac{a_1}{(4)(5)}; \\ a_6 &= \frac{a_2}{(5)(6)} = 0; \\ a_7 &= \frac{a_3}{(6)(7)} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_4}{(7)(8)} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8)}; \\ a_9 &= \frac{a_5}{(8)(9)} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então, para $n = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$a_{4n} = \frac{a_0}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \quad \text{e} \quad a_{4n+1} = \frac{a_1}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)},$$

enquanto que, para $n = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$a_{4n+2} = a_{4n+3} = 0.$$

Portanto, a solução de $x'' - t^2x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n} t^{4n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n+1} t^{4n+1} \\ &= a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(3)(4)(7)(8) \cdots (4n-1)(4n)} \right] \\ &\quad + a_1 \left[t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(4)(5)(8)(9) \cdots (4n)(4n+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$4. (t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0.$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' - 4tx' + 6x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} - 4na_n + 6a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 - 5n + 6) a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} \right] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Portanto, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -3a_0; \\ a_3 &= -\frac{a_1}{3}; \\ a_4 &= -\frac{0 \cdot a_2}{12} = 0; \\ a_5 &= -\frac{0 \cdot a_3}{20} = 0; \\ a_6 &= -\frac{2 \cdot a_4}{30} = 0; \\ a_7 &= -\frac{6 \cdot a_5}{42} = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ &= a_0 (1 - 3t^2) + a_1 \left(t - \frac{1}{3} t^3 \right). \end{aligned}$$

$$5. \begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0 \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t^2x'' + x'' + tx' - x = 0 &\implies \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n t^{n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)na_n + (n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n - a_n] t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n^2 - 1)a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_0; \\ a_3 &= 0; \\ a_4 &= -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}a_0; \\ a_5 &= -\frac{2}{5}a_3 = 0; \\ a_6 &= -\frac{3}{6}a_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_0; \\ a_7 &= -\frac{4}{7}a_5 = 0; \\ a_8 &= -\frac{5}{8}a_6 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} \\ &= a_0 \left(1 + \frac{t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n)} t^{2n} \right) + a_1 t. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a_0 = x(0) = 0$ e $a_1 = x'(0) = 1$, a solução do PVI é apenas $x(t) = t$.

$$6. \begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + x = 0 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - (2n-1)a_n] t^n = 0 \\ &\Rightarrow a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, se a_0 e a_1 são constantes, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{(1)(2)} a_0; \\ a_3 &= \frac{1}{(2)(3)} a_1; \\ a_4 &= \frac{3}{(3)(4)} a_2 = -\frac{3}{4!} a_0; \\ a_5 &= \frac{5}{(4)(5)} a_3 = \frac{1 \cdot 5}{5!} a_1; \\ a_6 &= \frac{7}{(5)(6)} a_4 = -\frac{3 \cdot 7}{6!} a_0; \\ a_7 &= \frac{9}{(6)(7)} a_5 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} a_1; \\ a_8 &= \frac{11}{(7)(8)} a_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} a_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)}{(2n)!} a_0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ a_{2n+1} &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{(2n+1)!} a_1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

e, assim, a solução de $(t^2 + 1)x'' - 2tx' + x = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} t^{2n+1} \\ &= a_0 \left\{ 1 - \frac{t^2}{2!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-5)] t^{2n}}{(2n)!} \right\} + a_1 \left\{ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)] t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \\ &= a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $a_0 = x(0) = 0$ e $a_1 = x'(0) = 1$, a solução do *pvi* é apenas $x(t) = x_2(t)$.

Observação

Esse método de resolução, via séries, também é válido para toda *edo* de primeira ordem

com coeficientes analíticos. De fato, basta considerarmos $a = 0$ em (3.10).

Exemplos

1. $x' - x = 0$.

$$\begin{aligned} x' - x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] t^n = 0 \\ &\implies a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{1} = \frac{a_0}{1!}; \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}; \\ a_3 &= \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}; \\ a_4 &= \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, esses coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de $x' - x = 0$ pode ser representada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= a_0 e^t. \end{aligned}$$

2. $x' = t^2 x$.

$$\begin{aligned} x' - t^2 x = 0 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = 0 \\ &\implies a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_{n-2}] t^n = 0 \\ &\implies a_1 = a_2 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Assim, para a_0 constante, temos:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_0}{3} = \frac{a_0}{3^1(1!)}; \\ a_4 &= \frac{a_1}{4} = 0; \\ a_5 &= \frac{a_2}{5} = 0; \\ a_6 &= \frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{3^2(2!)}; \\ a_7 &= \frac{a_4}{7} = 0; \\ a_8 &= \frac{a_5}{8} = 0; \\ a_9 &= \frac{a_6}{9} = \frac{a_0}{3^3(3!)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, esses coeficientes são dados por

$$a_{3n} = \frac{a_0}{3^n(n!)} \quad \text{e} \quad a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e a solução de $x' - t^2x = 0$ pode ser representada por

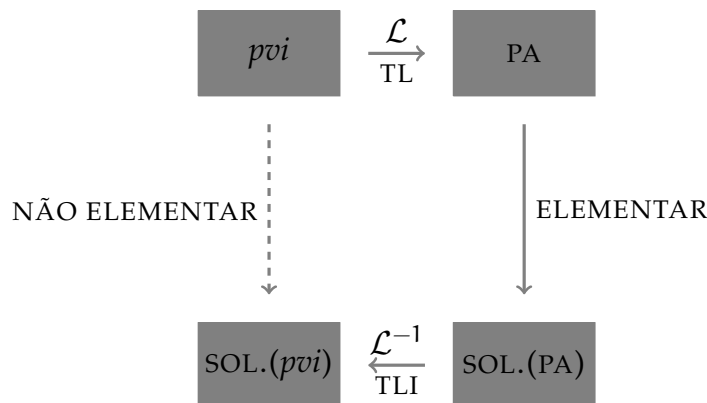
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} t^{3n} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n(n!)} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^3/3)^n}{n!} \\ &= a_0 e^{t^3/3}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Transformada de Laplace (TL) e *edos*

4.1 TL

Figura 4.1: *pvi*, problema algébrico (PA), suas soluções e transformadas



O diagrama da figura 4.1 é uma representação da passagem (TL) de um *pvi* para um problema algébrico, da resolução elementar desse problema (seta vertical contínua) e da passagem (TLI) da solução do PA para a solução do *pvi*. A seta vertical tracejada representa uma abordagem de resolução (sem transformadas) não elementar.¹

DEFINIÇÃO

A TL de uma função $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, é uma função $F(s)$ calculada pelo operador \mathcal{L} definido pela expressão

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= F(s),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde o domínio de F é formado por todo número s tal que $e^{-st}f(t)$ é integrável em $[0, \infty)$.

¹Esse diagrama será exemplificado na seção 4.2.

Nesse caso, $f(t)$ é a TLI de $F(s)$ e denotamos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t).$$

Exemplos

1. Para s_0 fixo, se $s > s_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{s_0 t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \right]_{t=0}^{t=L} \\ &= -\frac{1}{s-s_0} \lim_{L \rightarrow \infty} (e^{-(s-s_0)L} - 1) \\ &= \frac{1}{s-s_0}. \end{aligned}$$

Na quarta igualdade, de cima para baixo, utilizamos a integral

$$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \Big|_a^b, \quad (4.2)$$

que pode ser tanto real quanto complexa.

Assim, para $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} = \frac{1}{s-s_0} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_0}\right\} = e^{s_0 t}. \quad (4.3)$$

2. Se $s > 0$, temos, por (4.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \mathcal{L}\{e^{0 \cdot t}\} \\ &= \frac{1}{s-0} \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Assim, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \quad (4.4)$$

3. Se $s > 0$, temos, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{t=L} t e^{-st} dt \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=L} - \int_{t=0}^{t=L} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{L e^{-sL}}{s} + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=L} \right\} \\
 &= \frac{1}{s^2},
 \end{aligned}$$

onde aplicamos L'hôpital em $L e^{-sL} = \frac{L}{e^{sL}}$. Logo, se $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \iff \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = t.$$

4. Se n é um inteiro positivo e $s > 0$, então, via integração por partes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \\
 &= \left[-t^n \cdot \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}.
 \end{aligned}$$

Portanto, como $\mathcal{L}\{t^1\} = \frac{1}{s^2}$, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^2\} &= \frac{2}{s} \mathcal{L}\{t^1\} \\
 &= \frac{2!}{s^3}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t^3\} &= \frac{3}{s} \mathcal{L}\{t^2\} \\
 &= \frac{3!}{s^4}.
 \end{aligned}$$

Logo, caso a expressão

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$$

seja válida, temos (por indução)

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{4.5}$$

para cada inteiro positivo n .²

Admissibilidade

Em relação à definição (4.1), $f(t)$ é dita *admissível* caso $F(s)$ exista.³

Linearidade

Para cte_1 e cte_2 constantes, se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis com transformadas $F(s)$ e $G(s)$, respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cte_1 f(t) + cte_2 g(t)\} &= cte_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + cte_2 \mathcal{L}\{g(t)\} \\ &= cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{cte_1 F(s) + cte_2 G(s)\} &= cte_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + cte_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \\ &= cte_1 f(t) + cte_2 g(t).\end{aligned}$$

Exemplos

1. Seja $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7$. Portanto, para $s > 0$,

$$\begin{aligned}P(s) &= \mathcal{L}\{p(t)\} \\ &= -\mathcal{L}\{t^4\} + 2\mathcal{L}\{t^3\} + \mathcal{L}\{t\} - 7\mathcal{L}\{1\} \\ &= -\frac{4!}{s^5} + \frac{2(3!)}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s} \\ &= \frac{-24 + 12s + s^3 - 7s^4}{s^5},\end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, de baixo para cima, utilizamos a equação (4.5).

2. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \mathcal{L}\{\cos t + i \sin t\} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t\} + i\mathcal{L}\{\sin t\},\end{aligned}$$

²Na verdade, essa fórmula também é válida para $n = 0$. De fato, por (4.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^0\} &= \mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{1}{s} \\ &= \frac{0!}{s^{0+1}}.\end{aligned}$$

³Nesse texto, não apresentaremos as condições suficientes para a existência de $F(s)$. Contudo, é importante salientarmos que, em cada exemplo desse capítulo, temos $f(t)$ admissível, ou seja, domínio de F não vazio.

por linearidade. Por outro, por definição, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{it}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{it} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(i-s)t} dt \\ &= \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-i} \\ &= \frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

caso s seja positivo. De fato, na terceira, quarta e quinta igualdades, de cima para baixo, utilizamos, respectivamente, a equação (4.2),

$$\begin{aligned}e^{(i-s)t} &= e^{-st} e^{it} \\ &= e^{-st} (\cos t + i \sin t) \\ &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

para $t \rightarrow \infty$,⁴ e que

$$\frac{s}{s^2+1} + i \frac{1}{s^2+1}$$

é o inverso multiplicativo de $s - i$.⁵ Então, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$



$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t.$$

3. Seja $s > \omega$, onde ω é uma constante positiva.⁶ Como $\frac{\omega}{s^2-\omega^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega} \right)$,⁷ temos, por linearidade e pela equação (4.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right\} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \\ &= \sinh(\omega t).\end{aligned}$$

⁴ $\cos t$ e $\sin t$ são limitadas e $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$.

⁵De fato, se $i^2 = -1$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então

$$(a + ib) \left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right) = 1.$$

⁶Assim, também, $s > -\omega$.

⁷Utilizamos, aqui, o método de frações parciais, empregado no cálculo de integrais de funções reais de uma variável real.

Analogamente, para $s > \omega > 0$, temos

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

4. Para $s > 1$,⁸ como

$$\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)} = -\frac{3}{2s} + \frac{4}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)},⁹$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right\} &= -\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}, \end{aligned}$$

por (4.3), página 68.

5. Se $s > 2$,¹⁰ então

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{s^2+2s-8} &= \frac{s-1}{(s+4)(s-2)} \\ &= \frac{1}{6(s-2)} + \frac{5}{6(s+4)} \end{aligned}$$

e, assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2+2s-8}\right\} = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{5}{6}e^{-4t},$$

por (4.3).

Mudança de variável

Para qualquer constante cte positiva, se $f(t)$ é admissível, temos

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

De fato, como $f(\text{cte } t)$ é função de t , temos, por definição,¹¹

$$\mathcal{L}\{f(\text{cte } t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(\text{cte } t)dt.$$

Agora, se $\tau = \text{cte } t$, essa integral é igual a

$$\frac{1}{\text{cte}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\text{cte}}\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\text{cte}}F\left(\frac{s}{\text{cte}}\right).$$

⁸Assim, $s > -2$.

⁹Pelo método (de frações parciais) supracitado.

¹⁰Portanto, $s > -4$.

¹¹Cf. p. 67.

Exemplo

Utilizando-se as transformadas do seno e do cosseno (obtidas no exemplo 2 anterior) e a mudança de variável supracitada, temos, para $\omega > 0$ constante e $s > 0$, a seguinte TL

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{\frac{s}{\omega^2}}{\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

e, analogamente, temos

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (4.6)$$

Deslocamento-I

Sendo cte constante e $f(t)$ admissível,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{cte t} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{cte t} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-cte)t} f(t) dt \\ &= F(s - cte),\end{aligned}$$

para $s > cte$.¹²

Exemplos

1. Por (4.5), temos

$$f(t) = t^n \iff F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ para } s > 0 \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, para $s > cte$,

$$\mathcal{L}\{t^n e^{cte t}\} = \frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}$$

e, assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s - cte)^{n+1}}\right\} = t^n e^{cte t}.$$

2. Seja $s > -3$. Assim, como

$$\frac{s^2}{(s+3)^3} = \frac{1}{s+3} - \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{9}{(s+3)^3},^{13}$$

¹²Confira o caso para $f(t) = 1$, página 68.

¹³Pelo método supracitado.

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s+3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 6\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 9\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\} \\ &= e^{-3t} - 6te^{-3t} + \frac{9}{2}t^2e^{-3t}.\end{aligned}$$

3. Sejam s e ω positivos. Como, por (4.6),

$$f(t) = \text{sen}(\omega t) \iff F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

temos, para $s > cte$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{cte t} \text{sen}(\omega t)\} &= F(s - cte) \\ &= \frac{\omega}{(s - cte)^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\{e^{cte t} \cos(\omega t)\} = \frac{s - cte}{(s - cte)^2 + \omega^2}.$$

4. Como podemos escrever

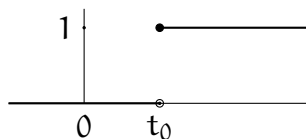
$$\begin{aligned}\frac{3s+7}{s^2-2s+5} &= \frac{3s+7}{s^2-2s+1+4} \\ &= \frac{3s+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3s-3+3+7}{(s-1)^2+4} \\ &= \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4},\end{aligned}$$

temos, para $s > 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s+5}\right\} &= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} \\ &= 3e^t \cos(2t) + 5e^t \text{sen}(2t).\end{aligned}$$

Função de Heaviside de passo unitário

Figura 4.2: Gráfico de $H(t - t_0)$



Para $t_0 \geq 0$, define-se

$$H(t - t_0) := \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0, \\ 1 & \text{se } t \geq t_0, \end{cases}$$

cujo gráfico está ilustrado na figura 4.2. Nesse caso, note que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t_0}^{\infty} \\ &= \frac{e^{-t_0 s}}{s}. \end{aligned}$$

Essa transformada pode ser generalizada pela seguinte propriedade:

Deslocamento-II

Se $s > 0$ e $f(t)$ é admissível, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - t_0)f(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - t_0)f(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t - t_0) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+t_0)} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \\ &= e^{-t_0 s} F(s), \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade, de cima para baixo, utilizamos a mudança de variável $u = t - t_0$.¹⁴

Exemplos

1. Determine a TL da função seno “acionada” em $t = 3$, conforme a figura 4.3.

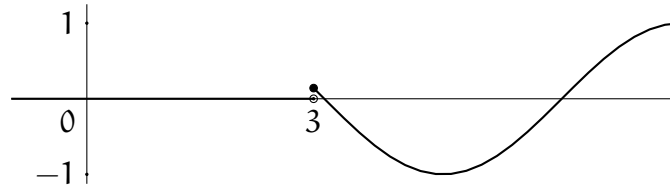
Essa função é dada por

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$$

Como $S(t) = H(t - 3) \text{sen } t$ e

$$\text{sen } t = \text{sen}(t - 3 + 3) = \text{sen}(t - 3) \cos 3 + \text{sen } 3 \cos(t - 3),$$

¹⁴Note que, a função de Heaviside “aciona” outras funções, a partir de $t = t_0$.

Figura 4.3: Gráfico de $S(t)$ 

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{S(t)\} &= \cos 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \sin(t-3)\} + \sin 3 \mathcal{L}\{H(t-3) \cos(t-3)\} \\ &= \cos 3 e^{-3s} \frac{1}{s^2+1} + \sin 3 e^{-3s} \frac{s}{s^2+1},\end{aligned}$$

caso s seja positivo.

2. Considere $s > 3$. Logo, como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2e^{3t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-7s} \frac{1}{(s-3)^3}\right\} \\ &= \frac{1}{2}H(t-7)(t-7)^2e^{3(t-7)}.\end{aligned}$$

TL e derivadas de $f(t)$

Para $s > 0$ e cada inteiro não-negativo n tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f^{(n)}(t) = 0,$$

temos

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f^{(0)}(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).^{15}$$

De fato:

- $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$;
- $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, pois, via integração por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt \\ &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \\ &= sF(s) - f(0);\end{aligned}$$

¹⁵Aqui, $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(f(t))$.

· $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{(f')'(t)\} \\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0);\end{aligned}$$

· Podemos aplicar, agora, indução finita sobre n .

Exemplos

1. É possível reobtermos a TL de $\cos(\omega t)$ pela fórmula (4.6).¹⁶ De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned}\omega(\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}) &= \mathcal{L}\{\omega \cos(\omega t)\} \\ &= \mathcal{L}\{\text{sen}'(\omega t)\} \\ &= s\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} - \text{sen } 0 \\ &= s\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \\ &= \omega\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$.

De fato, seja $f(t) = \text{sen}^2 t$. Então, $f(0) = 0$ e

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2 \text{sen } t \cos t \\ &= \text{sen } 2t.\end{aligned}$$

Por outro lado, a TL dessa derivada é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \mathcal{L}\{\text{sen } 2t\} \\ &= \frac{2}{s^2 + 4}.\end{aligned}$$

Agora, basta utilizarmos a fórmula

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

TLI e derivadas de $F(s)$

Para cada inteiro n não negativo onde exista a n -ésima derivada em relação a s , temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t), \quad (4.7)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t); \quad \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t); \quad \mathcal{L}^{-1}\{F''(s)\} = t^2f(t); \quad \text{etc.}$$

¹⁶Cf. p. 73.

A fórmula (4.7) é (trivialmente) válida para $n = 0$ e, como

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-te^{-st}) f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}\{t f(t)\},\end{aligned}$$

também é válida para $n = 1$. Além disso, caso (4.7) seja válida para o inteiro não negativo $n = \ell$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\ell+1} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell+1} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} (-te^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\ell} f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \left(\mathcal{L}\{t^{\ell} f(t)\} \right) \\ &= (-1) \frac{d}{ds} \left((-1)^{\ell} \frac{d^{\ell}}{ds^{\ell}} F(s) \right) \\ &= (-1)^{\ell+1} \frac{d^{\ell+1}}{ds^{\ell+1}} F(s),\end{aligned}$$

ou seja, (4.7) também é válida para $n = \ell + 1$. Portanto, por indução finita, (4.7) é válida para todo inteiro n não negativo.

Exemplos

1. É fácil ver que, se $s > 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\} &= - \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) \\ &= - \frac{1 \cdot (s^2 + 1) - s \cdot 2s}{(s^2 + 1)^2} \\ &= \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

2. Note que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2 \cos(3t)\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 9} \right) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{9 - s^2}{(9 + s^2)^2} \right),\end{aligned}$$

cuja resolução fica como exercício.

Convolução

Se $f(t)$ e $g(t)$ são admissíveis, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} &= f(t) * g(t) \\ &:= \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Além disso, note que a operação $*$ é comutativa, ou seja,

$$f * g = g * f.$$

De fato, considere os domínios de integração

$$D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\} \quad \text{e} \quad D_{t\tau} = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t > \tau > 0\}$$

e a mudança de variáveis

$$\begin{cases} t = u + v, \\ \tau = u. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-su}f(u)du \int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= \iint_{D_{uv}} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)dudv \\ &= \iint_{D_{t\tau}} e^{-st}f(\tau)g(t - \tau)d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\},\end{aligned}$$

onde, pela simetria da integral dupla dada na segunda igualdade (de cima para baixo), temos a comutatividade supracitada.

Exemplos

1. Qual é a TLI de $H(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$?

Primeiramente, note que,

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \implies f(t) = g(t) = \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t).$$

Assim, por convolução, temos

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega(t - \tau)) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega t - \omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (\text{sen}(\omega t) \cos(\omega\tau) \text{sen}(\omega\tau) - \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega t) \text{sen}(\omega\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2} \left(\text{sen}(\omega t) \int_0^t \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - \cos(\omega t) \int_0^t \text{sen}^2(\omega\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\omega^3} \left(\text{sen}(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen} u \cos u du - \cos(\omega t) \int_0^{\omega t} \text{sen}^2 u du \right) \\ &= \frac{1}{2\omega^3} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

2. TL da função erro

$$\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \implies \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s(s-1)}} \right\} = e^t \cdot \text{erf}(\sqrt{t}).$$

De fato, para $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ e $G(s) = \frac{1}{s-1}$, temos $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ e $g(t) = e^t$. Logo, se $\tau = x^2$, então

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx \\ &= e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Em relação ao cálculo de $f(t)$, considere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{\sqrt{s}}{u} \cdot \frac{2u}{s} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}},\end{aligned}$$

onde, na segunda e quarta igualdades (de cima para baixo), efetuamos, respectivamente, a mudança de variáveis $st = u^2$ e os cálculos seguintes:

Para $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned}a \rightarrow \infty \implies I &= \iint_{D_{xy}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{D_{r\theta}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^a e^{-r^2} r dr \right] d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^a e^{-r^2} (-2)r dr \right] \\ &= -\frac{\pi}{4} \int_0^{-a^2} e^u du \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \\ &\rightarrow \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado, para α qualquer, temos

$$\begin{aligned}\alpha \rightarrow \infty \implies I_\alpha &= \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\alpha e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_0^\alpha e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\rightarrow \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.\end{aligned}$$

Seja, então, $\alpha \in \{a, a/\sqrt{2}\}$. Como $I_{a/\sqrt{2}} < I < I_a$,¹⁷ temos

$$a \rightarrow \infty \implies I \rightarrow \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

¹⁷No primeiro quadrante, o quarto da circunferência de centro $(0,0)$ e raio a , está inscrito num quadrado de lado a e circunscrito num de lado $a/\sqrt{2}$.

Portanto, pela unicidade do limite,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para concluirmos a seção 4.1, seguem mais duas propriedades e uma tabela onde estão elencadas algumas transformadas calculadas nesse capítulo.¹⁸

Valores iniciais e finais

Se $f'(t)$ é admissível, ou seja,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (4.8)$$

caso esses limites existam.

Exemplo

Seja $X(s) = \frac{1}{s(s+2)}$. Assim, por um lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

TL de função T-periódica

Se $f(t+T) = f(t)$, $t \in [0, \infty)$, com f admissível e contínua por partes num período T , então

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Exemplo

¹⁸Nessa tabela, figuram, por exemplo, a transformada da função $\operatorname{erfc}(t) := 1 - \operatorname{erf}(t)$, onde erf é a função erro supracitada, e a transformada da função $\delta(t)$, dita *delta de Dirac*, a ser estudada na seção 4.2.

Seja $f(t) = \text{sen } \omega t$, $\omega > 0$. Logo, f tem período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st} \text{sen}(\omega t) dt \\ &= \frac{\left[-\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \cos(\omega t) - \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{-st} \text{sen}(\omega t) \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}} \right)}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{\omega}}} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Tabela de transformadas

Pode ser conveniente alocarmos os resultados das transformadas em algum tipo de tabela, para utilização posterior.¹⁹ Na tabela 4.1, coletamos algumas funções admissíveis estudadas nesse capítulo (no lado esquerdo) e suas respectivas transformadas (no lado direito).²⁰ Essa tabela será utilizada na seção 4.2, onde, conforme antecipamos na primeira nota de rodapé desse capítulo, a figura 4.1 será (finalmente) exemplificada.

4.2 pvi resolvido via TL e TLI

Seguiremos, em sequência, os passos seguintes:

- I. Aplique a TL em ambos os membros da *edo* do *pvi*;
- II. Resolva o problema de álgebra resultante do passo I;
- III. Aplique a TLI em ambos os membros da solução obtida no passo II.

Exemplos

1. Sistema massa-mola com forçamento e sem atrito²¹

Seja k a constante de Hooke de uma mola conectada horizontalmente a uma parede vertical e a um corpo de massa m . Devido (apenas) a uma força $f(t)$ horizontal e a força restauradora (do comprimento da mola), ambas atuando sobre o corpo, ele movimentar-se lateralmente sobre um plano, conforme a figura 4.4, e o sistema supracitado pode ser modelado pelo *pvi* dado por

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases} \quad (4.9)$$

¹⁹Na verdade, existem muitos livros dedicados apenas a essas tabelas!

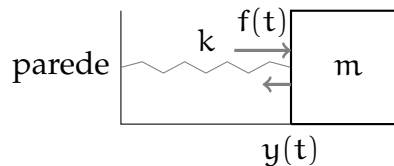
²⁰Nas duas linhas da tabela relacionadas ao limite (finito) ℓ , a segunda coluna decorre da primeira, como consequência de (4.8) da página 82, e o significado das três últimas linhas é o seguinte: existe um número infinito de transformadas e muitas delas podem ser obtidas pelas apresentadas nesse capítulo.

²¹Para um sistema massa-mola apenas com força restauradora e sem outro tipo de forçamento, inclusive atrito, confira o primeiro exemplo do capítulo 1.

Tabela 4.1: Tabela com algumas transformadas

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{cte t}, n = 0, 1, 2, \dots$	$n! / (s - cte)^{n+1}$ para $s > cte$
$e^{cte t} \text{sen}(\omega t)$	$\omega / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para s e ω positivos e $s > cte$
$e^{cte t} \text{cos}(\omega t)$	$(s - cte) / ((s - cte)^2 + \omega^2)$ para s e ω positivos e $s > cte$
$\text{senh}(\omega t)$	$\omega / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\text{cosh}(\omega t)$	$s / (s^2 - \omega^2)$ para $s > \omega > 0$
$\delta(t - cte)$	$e^{-cte s}$
$\text{erf}(cte t)$	$\frac{e^{s^2/4cte^2}}{s} \cdot \text{erfc}(s/2cte)$
$\text{erf}(\sqrt{cte t})$	$\frac{\sqrt{cte}}{s\sqrt{s+cte}}$
$\text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$e^{-cte\sqrt{s}}/s$
$\frac{cte}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-cte^2/4t}$	$e^{-cte\sqrt{s}}$
$f(cte t)$	$\frac{1}{cte} F\left(\frac{s}{cte}\right)$ para $cte > 0$
$e^{cte t} f(t)$	$F(s - cte)$ para $s > cte$
$H(t - t_0) f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$F(s)G(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \ell$
$f'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \ell$	$sF(s) - f(0)$ com $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \ell$
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$
\vdots	\vdots
$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-cte^2/4t} - cte \cdot \text{erfc}(cte/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-cte\sqrt{s}}$
\vdots	\vdots

Figura 4.4: A força restauradora apontando para a esquerda



Logo, pelos passos supracitados, temos:

I.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{my''(t) + ky(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \implies m\mathcal{L}\{y''(t)\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ &\implies ms^2Y(s) - msy_0 - my'_0 + kY(s) = F(s); \end{aligned}$$

II.

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + k} + \frac{msy_0}{ms^2 + k} + \frac{my'_0}{ms^2 + k};$$

III.

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + k/m} \right\} + y_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k/m} \right\} + y'_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + k/m} \right\}.$$

Agora, se $\omega = \sqrt{k/m}$, como

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = \cos \omega t,$$

então

$$y(t) = \frac{1}{m} \mathcal{L}^{-1} \left\{ F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Portanto, via convolução, temos

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \text{sen}(\omega(t-\tau)) d\tau + y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Considere, por exemplo, que o corpo está sujeito ao forçamento periódico dado por $f(t) = \text{sen } \omega t$. Assim, procedendo como no primeiro exemplo dado após a definição de convolução,²² temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2m\omega^2} (\text{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)) + y_0 \cos(\omega t) + \frac{y'_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ &= \left(\frac{2my'_0\omega + 1}{2m\omega^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \left(\frac{2my_0\omega^2 - \omega t}{2m\omega^2} \right) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

2. Considere o *pvi* dado por

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

A aplicação de \mathcal{L} na *edo* desse *pvi* acarreta

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) = 2 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + s + 4 - 6sY(s) - 6 + 15Y(s) &= \frac{6}{s^2 + 9} \implies (s^2 - 6s + 15) Y(s) = \frac{6}{s^2 + 9} - s + 2 \\ \implies Y(s) &= \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}. \end{aligned}$$

Via frações parciais, como

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)} &= \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (-6A + B + D)s^2 + (15A - 6B + 9C)s + 15B + 9D}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}, \end{aligned}$$

²²Confira a seção 4.1.

obtemos $A = B = \frac{1}{10}$, $C = -\frac{11}{10}$ e $D = \frac{25}{10}$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{10} \left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right).$$

Para a primeira parcela da soma entre parênteses, como

$$\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9},$$

sua TLI é dada por

$$\cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t.$$

Para a segunda, como

$$\begin{aligned} \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} &= \frac{-11s+25}{s^2-6s+9+6} \\ &= \frac{-11s+25}{(s-3)^2+6} \\ &= \frac{-11(s-3)-8}{(s-3)^2+6} \\ &= -11 \cdot \frac{s-3}{(s-3)^2+6} - \frac{8}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}}{(s-3)^2+6}, \end{aligned}$$

sua TLI é dada por

$$-11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \operatorname{sen} \sqrt{6}t.$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{10} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t - 11e^{3t} \cos \sqrt{6}t - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \operatorname{sen} \sqrt{6}t \right)$$

é a solução do *pvi* supracitado.

3. Considere o *pvi* dado por

$$\begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'\} &= -\frac{d}{ds} (\mathcal{L}\{y'\}) \\ &= -\frac{d}{ds} (sY(s) - y(0)) \\ &= -sY'(s) - Y(s), \end{aligned}$$

a aplicação de \mathcal{L} na *edo* do *pvi* acarreta

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(-sY'(s) - Y(s)) - 6Y(s) = \frac{2}{s},$$

para $s > 0$, conforme a tabela de transformadas apresentada no final da seção 4.1. Portanto,

$$-3sY'(s) + (s^2 - 9)Y(s) = \frac{2}{s},$$

ou seja,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}, \quad (4.10)$$

cujo fator integrante é dado por

$$\begin{aligned} \mu(s) &= e^{\int (\frac{3}{s} - \frac{s}{3}) ds} \\ &= e^{\ln(s^3) - \frac{s^2}{6}} \\ &= s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}, \end{aligned}$$

conforme vimos no capítulo 1. Consequentemente, multiplicando-se os dois membros de (4.10) por $\mu(s)$ e integrando-se, temos

$$\begin{aligned} s^3 e^{-\frac{s^2}{6}} Y(s) &= 2 \int e^{-\frac{s^2}{6}} \left(-\frac{s}{3}\right) ds \\ &= 2e^{-\frac{s^2}{6}} + \text{cte}. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}.$$

Por outro lado, como $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$, temos $\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$, por (4.8).²³ Contudo,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{\text{cte} e^{\frac{s^2}{6}}}{s^2} \right) = 0$$

apenas para $\text{cte} = 0$. Portanto,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} \implies y(t) = t^2.$$

4.2.1 Função delta de Dirac ($\delta(t)$)

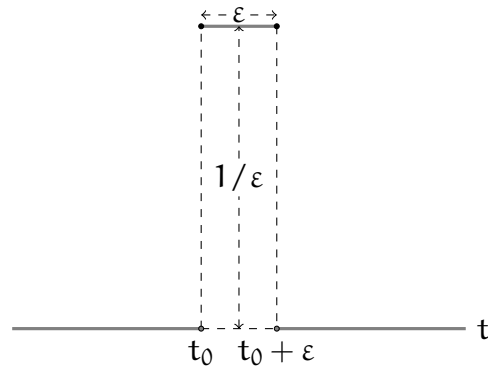
O *impulso* I de uma força $f(t)$, num intervalo de tempo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, é definido como

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} f(t) dt,$$

caso essa força seja integrável nesse intervalo de tempo. Caso o impulso seja intenso mas de curta duração, no lugar de $f(t)$, consideramos a força

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

²³Cf. p. 82.

Figura 4.5: Força $f_\varepsilon(t - t_0)$ 

conforme a figura 4.5. Assim, para $0 < \varepsilon \ll 1$,²⁴ o *impulso instantâneo* é definido (e calculado) da forma seguinte:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [t]_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \\ &= 1 \text{ u.i. (unidades de impulso)} \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$f_\varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\varepsilon} [H(t - t_0) - H(t - (t_0 + \varepsilon))],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t - t_0)\} &= \frac{1}{\varepsilon s} (e^{-t_0 s} - e^{-(t_0 + \varepsilon)s}) \\ &= e^{-t_0 s} \cdot \frac{1 - e^{\varepsilon s}}{\varepsilon s}. \end{aligned}$$

Definição e propriedades de $\delta(t)$

A função $\delta(t)$ modela pulsos de curtíssima duração, como na figura 4.5, caso $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja,

$$\delta(t - t_0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t - t_0).$$

Demonstra-se que:

$$\cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{para } t = t_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $t \neq t_0$, considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $t \notin [t_0, t_0 + \varepsilon]$;

$$\cdot \int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1;^{25}$$

²⁴Isto é, ε é um número positivo, arbitrariamente pequeno.

²⁵De fato, $\varepsilon \rightarrow 0 \implies I_\varepsilon \rightarrow 1$.

- Se $t_0 \in [t_1, t_2]$ está contido no domínio de $f(t)$, com $f(t)$ contínua em t_0 , então

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t_0)\delta(t-t_0) dt = f(t_0);$$

- $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0s}$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{f_\varepsilon(t-t_0)\} &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \\ &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-\varepsilon s}}{s} \\ &= e^{-t_0s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\varepsilon s}, \end{aligned}$$

onde utilizamos L'hôpital na penúltima igualdade, de cima para baixo.

Exemplo

Considere o *pvi* dado por

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

A aplicação de \mathcal{L} na *edo* desse *pvi* acarreta

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= e^{-s} \implies s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-s} \\ \implies Y(s) &= e^{-s}F(s), \end{aligned}$$

onde, via frações parciais,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, como

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ &= e^{-t} - e^{-2t}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} \\ &= f(t-1)H(t-1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}, & \text{se } t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

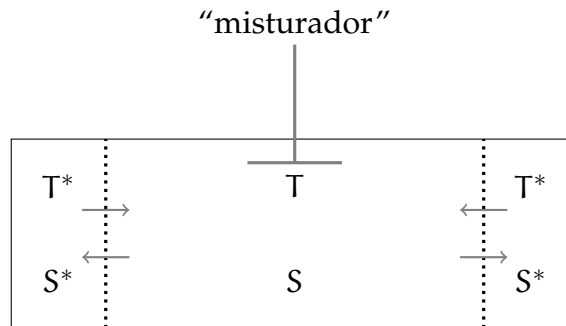
4.2.2 TL e sistemas de *edos*

A análise simultânea de algumas grandezas, a partir de suas taxas de variação simultâneas, é bastante comum.

Exemplo

Mudanças na densidade da água do mar, em sua superfície, por aquecimento ou resfriamento, acarretam mudanças de temperatura e salinidade, via precipitação ou evaporação de água salgada. É sabido que densidades de água e sal acarretam a circulação oceânica e, embora o conhecimento dessa (complexa) circulação (ainda) seja elementar,²⁶ podemos extrapolar algumas de suas consequências em modelos idealizados mais simples, como o do exemplo presente ou os das vindouras seções 6.3.1 e 7.3. Considere, assim, uma caixa representativa de uma região oceânica, polar ou equatorial, que tenha temperatura $T = T(t)$ e salinidade $S = S(t)$, dadas para cada instante de tempo t , conforme a figura 4.6. Além disso,

Figura 4.6: Modelo hiperidealizado de circulação oceânica



via hiperidealização, considere que as condições seguintes sejam válidas:

- A análise é feita num sistema físico fechado, ou seja, onde não haja perda de massa (sal) nem de energia (térmica).
- Embora haja troca de salinidade e temperatura entre a região supracitada e as suas regiões fronteiriças,²⁷ a temperatura T^* e a salinidade S^* dessas outras regiões são constantes.
- Existe algum processo que mantém a água salgada suficientemente “misturada”, sem que haja perda de parte dela (por evaporação), nem ganho (por precipitação).
- A troca supracitada (denotada por pequenas setas horizontais na figura 4.6) é dada pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= c(T^* - T), \\ \frac{dS}{dt} &= d(S^* - S), \end{aligned} \quad (4.11)$$

com constantes c e d positivas.

²⁶Cf. [Stommel (1961)].

²⁷Essas outras regiões podem ser oceânicas, continentais, atmosféricas, etc.

Consequentemente, adimensionalizando-se (4.11) via

$$\tau = ct, \quad \delta = \frac{d}{c}, \quad y = \frac{T}{T^*} \quad \text{e} \quad x = \frac{S}{S^*},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \delta(1-x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= 1-y. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Claramente, se $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, então

$$\begin{aligned} x &= 1 + (x_0 - 1)e^{-\delta\tau}, \\ y &= 1 + (y_0 - 1)e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Portanto, uma das grandezas tende assintoticamente, mais rapidamente do que a outra, ao seu estado final, dependendo das condições $0 < \delta < 1$ ou $\delta > 1$.

Observações

- Cada uma das equações do sistema (4.12) está *desacoplada* da outra, por conter uma única variável dependente. Nos dois exemplos finais desse capítulo, vamos obter as soluções $x(t)$ e $y(t)$ para sistemas lineares com equações *acopladas*.
- Consideraremos, nas seções supracitadas, modelos de circulação oceânica com duas caixas, representativas de latitudes diferentes, onde há troca de salinidade e temperatura entre as caixas e, assim, as equações dos sistemas associados são acopladas.

Exemplos

1.

$$\begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Aplicando-se \mathcal{L} em cada *edo* de (4.13), temos o sistema

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

Ao substituirmos as condições iniciais de (4.13) nas equações algébricas do sistema supracitado, temos

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = 2X(s) + Y(s); \\ sY(s) = 3X(s) + 4Y(s). \end{cases}$$

Consequentemente, por uma manipulação algébrica simples, obtemos

$$\begin{cases} (s-2)X(s) - Y(s) = 1; \\ -3X(s) + (s-4)Y(s) = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$X(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s-5)} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s-5)}.$$

Assim, via frações parciais,

$$X(s) = \frac{3/4}{s-1} + \frac{1/4}{s-5} \quad \text{e} \quad Y(s) = \frac{-3/4}{s-1} + \frac{3/4}{s-5}.$$

Portanto, aplicando-se \mathcal{L}^{-1} em cada uma das duas equações anteriores, temos

$$x(t) = \frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{1}{4} \cdot e^{5t} \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{3}{4} \cdot e^t + \frac{3}{4} \cdot e^{5t}.$$

2.

$$\begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Aplicando-se \mathcal{L} em cada *edo* de (4.14), temos o sistema

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 3X(s) - 3Y(s) + \frac{2}{s}; \\ sY(s) - y(0) = -6X(s) - \frac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Substituindo-se as condições iniciais de (4.14) nas equações algébricas do sistema supracitado, obtemos o sistema linear dado por

$$\begin{cases} (s-3)X(s) + 3Y(s) = \frac{2+s}{s}; \\ 6X(s) + sY(s) = -\frac{s^2+1}{s^2}. \end{cases}$$

No sistema supracitado, multiplique a equação de cima por s , a de baixo por -3 e adicione as equações resultantes (desses produtos) para obter

$$(s^2 - 3s - 18)X(s) = 2 + s + \frac{3s^2 + 3}{s^2}.$$

Assim, via frações parciais, obtemos a equação

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)} \\ &= \frac{1}{108} \left(\frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Aplicando-se \mathcal{L}^{-1} em ambos os membros dessa equação, temos

$$x(t) = \frac{1}{108} \left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t \right).$$

Por outro lado, da equação de baixo do sistema (4.14), temos

$$\begin{aligned} y &= \int (-6x - t) dt \\ &= -\frac{1}{18} \int \left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 \right) dt \\ &= -\frac{1}{108} \left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t \right) + \text{cte}. \end{aligned}$$

Substituindo-se a condição inicial (associada à equação supracitada) na última igualdade, de cima para baixo, segue que

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + \text{cte} \implies \text{cte} = \frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$y(t) = -\frac{1}{108} \left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81 \right).$$

Capítulo 5

Exercícios para a parte I

Aqui, cada exercício desacompanhado de resposta/solução está resolvido como exemplo, no capítulo relativo a esse exercício. Sugiro que o leitor tente resolver cada um desses exercícios, sem consultar seu exemplo associado e, somente após um esforço genuíno, caso não consiga resolvê-lo, que tal exemplo seja revisado.

1. Nos itens seguintes, obtenha a solução geral de cada *edo* e a solução particular de cada *pvi*. Além disso, quando possível, determine o domínio I de cada solução obtida.

(a) LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

i.
$$\begin{cases} x' = \cos t; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

iii.
$$x' = \frac{t}{1+t^2}x.$$

iv.
$$\begin{cases} x' = 2tx; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

v.
$$\begin{cases} tx' = -x + t^2; \\ x(1) = x_0. \end{cases}$$

(b) NÃO-LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

i. SEPARÁVEIS

A.
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2; \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

B.
$$x' = \frac{t^2}{x^2}.$$

C.
$$xx' = -t, x > 0.$$

ii. EXATAS¹

A.
$$(2tx - 3t^2) + (t^2 - 2x) \frac{dx}{dt} = 0.$$

B.
$$\begin{cases} (\cos t - t \operatorname{sen} t + x^2) + (2tx) \frac{dx}{dt} = 0; \\ x(\pi) = 1. \end{cases}$$

iii. BERNOULLI

A.
$$\begin{cases} x' + \frac{4}{t}x = t^3x^2; \\ x(2) = -1. \end{cases}$$

¹Primeiramente, utilize a condição necessária para ser exata.

$$B. \begin{cases} x' = 5x + e^{-2t}x^{-2}; \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x' + \frac{x}{t} - \sqrt{x} = 0; \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

iv. HOMOGÊNEA

$$A. \begin{cases} txx' + 4t^2 + x^2 = 0; \\ x(2) = -7. \end{cases}$$

$$B. \begin{cases} x' = \frac{x(t+x)}{t^2}; \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

(c) LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

$$i. \begin{cases} x'' + x' - 6x = 0; \\ x(0) = 1; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

$$ii. 3x'' + x' - x = 0.$$

$$iii. 4x'' + 12x' + 9x = 0.$$

$$iv. x'' - 6x' + 13x = 0.$$

$$v. \begin{cases} x'' + x = 0; \\ x(0) = 2; \\ x'(0) = 3. \end{cases}$$

vi. Podemos modelar oscilações “suficientemente pequenas” para um pêndulo simples, rígido, de massa desprezível e comprimento L u.c. (unidades de comprimento), oscilando livremente, sem atrito em torno de um ponto fixo P , sem sofrer resistência do ar, conectado a uma massa unitária puntiforme na extremidade oposta à P , sob a ação da aceleração da gravidade g , pelo *pvi*.²

$$\begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0; \\ x(T) = x_0; \\ x'(T) = 0. \end{cases}$$

vii. $x'' - 3x' + 2x = d(t)$, para:

$$A. d(t) = e^{3t};$$

$$B. d(t) = 2t^2 + 4t + 1;$$

$$C. d(t) = \cos t;$$

$$D. d(t) = e^{3t} + 2t^2 + 4t + 1 + \cos t.$$

viii. $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}$.

$$ix. x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2+1}.$$

$$x. x'' + x = \sec t.$$

$$xi. 2x'' + 18x = 6 \tan(3t).$$

2. Para cada item abaixo, obtenha a solução de cada *edo/pvi* e, caso seja possível, seu respectivo domínio I .³

$$(a) \begin{cases} x' + 3t^2x = t^2; \\ x(1) = \frac{1}{3e}. \end{cases}$$

$$\text{SOLUÇÃO: } x = \frac{1}{3} + \frac{1-e}{e^{t^3}}; I = \mathbb{R}.$$

²Aqui, T representa o período do pêndulo.

³Lembre-se: $I = \mathbb{R}$ para cada *edo* linear homogênea de segunda ordem com coeficientes contantes.

- (b) $\begin{cases} x' - \frac{1}{t}x = \frac{1}{t} \operatorname{sen} \frac{1}{t}; \\ x\left(\frac{-1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = t \cos \frac{1}{t}; I = (-\infty, 0)$.
- (c) $\begin{cases} x' + x = t; \\ x(0) = 1. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = t - 1 + \frac{2}{e^t}; I = \mathbb{R}$.
- (d) $\begin{cases} x' = 6x^2t; \\ x(1) = \frac{1}{25}. \end{cases}$ SOLUÇÃO: $x = \frac{1}{28-3t^2}; I = \left(-\sqrt{\frac{28}{3}}, \sqrt{\frac{28}{3}}\right)$.
- (e) $3t^2 - x^3 + (2x - 3tx^2)x' = 0$. SOLUÇÃO: $t^3 - tx^3 + x^2 = cte$.
- (f) $2tx - 3t^2 + (t^2 - 2x)x' = 0$. SOLUÇÃO: $t^2x - t^3 - x^2 = cte$.
- (g) $x' = 5x - 5tx^3$. SOLUÇÕES: $x = \pm \frac{\sqrt{10}e^{5t}}{\sqrt{cte + e^{10t}(10t-1)}}$.
- (h) $6x' - 2x = tx^4$. SOLUÇÃO: $x = -\frac{2^{1/3}e^{t/3}}{(cte + e^t(t-1))^{1/3}}$.
- (i) $x' = 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2$. SOLUÇÃO: $x = t \tan(\ln |t| + cte)$.
- (j) $4x'' + x' = 0$. SOLUÇÃO: $x = cte_1 + cte_2e^{-t/4}$.
- (k) $x'' + 4x = 8t^2 - 20t + 8 + 5 \operatorname{sen} 3t - 5 \cos 3t + 24e^{-2t} + 8 \cos 2t$.
SOLUÇÃO:
 $x = cte_1 \cos 2t + cte_2 \operatorname{sen} 2t + 2t^2 - 5t + 1 + \cos 3t - \operatorname{sen} 3t + 3e^{-2t} + 2t \operatorname{sen} 2t + \frac{\cos 2t}{2}$.
- (l) $x'' + 2x' = 6e^{-2t} + 12t^2$. SOLUÇÃO: $x = cte_1e^{-2t} + cte_2 - 3te^{-2t} + 2t^3 - 3t^2 + 3t$.⁴
- (m) $x'' - 6x' - 7x = 13 \cos 2t + 34 \operatorname{sen} 2t + 8e^{-t} - 7t - 6$.
SOLUÇÃO: $x = cte_1e^{-t} + cte_2e^{7t} + \cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t + t - te^{-t}$.
- (n) $\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t} - 12 \cos 3t - 5 \operatorname{sen} 3t; \\ x(0) = -2; \\ x'(0) = 4. \end{cases}$
SOLUÇÃO: $x = -2e^{2t} + 5te^{2t} - t^2e^{2t} + \operatorname{sen} 3t$.⁵

RESOLUÇÃO DO ITEM (a) DO EXERCÍCIO 2

A multiplicação do fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int 3t^2 dt} \\ &= e^{t^3} \end{aligned}$$

por

$$x' + 3t^2x = t^2$$

⁴ $x_p = -3te^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$ é uma solução particular de $x'' + 2x' = 6e^{-2t}$, pelo método da subseção 2.2.2. Inserimos $3/2$ na constante cte_1 da solução apresentada. Por outro lado, considere $x_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ para $x'' + 2x' = 12t^2$, com $D = 0$.

⁵Uma solução particular de $x'' - 4x' + 4x = 2e^{2t}$ pode ser obtida pelo método da subseção 2.2.2.

acarreta

$$\begin{aligned} x'e^{t^3} + x(3t^2e^{t^3}) &= t^2e^{t^3} \implies \frac{d}{dt}(xe^{t^3}) = t^2e^{t^3} \\ \implies xe^{t^3} &= \frac{1}{3} \int e^{t^3} 3t^2 dt \\ \implies x &= e^{-t^3} \left(\frac{e^{t^3}}{3} + \text{cte} \right) \\ \implies x &= \frac{1}{3} + \frac{\text{cte}}{e^{t^3}}. \end{aligned}$$

Agora, como

$$x(1) = \frac{1}{3e},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3e} &= \frac{1}{3} + \frac{\text{cte}}{e} \\ &= \frac{e + 3\text{cte}}{3e}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{cte} = \frac{1-e}{3}.$$

RESOLUÇÃO DO ITEM (b) DO EXERCÍCIO 2

A multiplicação do fator integrante

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{-\int 1/t dt} \\ &= e^{-\ln|t|} \\ &= e^{-\ln(-t)} \quad (\text{confira à condição inicial}) \\ &= e^{\ln(-t)^{-1}} \\ &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

por

$$x' - \frac{1}{t}x = \frac{1}{t} \text{sen} \frac{1}{t}$$

acarreta

$$\begin{aligned} x' \left(-\frac{1}{t} \right) + x \left(\frac{1}{t^2} \right) &= -\frac{1}{t^2} \text{sen} \frac{1}{t} \implies \frac{d}{dt} \left(x \left(-\frac{1}{t} \right) \right) = -\frac{1}{t^2} \text{sen} \frac{1}{t} \\ \implies \frac{x}{t} &= \int \left(-\text{sen} \frac{1}{t} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ \implies x &= t \cos \frac{1}{t} + \text{cte} t. \end{aligned}$$

Na terceira implicação, de cima para baixo, consideramos

$$u = \frac{1}{t} \text{ e } du = -\frac{1}{t^2} dt$$

no cálculo da integral. Agora, como

$$x\left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi},$$

temos

$$\frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1) - \frac{cte}{\pi},$$

ou seja,

$$cte = 0,$$

e I determinado por essa condição inicial.

RESOLUÇÃO DO ITEM (d) DO EXERCÍCIO 2

Como

$$x(1) = \frac{1}{25}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 6x^2t &\implies \int \frac{1}{x^2} dx = 6 \int t dt \\ &\implies -\frac{1}{x} = 3t^2 + cte_1 \\ &\implies x = -\frac{1}{3t^2 + cte} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} = -\frac{1}{3 + cte} &\implies 3 + cte = -25 \\ &\implies cte = -28 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x = \frac{1}{28 - 3t^2}.$$
⁶

RESOLUÇÃO DO ITEM (e) DO EXERCÍCIO 2

Note que

$$M = 3t^2 - x^3 \text{ e } N = 2x - 3tx^2 \implies M_x = -3x^2 = N_t.$$

Assim, se $F_t = M$, então

$$\begin{aligned} F &= \int (3t^2 - x^3) dt \\ &= t^3 - tx^3 + h(x). \end{aligned}$$

⁶I é determinado pela condição inicial.

Consequentemente, se $F_x = N$, então

$$\begin{aligned} -3tx^2 + \frac{dh}{dx} &= 2x - 3tx^2 \implies \frac{dh}{dx} = 2x \\ &\implies h(x) = x^2 + \text{cte.} \end{aligned}$$

Portanto,

$$F(t, x) = t^3 - tx^3 + x^2 + \text{cte.}$$

RESOLUÇÃO DO ITEM (g) DO EXERCÍCIO 2

Considere a mudança de variáveis

$$y = x^{-2}.$$

Portanto, como

$$y' = -2x^{-3}x',$$

a multiplicação de ambos os membros de

$$x' = 5x - 5tx^3$$

por $-2x^{-3}$ resulta em

$$-2x^{-3}x' = -10x^{-2} + 10t,$$

ou seja,

$$y' + 10y = 10t.$$

A multiplicação de ambos os membros da última igualdade pelo fator integrante

$$e^{\int 10dt} = e^{10t}$$

acarreta

$$\begin{aligned} y'e^{10t} + y10e^{10t} &= 10te^{10t} \implies \frac{d}{dt}(ye^{10t}) = 10te^{10t} \\ &\implies y = e^{-10t} \int 10te^{10t} dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, se

$$u = 10t \text{ e } dv = e^{10t} dt,$$

então

$$\begin{aligned} x^{-2} &= y \\ &= e^{-10t} \left(uv - \int vdu \right) \\ &= e^{-10t} \left(te^{10t} - \int e^{10t} dt \right) \\ &= e^{-10t} \left(te^{10t} - \frac{e^{10t}}{10} + \text{cte}_1 \right) \\ &= t - \frac{1}{10} + \frac{\text{cte}_1}{e^{10t}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x = \pm \sqrt{\frac{10e^{10t}}{e^{10t}(10t-1) + cte}}.$$

RESOLUÇÃO DO ITEM (i) DO EXERCÍCIO 2

Como

$$v = \frac{x}{t} \iff x = tv,$$

temos

$$x' = v + tv'$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x' &= 1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2 \implies tv' = 1 + v^2 \\ &\implies \int \frac{1}{1+v^2} dv = \int \frac{1}{t} dt \\ &\implies \arctan v = \ln |t| + cte \\ &\implies \frac{x}{t} = v = \tan(\ln |t| + cte). \end{aligned}$$

RESOLUÇÃO DO ITEM (k) DO EXERCÍCIO 2

Por (2.7), página 30, basta obtermos $x = x_h + x_p$, onde x_h é a solução geral de $x'' + 4x = 0$ e x_p é uma solução particular da *edo*

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= d \\ &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4; \\ d_1(t) &= 8t^2 - 20t + 8, \\ d_2(t) &= 5 \operatorname{sen} 3t - 5 \operatorname{cos} 3t, \\ d_3(t) &= 24e^{-2t}, \\ d_4(t) &= 8 \operatorname{cos} 2t. \end{aligned}$$

Por um lado, $r^2 + 4 = 0$ acarreta $r_{\pm} = 0 \pm 2i$, onde $i^2 = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} x_h &= e^{0 \cdot t} (cte_I \operatorname{cos} 2t + cte_{II} \operatorname{sen} 2t) \\ &= cte_I \operatorname{cos} 2t + cte_{II} \operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Por outro, a determinação de uma solução particular x_{p_i} de $x'' + 4x = d_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, resulta numa solução particular

$$x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3} + x_{p_4}$$

de $x'' + 4x = d$.⁷ Portanto:

⁷Verifique!

i = 1 Para A e B constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_1}(t) = At^2 + Bt + C &\implies x'_{p_1}(t) = 2At + B \\ &\implies x''_{p_1}(t) = 2A\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_1} + 4x_{p_1} = d_1 &\implies 4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = 8t^2 - 20t + 8 \\ &\implies A = 2, B = -5 \text{ e } C = 1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_1}(t) = 2t^2 - 5t + 1;$$

i = 2 Para D e E constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_2}(t) = D \cos 3t + E \sin 3t &\implies x'_{p_2}(t) = -3D \sin 3t + 3E \cos 3t \\ &\implies x''_{p_2}(t) = -9D \cos 3t - 9E \sin 3t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_2} + 4x_{p_2} = d_2 &\implies -5D \cos 3t - 5E \sin 3t = -5 \cos 3t + 5 \sin 3t \\ &\implies D = 1 \text{ e } E = -1.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_2}(t) = \cos 3t - \sin 3t.$$

i = 3 Para F constante,

$$\begin{aligned}x_{p_3}(t) = Fe^{-2t} &\implies x'_{p_3}(t) = -2Fe^{-2t} \\ &\implies x''_{p_3}(t) = 4Fe^{-2t}\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_3} + 4x_{p_3} = d_1 &\implies 8Fe^{-2t} = 24e^{-2t} \\ &\implies F = 3.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_{p_3}(t) = 3e^{-2t}.$$

i = 4 Para G e H constantes,

$$\begin{aligned}x_{p_4}(t) = G \cos 2t + H \sin 2t &\implies x'_{p_4}(t) = -2G \sin 2t + 2H \cos 2t \\ &\implies x''_{p_4}(t) = -4G \cos 2t - 4H \sin 2t\end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{aligned}x''_{p_4} + 4x_{p_4} &= 0 \\ &\neq d_4.\end{aligned}$$

Logo, como G e H não podem ser constantes, podemos considerar

$$x_{p_4}(t) = g(t) \cos 2t + h(t) \sin 2t,$$

onde g e h são funções a serem determinadas. Contudo, utilizaremos outro procedimento para obter x_{p_4} : a fórmula da variação de parâmetros da subseção 2.2.2. Assim, como

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2 \sin 2t & 2 \cos 2t \end{vmatrix} \\ &= 2(\cos^2 2t + \sin^2 2t) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= \cos 2t \int \frac{\sin 2t(-8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt + \sin 2t \int \frac{\cos 2t(8 \cos 2t)}{1 \cdot 2} dt \\ &= -4 \cos 2t \int \sin 2t \cos 2t dt + 4 \sin 2t \int \cos^2 2t dt. \end{aligned}$$

Então, para $u = 2t$,⁸

$$\begin{aligned} x_{p_4}(t) &= -2 \cos 2t \int \sin u \cos u du + 2 \sin 2t \int \cos^2 u du \\ &= -\cos 2t \int \sin 2u du + 2 \sin 2t \int \cos^2 u du \\ &= \cos 2t \left(\frac{\cos 2u}{2} \right) + 2 \sin 2t \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right) \\ &= \frac{\cos 2t \cos 4t}{2} + \sin 2t \left(2t + \frac{\sin 4t}{2} \right) \\ &= 2t \sin 2t + \frac{\cos 4t \cos 2t + \sin 4t \sin 2t}{2} \\ &= 2t \sin 2t + \frac{\cos 2t}{2}. \end{aligned}$$

Note que, no cálculo de x_{p_4} , após a mudança de variáveis, utilizamos a fórmula do “seno da soma” (respectivamente, “cosseno da diferença”) na segunda (respectivamente, última) igualdade, de cima para baixo. Além disso, como

$$\begin{aligned} x'_{p_4}(t) &= 2 \sin 2t + 4t \cos 2t - \sin 2t \\ &= \sin 2t + 4t \cos 2t, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} x''_{p_4}(t) &= 2 \cos 2t + 4 \cos 2t - 8t \sin 2t \\ &= 6 \cos 2t - 8t \sin 2t \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x''_{p_4} + 4x_{p_4} = d_4.$$

⁸Logo, $dt = \frac{1}{2} du$.

3. Quais das seguintes séries convergem/divergem? Justifique suas respostas e apresente os domínios e raios de convergência para as séries de potências convergentes.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n};$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1};$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^3+3n}{7n^3-2n^2+n};$

RESPOSTA: A série diverge.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!};$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n};$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n};$

(o) $\sum_{n=0}^{\infty} t^n;$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nt}{2^n};$

(q) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n(t-2)^n;$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t+1)^n}{n2^n}.$

(s) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n)!(t-2)^n.$

4. Utilizando a série geométrica, obtenha representações em série de funções e I para:

(a) $g(t) = \frac{1}{1+t^3};$

(b) $h(t) = \frac{2t^3}{1+t^3};$

(c) $\varphi(t) = \frac{t}{5-t};$

(d) $\phi(t) = \frac{t^2}{t-5};$

(e) $x(t) = \frac{1}{(1-t)^2};$

(f) $y(t) = \frac{2}{(1-t)^3}.$ ⁹ RESPOSTA: $y(t) = 2 + 6t + 12t^2 + \dots$ para cada $t \in I = (-1, 1)$.

5. Verifique a analiticidade de $f(t)$ em $I = (-R, R)$ escrevendo a série de Maclaurin de f em I se:

(a) $f(t) = \frac{1}{1-t}, R = 1;$

(b) $f(t) = e^t, R = \infty;$

(c) $f(t) = \ln(1+t), R = 1;$

(d) $f(t) = \text{sen } t, R = \infty;$

(e) $f(t) = \text{cos } t, R = \infty.$

6. Resolva as *edos* seguintes via séries de Taylor em torno de zero.

(a) $x' - x = 0.$

(b) $x' = t^2x.$

(c) $x'' + x = 0.$

(d) $x'' - tx = 0.$

(e) $x'' - t^2x = 0.$

(f) $(t^2 + 1)x'' - 4tx' + 6x = 0.$

(g) $\begin{cases} (t^2 + 1)x'' + tx' - x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x'' - 2tx' + x = 0; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases}$

7. Nos itens seguintes, dada uma função na variável t , obtenha a sua TL na variável s e, reciprocamente, dada uma função na variável s , determine a sua TLI na variável t .

(a) $p(t) = -t^4 + 2t^3 + t - 7.$

(b) $F(s) = \frac{s+3}{s(s-1)(s+2)}.$

(c) $G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-8}.$

(d) $X(s) = \frac{s^2}{(s+3)^3}.$

⁹Note que $\frac{dx}{dt} = y$.

(e) $Y(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s+5}$.

(f) $S(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 3; \\ \text{sen } t, & \text{se } t \geq 3. \end{cases}$

(g) $A(s) = \frac{e^{-7s}}{(s-3)^3}$.

(h) $x(t) = \text{sen}^2 t$.

(i) $g(t) = t \cos t$.

(j) $h(t) = t^2 \cos(3t)$.

(k) $H(s) = \frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$.

8. Resolva, usando uma tabela de transformadas de Laplace, os sistemas seguintes:

(a) Sistema massa-mola com forçamento horizontal $f(t)$, massa m e constante de Hooke k :

$$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} y'' - 6y' + 15y = 2 \text{sen } 3t; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'' + 3ty' - 6y = 2; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1); \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = 2x + y; & x(0) = 1; \\ y' = 3x + 4y; & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = 3x - 3y + 2; & x(0) = 1; \\ y' = -6x - t; & y(0) = -1. \end{cases}$$

Parte II

Introdução à dinâmica climática qualitativa

Capítulo 6

Matemática e clima

Nesse capítulo, começaremos a relacionar as *edos* com a *modelagem climática*.¹

6.1 Climatologia

É o ramo das *ciências atmosféricas* que lida com padrões de tempo (*weather*), as mudanças desses padrões ao longo do tempo (*time*) e os efeitos dessas mudanças no nosso planeta.² Esse ramo científico é fundamental para o entendimento dos fatores que influenciam o clima terrestre, tais como: a rotação do nosso planeta, a quantidade de radiação solar que atinge a Terra, a distribuição de terra e água, etc. Atualmente, a climatologia é imprescindível na previsão de mudanças climáticas e nos potenciais impactos dessas mudanças e, para melhor entendê-las, algumas disciplinas científicas aplicadas são essenciais, tais como:

- *Ciências atmosféricas*. Especialistas dessa área estudam a composição, a química e a física da atmosfera, que são reguladores críticos da temperatura terrestre, para modelarem a concentração dos gases do *efeito estufa* e os padrões da circulação atmosférica e, assim, obterem projeções de como a atmosfera poderá reagir às mudanças climáticas;
- *Oceanografia*. Nossos oceanos desempenham um papel importante na absorção de calor e dióxido de carbono. Os oceanógrafos estudam os padrões das correntes oceânicas, dos níveis de salinidade e do estado dos ecossistemas marinhos para entenderem como os oceanos estão reagindo às mudanças climáticas;
- *Glaciologia*. Os glaciologistas estudam as geleiras, as placas de gelo oceânicas, os icebergs, etc., fundamentais na análise dos dados relativos ao clima terrestre no passado remoto. Analizando longos tubos de gelo, eles conseguem reconstruir variações de temperatura que cobrem um período de milhares de anos;
- *Modelagem climática*. Modelos climáticos são simulações computacionais/numéricas que mimetizam o sistema climático terrestre. Esses modelos são utilizados como possíveis/prováveis projeções das mudanças climáticas futuras sob diferentes cenários.

¹Seguiremos (de pertíssimo) o excelente livro [Kaper e Engler (2013)]. Para um “manual de sobrevivência” do livro supracitado, confira [Barbosa (2023)].

²A propósito, doravante, os “tempos” supracitados estarão acompanhados das letras *w* e *t*, dependendo de suas traduções na língua inglesa. Além disso, o tempo (*w*) pode ser definido como o estado das condições meteorológicas/atmosféricas locais de curta duração, ou seja, num período de alguns dias ou algumas semanas. Por outro lado, o *clima* pode ser definido como a média temporal (*t*) de longa duração (meses, semestres, anos, décadas, séculos, milênios, etc.) do clima, para grandes regiões da Terra.

Portanto, métodos quantitativos e qualitativos das ciências básicas (química, física, computação, estatística e matemática) podem ser utilizados no estudo do clima, pois elas representam o “idioma” no qual as disciplinas aplicadas supracitadas são escritas.

OBSERVAÇÕES

- A principal característica do *sistema climático terrestre (sct)* é a sua altíssima complexidade. De fato, esse sistema é particionado e fortemente influenciado por essas partes, tais como:
 - Hidrosfera;³
 - Criosfera;⁴
 - Litosfera;⁵
 - Biosfera;⁶
 - Atmosfera;⁷
 - Radiação solar;⁸
 - Forçamentos (*forcings*);⁹
 - Retroalimentação sistêmica;¹⁰
 - Interdependência das partes supracitadas.
- Usaremos modelos qualitativos conceituais que reduzem consideravelmente a complexidade supracitada e, mesmo assim, ilustram aspectos importantes do *sct*. Além disso, apresentaremos algumas técnicas matemáticas na análise desses modelos.
- O único modo de estudarmos o *sct* é via modelos matemáticos, experimentos numéricos e análise de dados. Experimentos físicos controlados (e sem riscos para o planeta), na escala temporal (t) adequada para a eficácia do modelo, estão fora de questão.
- Um modelo matemático, por mais complexo que ele seja, sempre é uma aproximação grosseira da realidade. O importante é que o modelo produza informações úteis para o entendimento do fenômeno modelado.

Exemplo

No modelo do pêndulo simples,¹¹ ainda que não tenhamos considerado o atrito no pivô da haste (ponto onde a haste está pendurada), a resistência do ar e a massa do pêndulo (haste + corpo esférico na extremidade da haste), pudemos calcular o período, fundamental para os relógios mecânicos.

³Parte da Terra relacionada com a água.

⁴Parte da Terra relacionada com a água em estado de congelamento.

⁵Parte da Terra relacionada com a terra.

⁶Relacionada com os animais e vegetais do planeta.

⁷Região entre a superfície do planeta e o vácuo espacial.

⁸Energia eletromagnética irradiada pelo Sol.

⁹Fatores externos naturais (como as variações cíclicas da órbita da Terra em torno do Sol, erupções vulcânicas, variações na atividade solar, etc.) e antropogênicos, ou seja, induzidos pelo homem (como a composição atmosférica, uso da terra, etc.).

¹⁰Causada pelos efeitos da variabilidade do próprio sistema.

¹¹Cf. p. 29.

6.2 Modelo de equilíbrio/balanço energético terrestre (*meet*)

O *meet* será representado por uma *edo* de primeira ordem

$$F\left(t, T, \frac{dT}{dt}\right),$$

onde F é uma relação funcional entre o tempo (t), a temperatura média global da superfície terrestre (T) e a sua derivada temporal (dT/dt). Como veremos, dT/dt será proporcional à diferença energética $E_{in} - E_{out}$, onde E_{in} é proporcional à S_0 , que é a radiação solar média, incidente na Terra, por metro quadrado (m^2), por unidade de tempo (t), sendo aproximadamente 1368 W/m^2 (*watts* por m^2), e E_{out} representa a energia térmica (*calor*) média(o), emitida(o) pela Terra, por m^2 , por unidade de tempo, conforme ilustramos nas figuras 6.1 e 6.2.

Figura 6.1: Energia eletromagnética incidente na Terra (E_{in})

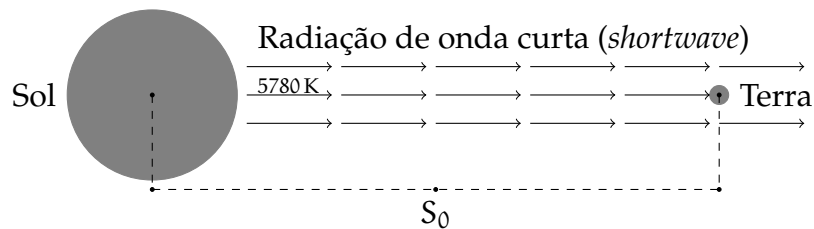
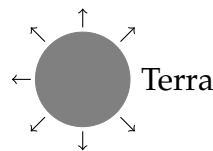


Figura 6.2: Energia térmica emitida pela Terra (E_{out})

Radiação de onda longa (*longwave*)



Nesse modelo, conforme veremos, T aumenta quando $E_{in} > E_{out}$, diminui quando $E_{in} < E_{out}$ e, como não poderia ser diferente, está em equilíbrio energético quando $E_{in} - E_{out} = 0$. Além disso, faremos algumas aproximações razoáveis, outras grosseiras, ao considerarmos as “hipóteses” seguintes:

- A temperatura na superfície do Sol é de aproximadamente 5780° K (*graus Kelvin*);
- Para podermos relacionar E_{in} e S_0 , a órbita da Terra ao redor do Sol, nesse modelo, é aproximadamente circular;¹²
- No *meet*, a Terra é aproximadamente esférica e sólida, com área aproximada dada por $A_{esf} = 4\pi R^2$, onde R é o seu raio aproximado;
- Devido à distância orbital (de aproximadamente 149,6 milhões de quilômetros) e aos seus tamanhos relativos, a radiação solar atinge à Terra, perpendicularmente, como se ela fosse um disco de área $A_{dis} = \pi R^2$;

¹²A órbita supracitada é, de fato, aproximadamente elíptica não circular!

- Diferenças na composição atmosférica terrestre serão ignoradas;
- Diferenças topográficas, oceânicas, continentais, locais, de insolação,¹³ etc., serão ignoradas;
- A energia necessária, medida em watt – ano/m²K,¹⁴ para aumentar T em 1^oK, é constante e igual à C, o seu valor médio. Essa energia é conhecida como *capacidade de calor* (*heat capacity*) do sistema.

Assim, como $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$, a capacidade de calor para que a temperatura média da Terra atinja o valor $T(t + \Delta t)$ é dada por

$$A_{\text{esf}} C \Delta T.$$

Portanto, como o Sol é a única fonte de energia nesse modelo,

$$A_{\text{esf}} C \Delta T = A_{\text{esf}} (E_{\text{in}} - E_{\text{out}}) \Delta t.$$

Consequentemente, para Δt arbitrariamente próximo de zero, podemos considerar

$$C \frac{dT}{dt} = E_{\text{in}} - E_{\text{out}}. \quad (6.1)$$

OBSERVAÇÕES

- Caso exista forçamento, (6.1) é uma *edo não autônoma*, isto é, dependente do tempo (t), pois $E_{\text{in}} = E_{\text{in}}(t)$ e $E_{\text{out}} = E_{\text{out}}(t)$. Por outro lado, sem forçamento, essa dependência existe mas é indireta, pois, claramente, $T(t)$ depende de E_{in} e E_{out} .
- A dinâmica do *meet* depende das especificidades de E_{in} e E_{out} .

6.2.1 *meet* básico

Caso $Q = \frac{S_0}{4}$ e α seja o *albedo* (médio) da Terra,¹⁵ considere

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= \frac{(1 - \alpha) A_{\text{dis}} S_0}{A_{\text{esf}}} \\ &= \frac{(1 - \alpha) (\pi R^2) S_0}{4\pi R^2} \\ &= (1 - \alpha) Q. \end{aligned}$$

Além disso, pela *lei de Stefan-Boltzmann* para a *radiação do corpo negro*, considere

$$E_{\text{out}}(T) = \sigma T^4,$$

¹³É o fluxo de energia eletromagnética por unidade de área e varia com a latitude, hora do dia, estação do ano e nebulosidade, tendendo à zero durante a noite e sendo igual à S_0 quando a Terra está numa distância média do Sol.

¹⁴Por conveniência, nesse livro, o uso da notação de grau é facultativo.

¹⁵Ou seja, a fração da energia eletromagnética não interceptada pela Terra, via reflexão, devido às nuvens, à composição atmosférica (aerossóis, por exemplo), ao gelo ou neve, etc.

onde $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2\text{K}^4$.¹⁶ Logo, para obtermos a temperatura $T = T^*$ no equilíbrio energético, como

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha)Q - \sigma T^4, \quad (6.2)$$

temos

$$(1 - \alpha)Q = \sigma T^4,$$

ou seja,

$$T^* = \left[\frac{(1 - \alpha)Q}{\sigma} \right]^{1/4}.$$

Como $S_0 \approx 1368 \text{W/m}^2$, isto é, $Q \approx 342 \text{W/m}^2$, e $\alpha \approx 0,30$,¹⁸ obtemos

$$T^* \approx 254,9^\circ \text{K} \approx -18,3^\circ \text{C}. \quad (6.3)$$

Contudo, o valor médio para a temperatura da superfície da Terra é, aproximadamente,

$$288^\circ \text{K} \approx 14,5^\circ \text{C}. \quad (6.3)$$

Para tentarmos corrigir essa discrepância térmica, vamos ajustar a energia E_{out} do *meet* básico.

6.2.2 *meet* com efeito estufa

Denotemos por λ o comprimento de onda do espectro eletromagnético da energia irradiada. Aproximadamente, 9 por cento de E_{in} é irradiada na baixíssima frequência da luz ultravioleta, com $\lambda < 0,4 \mu\text{m}$ (micrometros), 38 por cento na baixa frequência da “luz visível”, com $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda < 0,7 \mu\text{m}$, e 53 por cento próximo da frequência da luz infravermelha, com $0,7 \mu\text{m} \leq \lambda < 4 \mu\text{m}$. Por outro lado, E_{out} é irradiada na alta frequência da luz infravermelha, com $\lambda > 5 \mu\text{m}$.

Devido as suas propriedades químicas, os gases do efeito estufa (dióxido de carbono, vapor d’água, metano e aerossóis) deixam a atmosfera mais opaca para E_{out} e menos opaca para E_{in} . Logo, para tentarmos manter o equilíbrio energético, vamos parametrizar E_{out} com um percentual $0 < \varepsilon < 1$, ou seja,

$$E_{\text{out}} = \varepsilon \sigma T^4. \quad (6.4)$$

Conseqüentemente, no equilíbrio energético,

$$(1 - \alpha)Q = \varepsilon \sigma T^4,$$

isto é,

$$T^* = \left[\frac{(1 - \alpha)Q}{\varepsilon \sigma} \right]^{1/4}. \quad (6.5)$$

¹⁶Esse tipo de radiação depende apenas da temperatura do objeto que a está emitindo, após ter absorvido toda a radiação solar nele incidindo. Embora isso seja uma idealização, podemos considerar alguns objetos que emitem radiação numa frequência próxima a de um “corpo negro”. Por exemplo, numa lareira, quando a madeira queimada, após um tempo, já passou até do estado de brasa, mas ainda está emitindo calor, essa emissão é semelhante à da radiação supracitada. A propósito, a radiação emitida por aparelhos de micro-ondas também é do tipo supracitado.

¹⁷Cf. (6.1).

¹⁸Cf. <https://earthobservatory.nasa.gov/images/84499/measuring-earths-albedo>.

¹⁹Graus Celcius.

²⁰Cf. <https://science.nasa.gov/solar-system/temperatures-across-our-solar-system>.

Assim, para $\varepsilon = 0,614$ e os valores de α , Q e σ dados na subseção 6.2.1, temos

$$T^* \approx 288 \text{ K.}$$

6.2.3 *meet* com múltiplos pontos de equilíbrio

Em geral, o albedo terrestre depende da temperatura, ou seja, $\alpha = \alpha(T)$. De fato, caso T seja suficientemente baixa, uma grande parte de E_{in} é refletida pela Terra, devido à uma espessa cobertura de gelo e neve. Nesse caso, $\alpha = 0,3$ fixo (como nos modelos 6.2.1 e 6.2.2) não seria adequado. Por exemplo, caso a temperatura média global fique abaixo de 250 K ,²¹ que é muito abaixo da temperatura média atual de (aproximadamente) 288 K ,²² a Terra estaria num processo de congelamento, tendendo à um mundo conhecido como *snowball earth*, onde:

- A maior parte dos oceanos congelaria, possivelmente, até muitos quilômetros abaixo do nível do mar, com implicações catastróficas para a vida marinha e os padrões de tempo (w);
- As geleiras e as calotas polares sofreriam uma grande expansão, que cobriria grandes regiões da Terra, como a América do Norte e a Eurásia;
- A atmosfera seria reduzida a uma fina camada, pois muitos gases, principalmente o vapor d'água, condensariam e congelariam. Isso reduziria o efeito estufa e esfriaria o planeta.

Assim, vamos incluir nos modelos supracitados a possibilidade desse esfriamento terrestre ocorrer via

$$\alpha(T) \approx \begin{cases} 0,7 & \text{se } T < 250 \text{ K,} \\ 0,3 & \text{se } T > 280 \text{ K.} \end{cases}$$

Além disso, caso

$$E_{\text{in}} = (1 - \alpha(T))Q \tag{6.6}$$

tenha um crescimento suave (diferenciável) e um comportamento assintótico em altíssimas ou baixíssimas temperaturas,²³ podemos considerar um modelo em que E_{in} represente uma dinâmica similar a da figura 6.3.²⁴ O modelo supracitado é obtido via, por exemplo,²⁵

$$\alpha(T) = 0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right). \tag{26}$$

²¹Ou seja, abaixo de $-23^\circ \text{ C} \approx -11^\circ \text{ F}$ (*graus Fahrenheit*).

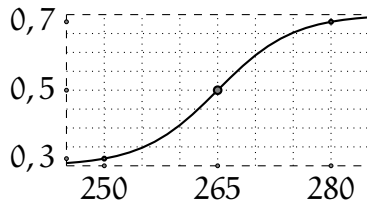
²²Ou seja, muito abaixo de $15^\circ \text{ C} \approx 59^\circ \text{ F}$.

²³Nosso sistema solar tem mantido uma dinâmica estruturalmente estável por bilhões de anos. Estudos indicam que, em alguns bilhões de anos, na etapa final do seu processo evolutivo, o Sol será uma *anã branca*. Antes de atingir essa etapa, o raio do Sol aumentará, ultrapassando a distância solar da Terra. Pela estabilidade estrutural supracitada, ainda temos alguns bilhões de anos antes da Terra ser carbonizada. Até lá, tudo indica que aumentos de temperatura serão assintóticos. Analogamente, qualquer eventual esfriamento também será assintótico.

²⁴Note o ponto de inflexão no centro dessa figura.

²⁵Poderíamos ter utilizado a função arctan, convenientemente transladada, rotacionada e submetida a uma mudança de coordenadas que otimize a comparação entre as escalas dos eixos.

²⁶A divisão por 10 permite uma melhor comparação entre as escalas dos eixos!

Figura 6.3: $T \times 1 - \alpha(T)$, T em graus Kelvin

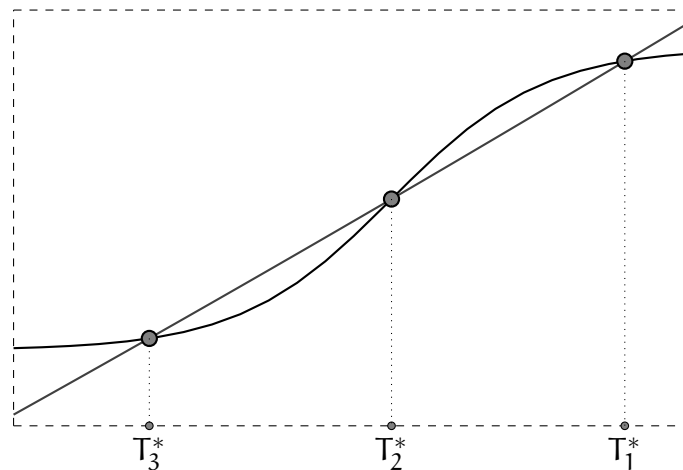
Consequentemente, substituindo (6.4) e (6.6) em (6.1),²⁷ o equilíbrio é atingido para T satisfazendo a equação

$$(1 - \alpha(T))Q = \varepsilon\sigma T^4,$$

que não tem solução analítica. Contudo, para $\varepsilon = 0,6$ e os valores de Q e σ dados na subseção 6.2.1, as soluções numéricas da equação supracitada são dadas pelas temperaturas

$$T_1^* \approx 288 \text{ K}, T_2^* \approx 265 \text{ K (o ponto de inflexão supracitado)} \text{ e } T_3^* \approx 233 \text{ K},$$

obtidas pelas interseções dos gráficos de $E_{in}(T)$ e $E_{out}(T)$ conforme a figura 6.4.

Figura 6.4: $E_{in}(T)$, $E_{out}(T)$ (em cinza) e temperaturas de equilíbrio

Ponto de equilíbrio estável/instável

Vimos que a temperatura média da Terra, por milênios, tem se mantido próxima de T_1^* .²⁸ Portanto, T_1^* é um *ponto de equilíbrio estável*. Analisaremos (matematicamente) o tipo de *estabilidade* do ponto T_i^* , onde $i \in \{1, 2, 3\}$,²⁹ pelo sinal do segundo membro de (6.1),³⁰ para pontos T suficientemente próximos de T_i^* , ou seja, onde $|T - T_i^*|$ seja suficientemente pequeno. Note que, para os pontos supracitados, se $i \in \{1, 3\}$ e $T < T_i^*$ (respectivamente,

²⁷Cf. pp. 110, 111 e 112.

²⁸Cf. (6.3), p. 111.

²⁹Esse conceito de estabilidade será definido formalmente num contexto mais geral.

³⁰Cf. p. 110

$T > T_i^*$), então o segundo membro supracitado é positivo (respectivamente, negativo), ou seja, dT/dt é positiva (respectivamente, negativa). Assim, como T é crescente (respectivamente, decrescente) até T_i^* , dizemos que T_i^* é *assintoticamente estável*. Por outro lado, para T próximo de T_2^* tal que $T < T_2^*$ (respectivamente, $T > T_2^*$), o segundo membro supracitado é negativo (respectivamente, positivo), isto é, dT/dt é negativa (respectivamente, positiva). Assim, como T é decrescente (respectivamente, crescente) a partir de T_i^* , dizemos que T_i^* é *instável*.

Antes de continuarmos a análise desses pontos, consideraremos um modelo mais preciso e próximo da realidade, que descreve a mesma dinâmica do modelo dessa subseção, via uma aproximação linear de E_{out} .

6.2.4 *meet de Budiko*

Diferentemente da subseção 6.2.3, a fórmula da energia térmica liberada pela Terra, aqui, é dada por

$$E_{out} = A + BT,$$

onde A e B são obtidos por *regressão linear* sobre dados de satélites. Os valores do melhor ajustamento para o clima atual (obtido no final da década de 70) são dados por

$$A \approx 203,3 \text{ W/m}^2 \text{ e } B \approx 2,092 \text{ W/m}^2\text{grau(Celcius)},^{31}$$

que na equação

$$(1 - \alpha(T))Q = A + BT$$

acarretam um gráfico e três pontos (temperaturas) de equilíbrio aproximadamente iguais aos (às) da figura 6.4 (no enquadramento dado).

Em relação as temperaturas de equilíbrio supracitadas, $T_1^* - T_3^*$ fica em torno de 55 K, T_1^* representa a temperatura “atual” (da Terra), ou seja, bem acima da temperatura de congelamento da água,³² e T_3^* representa a temperatura da *snowball earth*, ou seja, muito abaixo da temperatura de congelamento dos oceanos, conforme destacamos no início da subseção 6.2.3.³³ Consequentemente, tendo ocorrido a *snowball earth*, cabem três perguntas:

1. O que causou a transição para esse estado (de congelamento)?
2. O que causou a saída desse estado?
3. Na dinâmica de T_3^* para T_1^* , T_2^* foi atingida?

Respostas razoáveis para as essas perguntas são dadas em [Kaper e Engler (2013)], seções 2.7 e 2.8. Em particular, caso o nosso modelo mimetize a evolução temporal (t) do clima terrestre, a resposta matemática (pela *teoria das bifurcações*) para a pergunta 3 é a seguinte: o ponto instável (T_2^*) não foi atingido!

³¹ À guisa de comparação, caso aproximemos linearmente E_{out} da subseção 6.2.3, A e B ficam distantes dos valores supracitados. (Cf. [Kaper e Engler (2013)].)

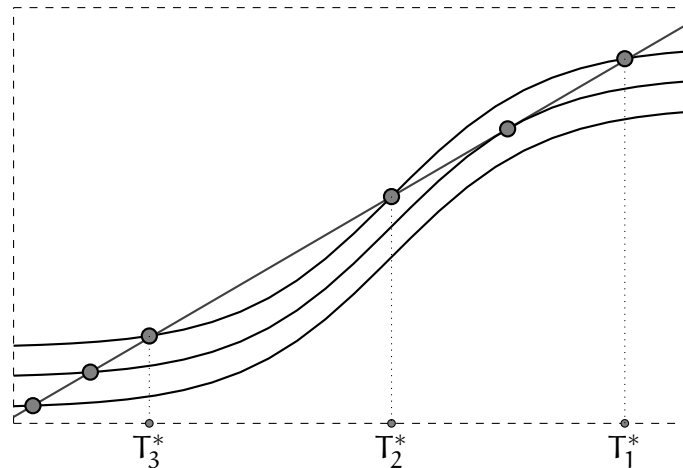
³² Como a escala de t engloba milhões de anos, todas as recentes “eras do gelo” (períodos glaciais), ocorreram para T próxima de T_1^* . (Cf. [Kaper e Engler (2013)])

³³ Existem fortes evidências que T esteve próxima de T_3^* durante a era *neoproterozóica*, entre 750 e 580 milhões de anos atrás. (Cf. [Kaper e Engler (2013)]).

6.2.5 Introduzindo bifurcações

O que ocorre com T_i^* , $i = 1, 2, 3$, quando o parâmetro $Q = S_0/4$ varia?³⁴

Figura 6.5: E_{in} e T_i^* , $i = 1, 2, 3$, variando



Caso S_0 seja decrescente, T_2^* e T_1^* se aproximam e, instantaneamente após se sobreporem, desaparecem, sobrando apenas T_3^* , conforme a figura 6.5. Analogamente, caso S_0 seja crescente, T_3^* e T_2^* se aproximam, se sobrepõem e, então, desaparecem, sobrando apenas T_1^* . Conseqüentemente, a variação de S_0 acarreta uma mudança qualitativa na dinâmica do sistema, pois, de três pontos de equilíbrio, o sistema passa a ter dois e, imediatamente depois, apenas um. Como definiremos posteriormente, quando uma pequena variação num parâmetro altera a dinâmica de um sistema, diremos que uma *bifurcação* ocorre.

6.3 Oceanos e clima

Os oceanos mantêm o equilíbrio energético terrestre e auxiliam no ciclo de carbono,³⁵ transportando energia ao redor da Terra via circulação oceânica (correntes marinhas), em consequência de diferenças de densidade acarretadas por variações de salinidade e temperatura (*circulação termohalina/termosalina (cth)* ou *cinto de transmissão oceânico (oceanic conveyor belt)*),³⁶ numa escala de tempo (t) de décadas.

³⁴No início da seção 6.2, o valor de S_0 está fixado. Nessa subseção, considere S_0 variável.

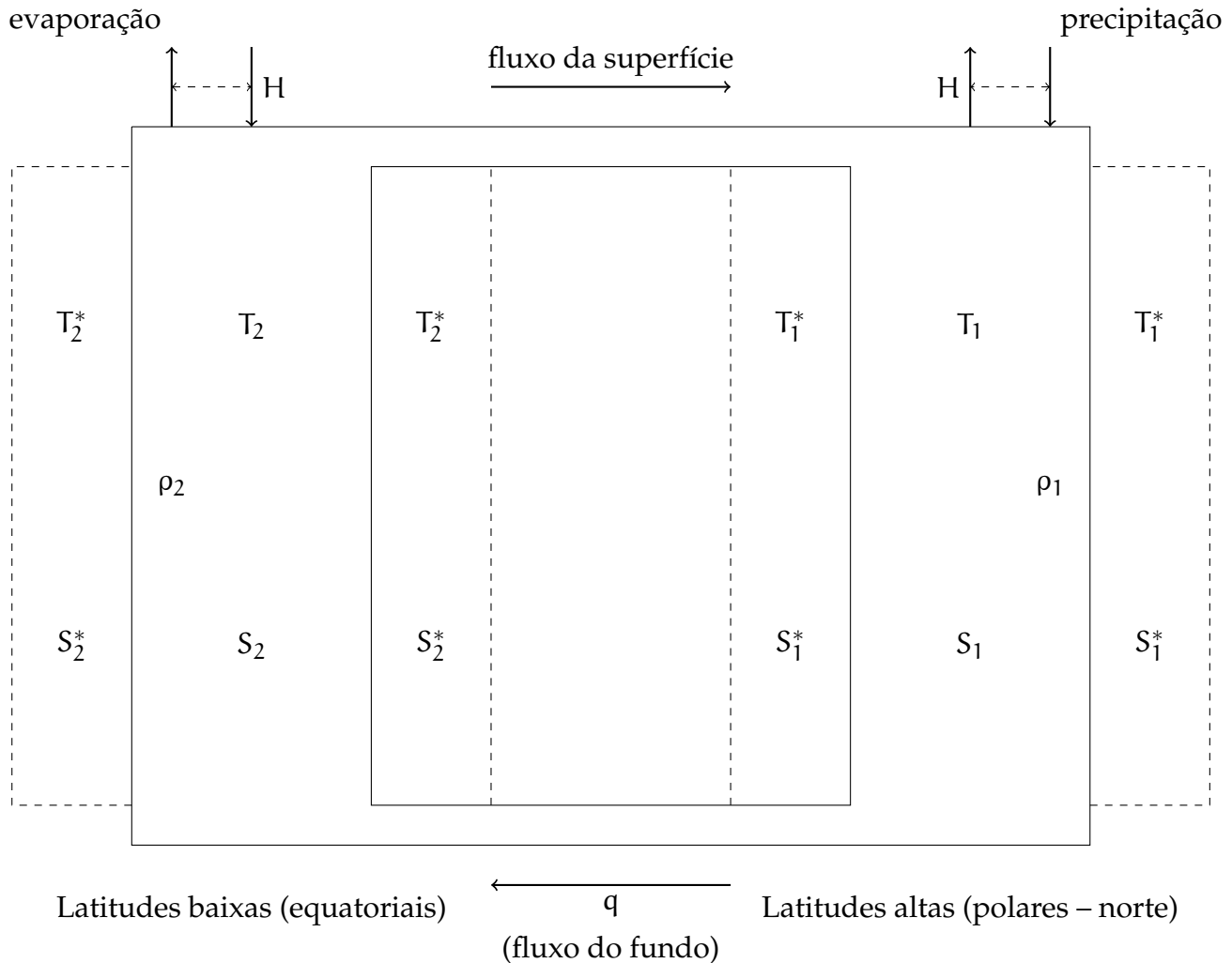
³⁵Cf. <https://www.noaa.gov/education/resource-collections/climate/carbon-cycle>.

³⁶A *cth* funciona da seguinte maneira:

- Água salgada aquecida dos trópicos flui para o norte, ao longo da camada superficial do Atlântico Norte;
- Essa massa de água resfria, no percurso para o Ártico, tornando-se mais densa, em consequência de temperaturas mais baixas e salinidade crescente, devido à formação de gelo marinho (pelo congelamento da água do mar na superfície oceânica);
- A massa de água mais densa afunda, gerando uma corrente no fundo do oceano que flui para o sul;
- A massa de água do fundo oceânico, ao passar pelo oceano Antártico, é misturada com águas mornas e retorna para a camada superficial do oceano;

6.3.1 2-box model (modelo de duas caixas) para a *cth* do Atlântico Norte

Figura 6.6: 2-box model



O Atlântico Norte representa a parte do (oceano) Atlântico delimitada pela Linha do Equador e pelo Ártico.³⁷ A hipótese principal, embora grosseira, do modelo (supracitado) é que o Atlântico Norte é um grande reservatório de água salgada circulando, devido às diferenças

· A massa de água superficial retorna para os trópicos, completando uma volta da *cth*.

(A propósito, em relação à profundidade oceânica, grosso modo, existem três camadas: uma pequena camada superficial (*mixed layer*), com temperatura aproximadamente constante, uma camada intermediária um pouco maior (*thermocline*), com temperatura variável e diminuindo em função da profundidade, e uma enorme camada final (*deep cold water*), com temperatura aproximadamente constante.)

Com o aquecimento global e o derretimento das calotas polares, a concentração de sal diminui. Isso pode interromper a *cth*. Existem fortes evidências paleoclimáticas de que variações ou colapsos da *cth* coincidiram com grandes variações climáticas. (Cf. [Kaper e Engler (2013)].)

³⁷Em um estudo recente, publicado pela revista *Nature*, intitulado *North Atlantic-Pacific salinity contrast enhanced by wind and ocean warming* (<https://www.nature.com/articles/s41558-024-02033-y>), consta uma estimativa de 6 por cento de aumento na salinidade do Atlântico em relação ao Pacífico.

da densidade

$$\rho = \rho(T, S)$$

em função da temperatura e da salinidade

$$T = T(t) \text{ e } S = S(t),$$

ambas em função do tempo (t), conforme a figura 6.6. As outras hipóteses (grosseiras) que assumiremos são as seguintes:

- H representa uma compensação (ad hoc) salina, devido à evaporação nos trópicos e à precipitação nos polos;³⁸
- Temperaturas e salinidades das fronteiras do Atlântico Norte (e.g., outros oceanos, atmosfera e continentes) são denotadas por T_i^* e S_i^* , $i = 1, 2$, e consideradas constantes;³⁹
- A *cth* é mantida apenas pela variação de ρ , em consequência de diferenças de pressão no fundo, criando um *fluxo de arrasto* (de uma caixa para a outra) de intensidade q ;⁴⁰
- Como q é proporcional à diferença das densidades, temos

$$q = \kappa \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}, \quad (6.7)$$

onde $\rho_0 = \rho(T_0, S_0)$, para valores médios T_0 e S_0 , e κ é uma parametrização de várias condições do fluxo,⁴¹ denominada *constante hidráulica* e com valor típico

$$\kappa \approx 1,5 \times 10^{-6} / s,^{42}$$

- Por convenção, o “sentido horário” para a *cth* da figura 6.6 é uma representação do caso $q > 0$, ocorrendo quando há densidades mais altas em latitudes mais altas.⁴³
- Podemos considerar a seguinte *aproximação de Taylor de primeira ordem* para $\rho(T, S)$ em torno dos valores médios T_0 e S_0 :⁴⁴

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0) + \beta (S - S_0)), \quad (6.8)$$

onde α é o *coeficiente de contração térmica* e β é o *coeficiente de expansão salina*, com valores típicos dados por

$$\alpha \approx 1,5 \times 10^{-4} / \text{grau} \text{ e } \beta \approx 8 \times 10^{-4} / \text{psu}.^{45}$$

Portanto, ao substituírmos (6.8) em (6.7), temos

$$q = \kappa (\alpha (T_2 - T_1) - \beta (S_2 - S_1)).^{46} \quad (6.9)$$

Pelas *leis de conservação de massa e energia para sistemas isolados*,⁴⁷ o modelo dessa subseção

³⁸Inicialmente, queremos um sistema isolado, para aplicarmos as *leis de conservação de massa e energia*, no caso, térmica.

³⁹Idem!

⁴⁰Outros efeitos, tais como, ventos, *coriolis*, etc., são desconsiderados.

⁴¹Atrito no fundo, mistura na superfície devido à turbulência causada por ventanias, etc.

⁴²Note que q e κ têm mesma dimensão, pois $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}$ é adimensional.

⁴³O sentido anti-horário, ou seja, o caso $q < 0$, pode ocorrer no modelo. De fato, confira a equação (6.10).

⁴⁴Confira o meu livro [Barbosa (2024)], disponibilizado *online*, gratuitamente, na página de acesso livre da editora da UFPR.

⁴⁵ α (resp., β) é precedido pelo sinal $-$ (resp., $+$), pois, quando T (resp., S) aumenta (resp., diminui), a água expande (resp., contrai) e fica menos (resp., mais) densa, ou seja, ρ diminui (resp., aumenta).

⁴⁶O sinal $-$ entre a variação térmica e a variação salina é indicativo de que T e S têm efeitos opostos na *cth*.

⁴⁷Cf. [Kaper e Engler (2013)].

(6.3.1) é dado pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q|(T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q|(T_1 - T_2), \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + d(S_1^* - S_1) + |q|(S_2 - S_1), \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_2^* - S_2) + |q|(S_1 - S_2),\end{aligned}\tag{6.10}$$

onde c e d são constantes características para a escala de tempo (t) considerada e q é dada por (6.9).⁴⁸

Em busca das soluções de equilíbrio

Caso T_0 e S_0 sejam as médias das temperaturas e salinidades nas caixas 1 e 2, isto é,

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad \text{e} \quad S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2),\tag{6.11}$$

temos o sistema

$$\begin{aligned}\frac{dT_0}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dT_1}{dt} + \frac{dT_2}{dt} \right) \\ &= c(T_0^* - T_0), \\ \frac{dS_0}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} \right) \\ &= d(S_0^* - S_0),\end{aligned}\tag{6.12}$$

por (6.10). Consequentemente, como

$$T_0 = e^{-ct} \quad \text{e} \quad S_0 = e^{-dt}$$

são soluções das equações homogêneas

$$\frac{dT_0}{dt} = -cT_0 \quad \text{e} \quad \frac{dS_0}{dt} = -dS_0,$$

respectivamente, e

$$T_0 = T_0^* \quad \text{e} \quad S_0 = S_0^*$$

são soluções particulares das equações não homogêneas do sistema (6.12), respectivamente, temos duas soluções para as equações de (6.12) dadas por

$$T_0 = e^{-ct} + T_0^* \quad \text{e} \quad S_0 = e^{-dt} + S_0^*,$$

respectivamente.⁴⁹ Logo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_0 = T_0^* \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S_0 = S_0^*.\tag{6.13}$$

⁴⁸Cada *edo* de (6.10) é não linear, pelas multiplicações por $|q|$. Por outro lado, os termos lineares de (6.10) são remanescentes do sistema (4.11) da página 90. De fato, em [Stommel (1961)], a vindoura versão (6.17) do modelo (6.10), com $H = 0$, é construída a partir do modelo (4.11).

⁴⁹Confira a seção 1.1.

Em outras palavras, quando $t \rightarrow \infty$, as médias entre as temperaturas (resp., salinidades) das caixas (que representam o oceano no modelo supracitado) convergem para as médias entre as temperaturas (resp., salinidades) de suas fronteiras. Portanto, como T_0^* e S_0^* são valores de referência (no modelo supracitado), podemos denotar

$$\bar{T}_i := T_i - T_0^* \text{ e } \bar{S}_i := S_i - S_0^*, \quad i = 1, 2, \quad (6.14)$$

ditas *anomalias* de temperatura e salinidade, que acarretam as seguintes expressões:

$$A_1. \quad T_2 - T_1 = \bar{T}_2 - \bar{T}_1 \text{ e } S_2 - S_1 = \bar{S}_2 - \bar{S}_1;$$

$$A_2. \quad T_1^* - T_1 = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_1 \text{ e } T_2^* - T_2 = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - \bar{T}_2;^{50}$$

$$A_3. \quad S_1^* - S_1 = -\frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_1 \text{ e } S_2^* - S_2 = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*) - \bar{S}_2.^{51}$$

Note que, pelas notações

$$\Delta T := T_2 - T_1, \quad \Delta S := S_2 - S_1, \quad T^* := \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) \text{ e } S^* := \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*),$$

podemos reescrever as expressões supracitadas pelas seguintes:

$$A_{1'}. \quad \Delta T = \Delta \bar{T} \text{ e } \Delta S = \Delta \bar{S};$$

$$A_{2'}. \quad T_1^* - T_1 = -T^* - \bar{T}_1 \text{ e } T_2^* - T_2 = T^* - \bar{T}_2;$$

$$A_{3'}. \quad S_1^* - S_1 = -S^* - \bar{S}_1 \text{ e } S_2^* - S_2 = S^* - \bar{S}_2.$$

Finalmente, o sistema (6.10) pode ser reescrito de modo mais simplificado (em função das anomalias supracitadas) e com um número menor de constantes, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_1}{dt} &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|\Delta\bar{T}, \\ \frac{d\bar{T}_2}{dt} &= c(T^* - \bar{T}_2) - |q|\Delta\bar{T}, \\ \frac{d\bar{S}_1}{dt} &= -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|\Delta\bar{S}, \\ \frac{d\bar{S}_2}{dt} &= H + d(S^* - \bar{S}_2) - |q|\Delta\bar{S}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

com

$$q = \kappa(\alpha\Delta T - \beta\Delta S).^{52} \quad (6.16)$$

⁵⁰De fato, via (6.14), temos

$$-\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - (T_1 - T_0^*) = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) - T_1 + \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*).$$

A outra igualdade é demonstrada de modo análogo.

⁵¹Faça como na última nota de rodapé.

⁵²Cf. (6.9), p. 117, e $A_{1'}$.

Por abuso de notação, o sistema (6.15) é representado sem as “barras”, ou seja, na forma

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(-T^* - T_1) + |q|\Delta T, \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T^* - T_2) - |q|\Delta T, \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + d(-S^* - S_1) + |q|\Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S^* - S_2) - |q|\Delta S,\end{aligned}\tag{6.17}$$

tendo o cuidado de lembrar que as variáveis são as anomalias supracitadas.

Note que a técnica utilizada na subseção 4.2.2 (para resolvermos sistemas lineares via TL) é insuficiente para resolvermos o sistema não linear (6.17). Estudaremos, na próxima seção, métodos qualitativos que permitem analisar sistemas não lineares. Por enquanto, contudo, faremos uma série de simplificações para reduzirmos (6.17) à uma *edo* escalar e, assim, poderemos analisar as suas soluções de equilíbrio.

Hipóteses para tornarmos o sistema (6.17) unidimensional

Para diminuirmos a dimensão do sistema supracitado, podemos supor que, ao longo do tempo (t), a *cth* estará sujeita às seguintes condições:

- C_1 . A temperatura (resp., salinidade) de cada caixa permanecerá inalterada e ΔT (resp., ΔS) permanecerá próxima de zero;⁵³
- C_2 . A diferença entre a salinidade (resp., temperatura) de cada caixa e de sua respectiva fronteira será considerada desprezível.⁵⁴

Portanto, caso consideremos $C_{1,2}$ sem os parentêses, temos:

$C_{1'}$. ΔT é arbitrariamente pequena,

$$T_2(t) = T^* \text{ e } T_1(t) = -T^*,^{55}$$

$C_{2'}$. $d = 0$.

⁵³Nesse caso, as derivadas das temperaturas (resp., salinidades) permanecerão nulas e as parcelas contendo o fator $|q|$ das duas primeiras (resp., últimas) equações de (6.17) serão eliminadas.

⁵⁴Nesse caso, podemos supor $d = 0$ (resp., $c = 0$).

⁵⁵Para que essa condição seja válida, é necessário que as temperaturas das caixas se equilibrem imediatamente com as de suas respectivas fronteiras. Contudo, como

$$\begin{aligned}\bar{T}_0 &= \frac{\bar{T}_1 + \bar{T}_2}{2} \\ &= \frac{T_1 - T_0^* + T_2 - T_0^*}{2} \text{ (via (6.14), p. 119)} \\ &= T_0 - T_0^*,\end{aligned}$$

temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_0 = 0,$$

por (6.13), p. 118. Por outro lado, se considerarmos a condição $\bar{T}_2 = T^*$ e $\bar{T}_1 = -T^*$, então $\bar{T}_0 = 0$ durante toda a evolução temporal (t).

Consequentemente, (6.17) fica reduzido ao sistema

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= -H + |q|\Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= H - |q|\Delta S,\end{aligned}\tag{6.18}$$

com

$$q = \kappa(2\alpha T^* - \beta\Delta S).\tag{6.19}^{56}$$

Contudo, esse sistema permanece não linear e também não pode ser resolvido pela método estudado na subseção 4.2.2. Para reduzi-lo a uma *edo*, note que, como $S_1 + S_2 = \text{cte}$,⁵⁷ pois estamos supondo que a *cth* é um sistema isolado, a sua única variável de interesse é ΔS . Assim, ao subtrairmos a primeira equação de (6.18) da segunda, temos

$$\frac{d}{dt}(\Delta S) = 2(H - \kappa|2\alpha T^* - \beta\Delta S|\Delta S).\tag{6.20}$$

Agora, para simplificarmos a notação de (6.20) e, concomitantemente, diminuirmos o número de suas constantes para um, consideremos a variável dada por

$$x := \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*},$$

a parametrização temporal dada por

$$\tau := 4\alpha\kappa|T^*|t$$

e a constante dada por

$$\lambda := \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa T^*|T^*|},$$

observando-se que

$$\begin{aligned}|T^*| &= \left|\frac{\Delta T}{2}\right| \\ &= \frac{\Delta T}{2} \\ &= T^*,\end{aligned}$$

⁵⁶Cf. (6.16) e C_1 '.

⁵⁷Assim, teremos uma solução exponencial para a salinidade média!

pois $T_2 - T_1 > 0$, ou seja, a temperatura equatorial é maior que a polar. Portanto, podemos reescrever (6.20) como

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\beta}{4\alpha\kappa T^*} \frac{d}{dt}(\Delta S) \\
 &= \frac{\beta}{8\alpha^2\kappa (T^*)^2} \cdot 2(H - \kappa|2\alpha T^* - \beta\Delta S| \Delta S) \\
 &= \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa (T^*)^2} - \frac{\beta}{4\alpha^2 (T^*)^2} |2\alpha T^* - \beta\Delta S| \Delta S \\
 &= \frac{\beta H}{4\alpha^2\kappa (T^*)^2} - \left| \frac{1}{2\alpha T^*} (2\alpha T^* - \beta\Delta S) \right| \left(\frac{\beta}{2\alpha T^*} \right) \Delta S \\
 &= \lambda - \left| 1 - \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*} \right| \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*} \\
 &= \lambda - |1 - x|x,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x. \quad (6.21)$$

Pontos críticos (estados/soluções de equilíbrio) de (6.21)

Quando um sistema (resp., uma equação) não tem solução analítica e depende de parâmetros, como o λ de (6.21), procura-se as suas soluções de equilíbrio e, encontrando-as, o tipo de estabilidade dessas soluções, dependendo dos parâmetros supracitados, como fizemos para os modelos da subseção 6.2.3. Assim, diferentemente do capítulo 1, onde, dada uma *edo*, buscava-se determinar a sua solução analítica, utilizaremos uma abordagem “indireta” para estudarmos a *edo* (6.21), linearizando em torno de suas soluções de equilíbrio, conforme descreveremos.

Como as soluções de equilíbrio são constantes, ou seja, têm derivada nula, elas são pontos críticos e, nesse caso,

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \implies |1 - x|x = \lambda. \quad (6.22)$$

Note que, como λ é positivo, qualquer solução de equilíbrio x^* satisfazendo (6.21) é positiva, por (6.22). Além disso, pelo módulo em (6.22), temos dois casos:

I. Se $1 - x < 0$, isto é, $x > 1$, então

$$\begin{aligned}
 (x - 1)x = \lambda &\implies x^2 - x - \lambda = 0 \\
 &\implies x_1^* = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda} \right) \\
 &\implies x_1^* = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\lambda} \right),
 \end{aligned}$$

por ser positiva, existindo para cada $\lambda \in (0, +\infty)$.

II. Se $1 - x > 0$, isto é, $x < 1$, então

$$\begin{aligned}
 (1 - x)x = \lambda &\implies x^2 - x + \lambda = 0 \\
 &\implies x_{2,3}^* = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda} \right),
 \end{aligned}$$

que existem (e são positivas) para cada $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$.

Agora, para determinarmos a estabilidade/instabilidade dessas soluções de equilíbrio, linearizaremos (6.21) em torno de $x^* \in \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$, considerando

$$x = x^* + y, \quad (6.23)$$

para y suficientemente pequeno. Assim, como, para $x < 1$ (caso II),

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \lambda - (1-x)x \\ &= \lambda - x + x^2, \end{aligned}$$

por (6.21), temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(x - x^*) \\ &= \frac{dx}{d\tau} \\ &= \lambda - (x^* + y) + (x^* + y)^2 \\ &= \lambda - x^* - y + (x^*)^2 + 2x^*y + y^2 \\ &= \lambda - (1 - x^*)x^* + (2x^* - 1)y + y^2 \\ &= 0 + (2x^* - 1)y + y^2, \end{aligned}$$

ou seja, para $x < 1$ e y suficientemente pequeno,

$$\frac{dy}{d\tau} = (2x^* - 1)y.$$

Analogamente, para $x > 1$ (caso I) e y suficientemente pequeno,

$$\frac{dy}{d\tau} = -(2x^* - 1)y.$$

Consequentemente:

- $x^* = x_1^*$ é (assintoticamente) estável, pois, como

$$-(2x_1^* - 1) = -\sqrt{1 + 4\lambda} < 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty &\implies y = e^{-(2x_1^* - 1)\tau} \rightarrow 0 \\ &\implies x \rightarrow x^*, \end{aligned}$$

por (6.23);

- $x^* = x_2^*$ é instável, pois, como

$$2x_2^* - 1 = \sqrt{1 - 4\lambda} > 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty &\implies y = e^{(2x_2^* - 1)\tau} \rightarrow \infty \\ &\implies |x - x^*| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

por (6.23);

· $x^* = x_3^*$ é estável, pois, como

$$2x_3^* - 1 = -\sqrt{1 - 4\lambda} < 0,$$

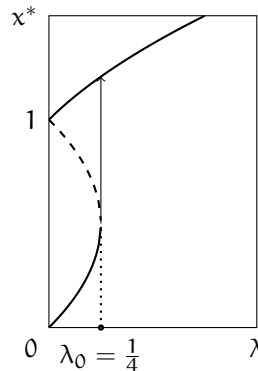
temos

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow \infty \implies y &= e^{(2x^*-1)\tau} \rightarrow 0 \\ \implies x &\rightarrow x^*, \end{aligned}$$

por (6.23).

Interpretando os resultados num diagrama de bifurcações

Figura 6.7: No diagrama de bifurcação para (6.21), qualquer reta $\lambda = \lambda_0$ acarreta n ponto(s) de equilíbrio: $n = 3$ para $\lambda_0 \in (0, \frac{1}{4})$; $n = 2$ para $\lambda_0 = 0, 25$; $n = 1$ para $\lambda_0 > 0, 25$



Como vimos, x_1^* e x_3^* são estáveis. Contudo, eles têm estabilidades distintas. De fato,

$$\begin{aligned} q &= 2k\alpha T^* \left(1 - \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*} \right) \\ &= 2k\alpha T^* (1 - x), \end{aligned}$$

por (6.19).⁵⁸ Assim, q e $1 - x$ têm o mesmo sinal. Portanto, como $x_1^* > 1$, temos $q < 0$. Nesse caso, dizemos que a dinâmica da *cth* (regida pela equação (6.21) e convergindo para a solução de equilíbrio x_1^*) está no *modo S*.⁵⁹ Analogamente, como $x_3^* < 1$, temos $q > 0$ e, nesse caso, dizemos que a dinâmica da *cth* (regida pela equação (6.21) e convergindo para a solução de equilíbrio x_3^*) está no *modo T*.⁶⁰ Além disso, considere a figura 6.7, onde:

- $x_1^*(\lambda)$ é representado pela linha contínua superior;
- $x_2^*(\lambda)$ é representado pela linha tracejada;
- $x_3^*(\lambda)$ é representado pela linha contínua inferior.

⁵⁸Cf. p. 121.

⁵⁹*S-mode*, em inglês.

⁶⁰*T-mode*, em inglês.

O diagrama dessa figura confirma os cálculos que fizemos, ou seja, x_1^* existe para cada $\lambda > 0$ e nenhuma mudança no valor de λ acarreta uma mudança de estado (modo S), enquanto que x_3^* existe para cada $\lambda \in [0, 1/4)$ e qualquer mudança no valor de ε , mesmo que infinitesimal, em $\lambda = \frac{1}{4} + \varepsilon$ acarreta uma mudança do modo T para o S.⁶¹ Portanto, uma *bifurcação* ocorre em $\lambda = 0,25$.⁶²

⁶¹Observe a seta vertical na figura 6.7.

⁶²Estudaremos (mais detalhadamente) o conceito de bifurcações no capítulo 7.

Capítulo 7

Teoria qualitativa

Esse capítulo é uma representação formal, porém, incipiente e incompleta, da *teoria qualitativa das edos* e da *teoria das bifurcações*. Nele, generalizam-se alguns conceitos e resultados dos capítulos anteriores e, concomitantemente, analisa-se o comportamento das soluções das *edos* em torno de suas soluções de equilíbrio, não apenas para o caso de uma única *edo* escalar,¹ mas também para sistemas de *edos* escalares como o sistema (6.17).² Assim, de posse dessa teoria, retomaremos, na parte final desse capítulo, a análise da *cth* do capítulo anterior.

7.1 Sistemas dinâmicos

Como veremos, podemos analisar as soluções dos sistemas supracitados (via métodos qualitativos) para tentarmos descobrir o comportamento de longa duração dessas soluções e, em particular, o que ocorre com elas em torno das soluções de equilíbrio. Quando escritos como *edos vetoriais autônomas de primeira ordem*, esses sistemas modelam, por exemplo, o *meet* e o *cth*,³ além de tantos outros.

7.1.1 *edo* (vetorial) autônoma de primeira ordem

Nesse tipo de *edo*, o “forçamento” f não depende explicitamente do tempo t e escrevemos

$$\frac{dX}{dt} = f(X),^4 \quad (7.1)$$

¹Como fizemos no capítulo 6.

²Cf. p. 120.

³Estudados no capítulo 6.

⁴

- Quando for conveniente, poderemos utilizar a notação *newtoniana* para derivação temporal (t), isto é,

$$\dot{X} := \frac{dX}{dt};$$

- Podemos reescrever (uma *edo* de primeira ordem não autônoma) $\dot{X} = f(t, X)$ na forma (7.1). (Cf. [Wiggins (2003)].)

onde $f(X)$ é um vetor em \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} X &= X(t) \\ &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

representa uma *curva parametrizada em \mathbb{R}^n* ,⁵ ou seja, uma função vetorial de uma variável real (t), também representada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Além disso, como o conceito de *diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis reais* é fundamental para que as soluções de (7.1) sejam “bem comportadas”, o domínio D de f será considerado *aberto*.⁶

Note que, para $n = 1$, a *edo* supracitada é escalar.

Exemplo

Para a *cth* modelada por (6.17), temos

$$x_1 = T_1, \quad x_2 = T_2, \quad x_3 = S_1, \quad x_4 = S_2$$

e

$$f(X) = \begin{bmatrix} c(-T^* - T_1) + |q|\Delta T \\ c(T^* - T_2) - |q|\Delta T \\ -H + d(-S^* - S_1) + |q|\Delta S \\ H + d(S^* - S_2) - |q|\Delta S \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

edo escalar autônoma de ordem n

Esse tipo de *edo*, quando dada por

$$\frac{d^n x}{dx^n} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

pode ser escrita na forma (7.1), caso consideremos

$$x_i := \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt}, \frac{dx_n}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \frac{d^n x}{dt^n} \right) \\ &= (x_2, x_3, \dots, x_n, g(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= f(X). \end{aligned}$$

⁵Cf. [Barbosa (2024)].

⁶Ou seja, para $X \in D$ e $H \in \mathbb{R}^n$ de módulo tão pequeno quanto se queira, temos $f(X + H) - f(X)$ bem definida. (Cf. [Barbosa (2024)].)

Exemplos1. **Equação planar do pêndulo**⁷

$\frac{d^2x}{dt^2} + \text{sen } x = 0$ pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\text{sen } x_1. \end{cases} \quad (7.3)$$

Note que, aqui,

$$f(X) = (x_2, -\text{sen } x_1).$$

2. **Equação de van der Pol**⁸

$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$, onde o parâmetro de amortecimento μ é positivo, pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2. \end{cases}$$

Note que, aqui,

$$f(X) = (x_2, -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2).$$

Observação

Podem existir outros modos de escrevermos equações escalares autônomas de ordem n na forma (7.1).⁹ Por exemplo, a equação de van der Pol (supracitada) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - \mu\left(\frac{1}{3}x_1^3 - x_1\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1, \end{cases}$$

pois,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{dx_2}{dt} - \mu\left(x_1^2 \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) \\ &= -x_1 - \mu\left(x_1^2 - 1\right) \frac{dx_1}{dt} \\ &= -x_1 + \mu\left(1 - x_1^2\right) \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

representa a equação supracitada (na forma escalar).

7.1.2 Existência e unicidade de soluções da equação (7.1)**Definição**

φ é uma *solução* de (7.1) caso $\varphi : I \rightarrow D$ seja uma curva parametrizada, ou seja, uma função vetorial de uma variável real,¹⁰ diferenciável tal que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \quad (7.4)$$

⁷Cf. p. 29.

⁸Modela sistemas oscilatórios amortecidos (e.g., circuitos elétricos, batimentos cardíacos, etc.).

⁹Cf. p. 127.

¹⁰Cf. [Barbosa (2024)].

para cada t pertencente ao intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

Oscilador harmônico linear.¹¹ Para cada $r \geq 0$,

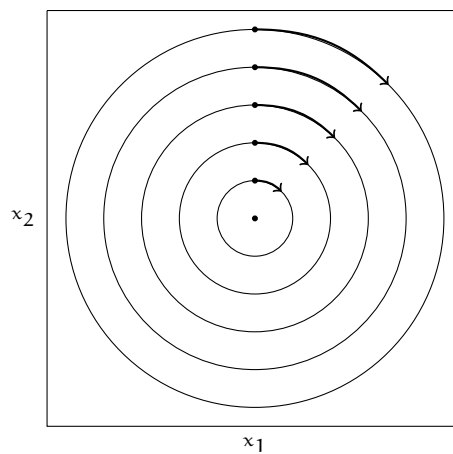
$$\mathbb{R} = I \ni t \mapsto \varphi(t) = (r \operatorname{sen} t, r \operatorname{cos} t) \in \mathbb{R}^2$$

é uma solução de

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases} \quad (7.5)$$

Note que as trajetórias (associadas às soluções) são negativamente orientadas, no contexto

Figura 7.1: “Órbitas” associadas à algumas soluções de (7.5)



de curvas parametrizadas,¹² e algumas delas estão ilustradas na figura 7.1.¹³ É fácil ver que a origem de \mathbb{R}^2 , ou seja, o ponto $(0, 0)$, representa a solução nula, enquanto que qualquer outra solução de (7.5) pode ser representada por uma circunferência de centro na origem e raio r . De fato, pela primeira nota de rodapé desse exemplo, (7.5) é a representação vetorial da *edo* escalar

$$x'' = -x.$$

Desse modo, basta consideramos as soluções dadas no primeiro exemplo do capítulo 1 ou no caso III da subseção 2.1.3.¹⁴ Consequentemente,

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ &= \operatorname{cte}_I \operatorname{cos} t + \operatorname{cte}_{II} \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

¹¹Para uma aplicação, confira o primeiro exemplo dado no capítulo 1. De fato, a *edo* (1.1) daquele exemplo é a forma escalar de (7.5), conforme vimos na página 128.

¹²Cf. [Barbosa (2024)]

¹³Como veremos, em *sistemas dinâmicos*, essas trajetórias são chamadas de *órbitas*, para podermos caracterizar o aspecto autônomo desses sistemas. Nesse caso, a expressão *espaço de fase* significará qualquer ilustração do plano cartesiano OX_1X_2 , acompanhado por algumas dessas órbitas orientadas, quando a dinâmica do sistema considerado esteja bem descrita, em particular nas proximidades das soluções constantes, ditas *soluções de equilíbrio*. Por outro lado, a palavra *trajetória*, no contexto de sistemas dinâmicos, será utilizada caso consideremos o tempo t e as órbitas.

¹⁴Cf. p. 26.

e, pela primeira equação de (7.5), temos

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{dx}{dt} \\ &= -\text{cte}_I \sin t + \text{cte}_{II} \cos t.\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1^2 + x_2^2 = \text{cte}_I^2 + \text{cte}_{II}^2,$$

onde

$$r = \sqrt{\text{cte}_I^2 + \text{cte}_{II}^2}.$$

Observações

- Doravante, o *pvi* consistirá da equação (7.1) e da condição inicial

$$X(t_0) = X_0 \text{ (onde } t_0 \in \mathbb{R} \text{ e } X_0 \in D\text{)}.^{15}$$

- Para demonstrações da existência e da unicidade das soluções desse *pvi*, ou seja, demonstrações dos resultados em itálico dessa subseção, confira, por exemplo, o último capítulo da referência [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].
- A “existência das soluções” pode ser enunciada da seguinte forma:
Caso $t_0 \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in D$ sejam arbitrários e f seja contínua, existe algum intervalo $I = I(X_0)$, contendo t_0 em seu interior, e existe alguma curva parametrizada diferenciável φ tais que

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)), \forall t \in I, \\ \varphi(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Exemplo

No exemplo supracitado (oscilador harmônico linear), para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in \mathbb{R}^2$, existe uma circunferência de centro na origem e que passa pelo ponto X_0 no instante $t = t_0$.

- Sem perda de generalidade, podemos considerar $t_0 = 0$.¹⁶ Assim, podemos reescrever o *pvi* supracitado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \dot{X} &= f(X), \\ X(0) &= X_0. \end{cases} \quad (7.6)$$

¹⁵Cf. p. 6.

¹⁶De fato, por um lado, f não depende explicitamente de t . Por outro, para $t_0 \neq 0$, podemos escrever

$$t_0 = -\frac{b}{a}$$

e considerar a restrição da função linear

$$\tau(t) = at + b$$

ao intervalo I , isto é, $\tau|_I$. Nesse caso,

$$\tau(t_0) = 0,$$

$\tau|_I$ é um difeomorfismo de classe C^∞ , ou seja, $\tau|_I$ e a sua inversa são infinitamente diferenciáveis, e podemos considerar a composta $\varphi \circ (\tau|_I)^{-1}$ no lugar da solução φ .

- Caso seja necessário ressaltarmos que $I(X_0)$ depende do ponto $X_0 \in D$, denotaremos $\varphi(t)$ por $\varphi(t, X_0)$. Portanto, $\varphi(0, X_0) = X_0$.
- Em geral, caso $\varphi : I \rightarrow D$ seja uma solução de (7.6),¹⁷ I é considerado *maximal*, em outras palavras, I é o maior intervalo possível onde essa solução possa ser definida.

Exemplos

1. No exemplo do oscilador harmônico linear, $I = \mathbb{R}$ para toda solução de (7.5).
2. Pela subseção 1.2.1,

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

é a solução do *pvi*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2, & 18 \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Note que, caso x_0 seja positivo (resp., negativo), temos

$$I = (-\infty, x_0^{-1}) \quad (\text{resp., } I = (x_0^{-1}, +\infty)),^{19}$$

enquanto que

$$I = \mathbb{R}$$

quando $x_0 = 0$.

- Em cada um dos dois exemplos anteriores, as soluções não têm pontos em comum, ou seja, a solução que passa por X_0 é única. Isso ocorre pois f não é apenas contínua: continuidade é uma condição necessária para a existência das soluções, mas não para

¹⁷Confira a definição que inicia a subseção 7.1.2.

¹⁸De fato, como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x^2 &\implies \int x^{-2} dx = \int dt \\ &\implies -x^{-1} = t + \text{cte} \\ &\implies x = -\frac{1}{t + \text{cte}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) \\ &= -\frac{1}{\text{cte}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\text{cte} = -\frac{1}{x_0},$$

temos

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}.$$

¹⁹Lembrete: $0 \in I$.

a unicidade delas.

Exemplo

Pela subseção 1.2.1,

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2, \forall t \in \mathbb{R},$$

é uma solução do *pvi*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{x}, \\ x(0) &= x_0 \geq 0. \end{cases}$$

Contudo, uma outra solução é dada por

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq -2\sqrt{x_0}, \\ \varphi(t), & \forall t > -2\sqrt{x_0}. \end{cases}$$

Note que, em ambos os casos, $I = \mathbb{R}$.

- Caso $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja *lipschitziana*, isto é, caso exista alguma constante k (positiva e dita *constante de Lipschitz*) tal que

$$X_1, X_2 \in D \implies |f(X_1) - f(X_2)| \leq k|X_1 - X_2|,^{20}$$

e X_0 seja um ponto de D , o *pvi* (7.6) admite uma única solução φ definida em torno de $t_0 = 0$.²¹ Note que, como

$$f \text{ é lipschitziana} \implies f \text{ é contínua},^{22}$$

temos alguma φ satisfazendo o *pvi* (7.6). Por outro lado, a unicidade é um corolário do seguinte resultado:

Caso φ e ψ sejam soluções da (7.1),²³ ambas definidas num intervalo maximal I contendo $t = 0$ em seu interior, e f seja *lipschitziana* com constante de Lipschitz k , temos, para cada $t \in I$,

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq e^{k|t|}|\varphi(0) - \psi(0)|.$$

Consequentemente, em particular, se

$$\varphi(0) = X_0 = \psi(0),$$

então

$$\varphi = \psi$$

em I .

²⁰ $|\cdot|$ é uma *norma* em \mathbb{R}^n .

²¹Cf. p. 131.

²²De fato, para $X_1, X_2 \in D$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, considere algum $\delta < \frac{\varepsilon}{k}$. Portanto, se

$$|X_1 - X_2| < \delta,$$

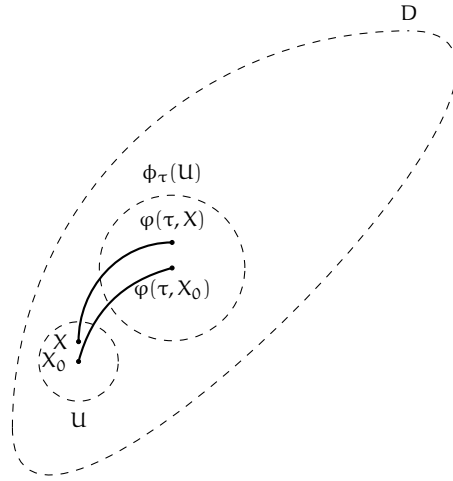
então

$$\begin{aligned} |f(X_1) - f(X_2)| &\leq k|X_1 - X_2| \\ &< k\delta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

²³Cf. p. 127.

7.1.3 Regularidade das soluções de (7.6) em relação às condições iniciais

Figura 7.2: Regularidade das soluções



Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k .²⁴ Assim, se $\varphi(t, X_0)$ é a solução do pvi (7.6), então existe uma vizinhança aberta $U = U(X_0)$ de X_0 e uma transformação C^k (dita “fluxo”) dada por

$$\phi_\tau : U \ni X \mapsto \varphi(\tau, X) \in D,^{25} \quad (7.7)$$

onde $\tau \in \mathbb{R}$ representa qualquer instante de tempo (t) admissível.²⁶

Consequentemente, o fluxo ϕ_τ de U para $\phi_\tau(U)$, ilustrado na figura 7.2,²⁷ é tão “suave” (C^k) quanto a f .

²⁴Isto é, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, existe $f^{(i)}$ contínua. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6}, & \forall x \geq 0, \\ -\frac{x^3}{6}, & \forall x < 0, \end{cases}$$

é C^2 , mas não C^3 . De fato,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \forall x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & \forall x < 0, \end{cases}$$

e

$$f''(x) = |x|,$$

que não é diferenciável em $x = 0$.

²⁵Confira o último capítulo de [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

²⁶À guisa de rigor matemático,

$$\tau \in \bigcap_{X \in U(X_0)} I(X).$$

²⁷ U representa o estado do sistema num intervalo de tempo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (com ε próximo de zero) e $\phi_\tau(U)$ representa o estado futuro ($\tau > 0$) ou passado ($\tau < 0$) dos pontos de U , τ unidades de tempo para frente ($\tau > 0$) ou para trás ($\tau < 0$).

7.1.4 Fluxos, órbitas, espaços de fase, pontos críticos e estabilidade

Definições

- O *sistema dinâmico* associado à equação (7.1), p. 127, é o conjunto dos fluxos ϕ_t (obtidos para cada condição inicial $X_0 \in D$ e cada instante de tempo (t) admissível).
- A *trajetória* (partindo) de um ponto $X \in D$ (associada à equação (7.1)) é o subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\{(t, \phi_t(X)) : t \in I\}.$$
²⁸

Exemplo

Qualquer trajetória associada à equação (7.5), p. 130, tem forma helicoidal.²⁹

- A *órbita* (partindo) de um ponto $X \in D$ (associada à equação (7.1)) é o subconjunto de \mathbb{R}^n dado por

$$\begin{aligned} \gamma(X) &:= \{\phi_t(X) : t \in I\} \\ &= \text{Im}(\varphi(t, X)). \end{aligned}$$

O conjunto dessas órbitas (orientadas pela evolução temporal, isto é, do parâmetro t) é o *espaço de fase* associado ao sistema dinâmico correspondente. Para $n = 2$, é comum ilustrarmos o espaço de fase no \mathbb{R}^2 via um número adequado de órbitas tal que a evolução temporal dos pontos do sistema esteja bem determinada.

Exemplo

O espaço de fase associado à equação (7.5) está ilustrado na figura 7.1.³⁰

Observação

Outro modo de visualizarmos a dinâmica do espaço de fase é considerarmos o *campo de vetores associado* à equação (7.1),³¹ ou seja, para cada $X \in D$, consideremos o vetor com ponto inicial X e ponto final $X + F(X)$. Esse vetor representa a velocidade (da solução de (7.1) que passa por X) no ponto X .

Exemplos

1. Para visualizarmos o campo de vetores associado à equação (7.5), podemos considerar a figura 7.3.³²
2. Para visualizarmos o campo de vetores associado à equação do pêndulo (7.3),³³ podemos considerar a figura 7.4, onde $x = x_1$ varia entre $-\pi$ e π , aproximadamente.³⁴

²⁸Para os nossos propósitos, focaremos apenas no conceito de “órbita”.

²⁹Cf. [Barbosa (2024)], fig. 2.6, p. 61.

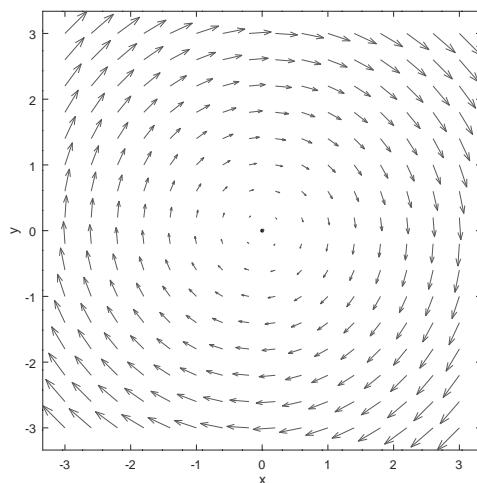
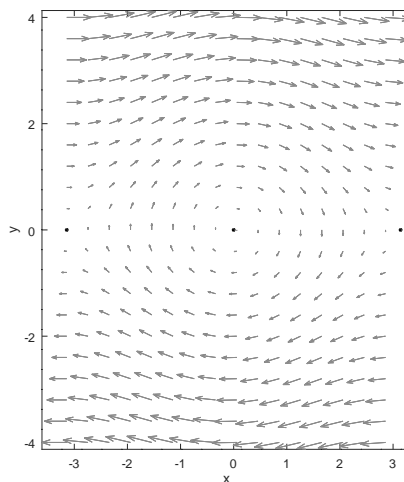
³⁰Cf. p. 130.

³¹Cf. p. 127.

³²Compare as figuras 7.1 e 7.3.

³³Cf. p. 129.

³⁴O restante do campo de vetores, não apresentado na figura 7.4, é periódico de período 2π em x .

Figura 7.3: Campo de vetores associado à equação $x'' = -x$, onde $y = x'$ Figura 7.4: Campo de vetores associado à equação $x'' = -\sin x$, onde $y = x'$ 

- Um ponto $X^* \in D$ de um sistema dinâmico (como definido no início dessa subseção) é dito *crítico* (ou *fixo* ou *de equilíbrio*) quando, para cada $t \in I = I(X^*)$,

$$\phi_t(X^*) = X^*,$$

isto é,

$$\varphi(t, X^*) = X^*.³⁵$$

Portanto, como

$$\frac{d\varphi(t, X^*)}{dt} = f(\varphi(t, X^*))$$

para cada $t \in I$,³⁶ temos

$$f(X^*) = 0. \quad (7.8)$$

Exemplos

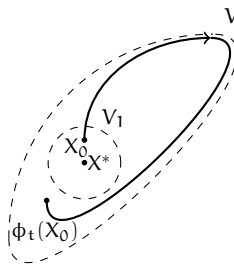
Considere as soluções de equilíbrio dos modelos *meet* e *cth* (reduzido a uma variável), estudados nas seções 6.2 e 6.3, respectivamente.

- Um ponto de equilíbrio X^* é dito (*Lyapunov*) *estável* quando, para qualquer vizinhança $V \subset D$ de X^* ,³⁷ existe alguma vizinhança $V_1 \subset V$ de X^* tal que

$$X_0 \in V_1 \implies \phi_t(X_0) \in V, \forall t \geq 0 \text{ em } I(X_0),$$

conforme ilustramos na figura 7.5. X^* é dito *instável* caso não seja estável.

Figura 7.5: Estabilidade de X^*



Exemplos

Pela equação (7.8), podemos obter os pontos de equilíbrio para os sistemas dinâmicos associados à equação planar do pêndulo (7.3) e ao oscilador harmônico linear (7.5). A origem de \mathbb{R}^2 é um ponto fixo estável para esses sistemas.³⁸ Além disso, no caso do pêndulo, temos o ponto fixo estável $(2k\pi, 0)$ e o ponto fixo instável $((2k-1)\pi, 0)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ é arbitrário.³⁹ A estabilidade desses pontos não é “assintótica”, no contexto da seguinte definição:

³⁵Cf. (7.7), p. 134.

³⁶Cf. (7.4), p. 129.

³⁷Ou seja, qualquer aberto V (em D) contendo X^* . Em geral, nesse contexto, uma “vizinhança” significa um aberto arbitrariamente pequeno, como uma bola aberta de centro X^* e raio $r \ll 1$. (Para Abertos em \mathbb{R}^n , confira [Barbosa (2024)].)

³⁸Confira os respectivos espaços de fase.

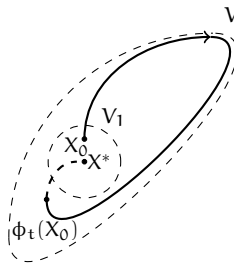
³⁹Por que?

- Um ponto de equilíbrio estável X^* é dito *assintoticamente estável* quando a vizinhança V_1 supracitada pode ser obtida tal que

$$X_0 \in V_1 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(X_0) = X^*,$$

conforme ilustramos na figura 7.6.

Figura 7.6: Estabilidade assintótica de X^*



Exemplos

1. Considere as soluções de equilíbrio do modelo *cth* (reduzido a uma variável), estudado na seção 6.3.
2. Considere o sistema (em coordenadas polares) dado por

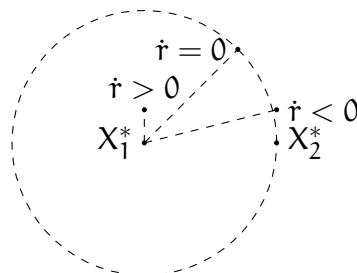
$$\begin{cases} \dot{r} = (1-r)r, \\ \dot{\theta} = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{cases}$$

onde, como estabelecido no início desse capítulo, \dot{r} e $\dot{\theta}$ representam dr/dt e $d\theta/dt$, respectivamente. Assim, temos apenas dois pontos fixos (em coordenadas polares):

$$X_1^* = (0,0) \text{ e } X_2^* = (1,0).$$

Esses pontos estão representados na figura 7.7, juntamente com três outros pontos representando uma condição inicial X_0 que pode estar no interior ($0 < r < 1$),

Figura 7.7: A origem é instável



na fronteira ($r = 1$) ou no exterior ($r > 1$) da bola aberta de centro em X_1^* e raio

r .⁴⁰ Portanto, por um lado, como $\dot{\theta} \geq 0$, temos θ crescente. Por outro, caso X_0 esteja no interior (supracitado), temos $\dot{r} > 0$ e, assim, r é estritamente crescente. Logo, qualquer solução $\varphi(t, X_0)$ (em coordenadas polares), que inicie no interior, espirala no sentido anti-horário, afastando-se de X_1^* , até atingir algum ponto da fronteira (supracitada). Conseqüentemente, X_1^* é instável. Agora, para analisarmos o que ocorre com pontos da fronteira, seja X_0 um desses pontos. Nesse caso, como $\dot{r} = 0$, a solução $\varphi(t, X_0)$ (em coordenadas polares) percorre, a partir de X_0 , a fronteira (no sentido anti-horário), aproximando-se de X_2^* . Finalmente, resta analisarmos a dinâmica de soluções com condições iniciais no exterior (supracitado). Assim, caso X_0 seja uma dessas condições, como $\dot{r} < 0$, temos r estritamente decrescente e, portanto, a solução $\varphi(t, x_0)$ (em coordenadas polares) espirala (no sentido anti-horário), até atingir a fronteira e convergir para X_2^* . Contudo, embora todas as soluções do sistema convirjam para o ponto X_2^* (em coordenadas polares), esse ponto não é estável, no contexto da definição dada (em coordenadas cartesianas).⁴¹

7.1.5 Dinâmica das soluções com condições iniciais próximas de X^*

Caso $f(X)$, isto é, o segundo membro de (7.1),⁴² seja (no mínimo) C^2 numa vizinhança de um ponto fixo X^* *isolado*,⁴³ podemos analisar órbitas próximas desse ponto, linearizando $f(X)$ em torno dele. De fato, considere a expansão de Taylor de $f(X)$ em torno de $X = X^*$ dada por

$$\dot{X} = Df(X^*)(X - X^*) + g(X), \quad (7.9)$$

onde

$$Df(X^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^*) \right), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

é a matriz $n \times n$ das derivadas parciais das componentes de $f(X)$ em $X = X^*$ e

$$g(X) = f(X) - Df(X^*)(X - X^*)$$

é o restante da expansão supracitada consistindo dos termos de ordem no mínimo 2. Conseqüentemente, para X arbitrariamente próximo de X^* , temos $g(X)$ desprezível e (7.9) aproximada (linearmente) por

$$\dot{X} = A(X - X^*), \quad (7.10)$$

onde A representa a matriz supracitada. Além disso, pela notação $\mathbf{X} := X - X^*$, podemos escrever (7.10) da forma

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X},$$

que, por abuso de notação, será denotada por

$$\dot{X} = AX. \quad (7.11)$$

⁴⁰Cf. [Barbosa (2024)].

⁴¹Justifique!

⁴²Cf. p. 127.

⁴³Ou seja, X^* é o centro de alguma bola aberta que não contém outros pontos fixos.

Observação

Para que o único ponto fixo de (7.11) seja $X = 0 \in \mathbb{R}^n$, devemos evitar casos degenerados, considerando (doravante) A invertível.⁴⁴ Portanto, cada ponto crítico isolado X^* (do sistema dinâmico associado à equação $\dot{X} = f(X)$) é transladado para a origem, que é o único ponto de equilíbrio da linearização (7.11). Grosso modo, essas considerações (e algumas da subseção 7.1.6) são o cerne do *teorema de Hartman-Grobman*, que é um resultado bastante conhecido na área de *sistemas dinâmicos*, demonstrando que a dinâmica das órbitas próximas de X^* é “semelhante” à dinâmica das órbitas próximas da origem (como ponto fixo da linearização).

Exemplo

(7.5) é a linearização de (7.3) em torno de $(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,⁴⁵ conforme as figuras 7.3 e 7.4 ilustram.⁴⁶

7.1.6 Órbitas da linearização aproximando órbitas em torno dos pontos de equilíbrio do sistema não linear

Como vimos no capítulo 3, ao utilizarmos o método das séries de potências, podemos obter, em particular, a (única) solução

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) = x_0 e^{at} \in \mathbb{R}$$

para o *pvi*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \dots$$

é a bem conhecida série exponencial. Analogamente, demonstra-se que a curva parametrizada

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) = e^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^n$$

é a solução do *pvi*

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

onde:⁴⁷

- A é uma matriz $n \times n$ com entradas reais;

⁴⁴Ou seja, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\implies A^{-1}AX = A^{-1}0 \\ &\implies X = 0. \end{aligned}$$

⁴⁵Cf. pp. 129–130.

⁴⁶Cf. pp. 136–136.

⁴⁷Cf. [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

- A série exponencial

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \dots \quad (7.12)$$

converge no espaço vetorial $\mathbb{R}^{n \times n}$ das matrizes $n \times n$ reais, visto como isomorfo ao espaço \mathbb{R}^{n^2} dos vetores com n^2 coordenadas reais, munido de qualquer norma $|\cdot|$ equivalente à euclidiana;⁴⁸

- I é a identidade em $\mathbb{R}^{n \times n}$;
- A^k é o produto de k fatores iguais a A;
- $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$ ($\forall s, t \in \mathbb{R}$);
- Caso $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comutem, isto é, $AB = BA$, temos

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} \quad (\forall t \in \mathbb{R});$$

- Derivando-se (7.12), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{tA}) &= Ae^{tA} \\ &= e^{tA}A; \end{aligned}$$

- Para o sistema dinâmico

$$\phi = \{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

associado à equação (7.11), temos, para cada $t \in \mathbb{R}$, o fluxo

$$\mathbb{R}^n \ni X_0 \mapsto \phi_t(X_0) = e^{tA}X_0 \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$\phi_t = e^{tA}.^{49}$$

⁴⁸Por exemplo, podemos considerar o isomorfismo

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

e a convergência

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} = e^{tA}$$

relativamente à norma euclidiana, que ocorre “componente a componente”, pois

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(at)^k}{k!} = e^{at}$$

converge em \mathbb{R} .

⁴⁹Note que, em relação ao *pvi* (7.6) da página 131, aqui, $I = \mathbb{R}$ e $D = \mathbb{R}^n$.

Próximo dos pontos de equilíbrio, e^{tA} esboça o espaço de fase

Caso $A, J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sejam *semelhantes*, isto é,

$$\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertível, dita matriz de mudança de bases, tal que } A = PJP^{-1},^{50}$$

temos

$$\begin{aligned} A^k &= (PJP^{-1})^k \\ &= PJ^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (PJ^kP^{-1}) \\ &= P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k \right) P^{-1} \\ &= Pe^{tJ}P^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, caso J seja a *forma de Jordan* de A ,⁵¹ no lugar da linearização (7.11) de $\dot{X} = f(X)$, analisaremos a origem como ponto fixo do sistema $\dot{Y} = JY$, onde $Y = P^{-1}X$, assim obtido:

$$\begin{aligned} \dot{X} = AX &\implies \dot{X} = APP^{-1}X \\ &\implies P^{-1} \frac{dX}{dt} = P^{-1}APP^{-1}X \\ &\implies \frac{d}{dt} (P^{-1}X) = P^{-1}AP (P^{-1}X) \\ &\implies \dot{Y} = JY. \end{aligned}$$

Como veremos no caso $n = 2$, pela mudança de bases P , o fluxo $\Phi = \{e^{tJ}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é comprimido ou alargado para o fluxo $\phi = \{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}}$,⁵² via rotações (em torno da origem) dos autoespaços de J para os de A .

A diagonalizável

Nesse caso, como

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

⁵⁰Cf. [Barbosa (2025)].

⁵¹Nesse caso, J é a matriz *diagonal por blocos* que representa a estrutura dos autovalores, inclusive os generalizados, de A . (Cf. [Barbosa (2025)].)

⁵²Ou, equivalentemente, as órbitas associadas a $\dot{Y} = JY$ são comprimidas ou alargadas para as órbitas associadas a $\dot{X} = AX$.

temos

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= P \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right] P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.
 \end{aligned}$$

Ainda nesse exemplo, caso o autovalor λ_i seja negativo, $i = 1, \dots, n$, a origem de \mathbb{R}^n é assintoticamente estável para o sistema dinâmico $\phi = \{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}}$. De fato, para cada $X_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} X_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \right] X_0 \\
 &= \left[P \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\lambda_1} & & \text{zeros} \\ & \ddots & \\ \text{zeros} & & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \right] X_0 \\
 &= (P0P^{-1}) X_0 \\
 &= 0X_0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, caso todos os autovalores de A sejam positivos, a origem é instável, pois, analogamente ao cálculo anterior, temos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{tA} X_0 = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA} X_0\| = \infty,$$

ou seja, quando $t \rightarrow \infty$, aumenta a distância entre o fluxo $e^{tA} X_0$ e a origem.⁵³

Caso planar ($n = 2$)

Para os nossos propósitos, estudaremos apenas o caso $n = 2$ com suas quatro possíveis formas de Jordan. Contudo, antes de examinarmos os espaços de fase obtidos para cada uma dessas formas, consideremos a existência de um autovalor λ de A com autoespaço associado unidimensional. Quando λ for negativo (resp., positivo), diremos que esse autoespaço é uma *variedade (linear) estável* (resp., *instável*) e o denotaremos por $E^s = E^s(\lambda)$ (resp., $E^u = E^u(\lambda)$).

⁵³Como logo veremos, para que a origem seja instável, basta que um dos autovalores supracitados seja positivo!

Essa variedade é *invariante* pelo sistema dinâmico $\phi = \{e^{At}\}_{t \in \mathbb{R}}$, em outras palavras, caso X_0 seja uma condição inicial pertencente a E^s (resp., E^u), temos $e^{tA}X_0 \in E^s$ (resp., E^u) para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} X_0 \in E^s \text{ (resp., } E^u) &\implies AX_0 = \lambda X_0 \\ &\implies A^k X_0 = \lambda^k X_0, k = 0, 1, 2, \dots \\ &\implies e^{tA} X_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k X_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} X_0 \\ &= e^{\lambda t} X_0 \in E^s \text{ (resp., } E^u). \end{aligned}$$

• **A diagonalizável com autovalores reais e distintos**⁵⁴

Seja

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

onde os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e distintos. Consequentemente, como A é diagonalizável,⁵⁵ temos

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1},$$

com

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Note que a órbita que passa pela condição inicial

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(não nula) associada à equação

$$\dot{Y} = JY$$

é dada por

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{tJ} Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} y_{0,1} e^{\lambda_1 t} \\ y_{0,2} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

• **Caso parabólico**

Para $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, (7.13) é uma curva parabólica no plano $OY_1 Y_2$ da forma

$$|y_1|^{\lambda_2} = C |y_2|^{\lambda_1},$$

⁵⁴Confira o caso I das soluções das *edos* lineares escalares de segunda ordem, p. 25.

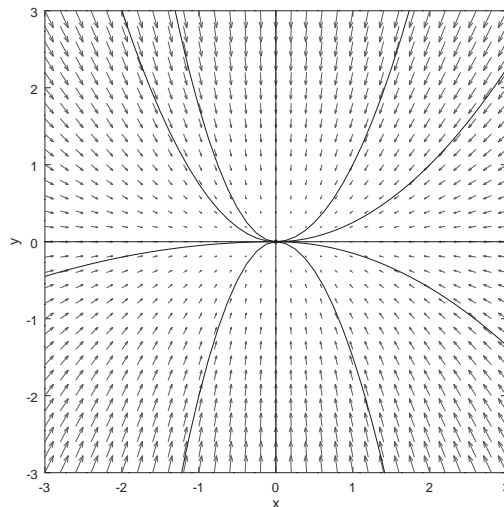
⁵⁵Cf. p. 142.

onde C é uma constante dependendo dos autovalores e da condição inicial. De fato, sem perda de generalidade, considere $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ e $y_{0,2} \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} |y_1(t)|^{|\lambda_2|} &= |y_{0,1} e^{\lambda_1 t}|^{|\lambda_2|} \\ &= |y_{0,1} e^{-|\lambda_1| t}|^{|\lambda_2|} \\ &= |y_{0,1}|^{|\lambda_2|} |e^{-|\lambda_2| t}|^{|\lambda_1|} \\ &= \frac{|y_{0,1}|^{|\lambda_2|}}{|y_{0,2}|^{|\lambda_1|}} |y_{0,2} e^{\lambda_2 t}|^{|\lambda_1|} \\ &= C |y_2(t)|^{|\lambda_1|}. \end{aligned}$$

Algumas dessas órbitas estão ilustradas na figura 7.8, para o caso $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, onde $(0, 0)$ é um tipo de ponto fixo conhecido como *nó estável* ou *atrator positivo*. No caso $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, podemos obter uma figura semelhante, mas com vetores opostos aos da figura 7.8 e $(0, 0)$ representando um *nó instável* ou *atrator negativo*. Em qualquer caso, todas as órbitas, exceto duas, aproximam-se (resp., afastam-se) do nó estável (resp., instável), tangencialmente à variedade associada ao autovalor de menor módulo, isto é, $E^s(\lambda_1)$ (resp., $E^u(\lambda_1)$).⁵⁶

Figura 7.8: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (-x, -2y)$



Note que, nessa figura, as variedades $E^s(\lambda_1)$ e $E^s(\lambda_2)$ são geradas pelos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Além disso, na *edo* $\dot{Y} = JY$ dessa figura, temos

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Portanto, como J é a forma de Jordan de, por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

⁵⁶As duas exceções ocorrem na variedade $E^s(\lambda_i)$ (resp., $E^u(\lambda_i)$), $i = 1, 2$.

podemos considerar a seguinte mudança de bases

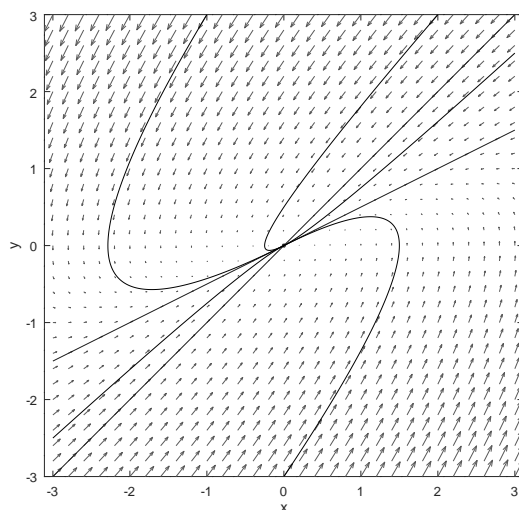
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e a *edo* $\dot{X} = AX$ dada por

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (-2x_2, x_1 - 3x_2),^{57} \quad (7.16)$$

cujo espaço de fase está ilustrado na figura 7.9.

Figura 7.9: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (-2y, x - 3y)$



Note que, nessa figura, as variedades $E^s(\lambda_1)$ e $E^s(\lambda_2)$ são geradas pelos vetores $(2, 1)$ e $(1, 1)$, respectivamente, e, como na figura 7.8, todas as órbitas, exceto duas, aproximam-se do nó estável, tangencialmente à variedade $E^s(\lambda_1)$.⁵⁸ Além disso, as órbitas entre as variedades foram alargadas (resp., comprimidas), na região do espaço de fase onde as variedades formam um ângulo obtuso (resp., agudo), em relação as órbitas da figura 7.8. Por fim, (7.16) é a linearização de algum sistema $\dot{X} = f(X)$ em torno de um ponto crítico X^* . Por exemplo, a análise do (comportamento das órbitas nas proximidades do) ponto fixo $X^* = (1, 1)$ de

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \left(1 - 2x_2 + x_1^2, 1 + x_1 - 3x_2 + x_2^2\right) \quad (7.17)$$

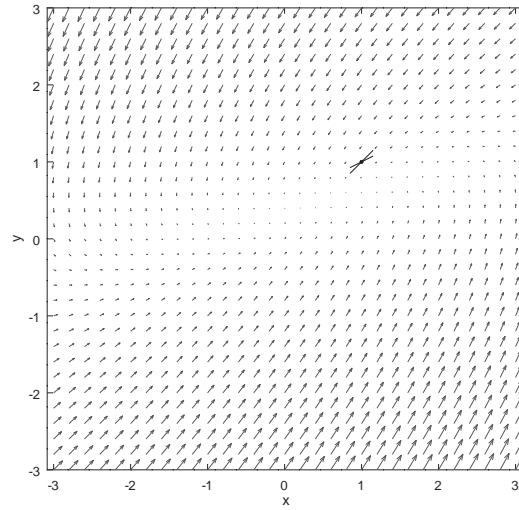
é reduzida a análise da (dinâmica orbital em torno da) origem, como ponto fixo do sistema (7.16), transformado no sistema $\dot{Y} = JY$, onde a matriz J , dada em (7.14), é a forma de Jordan da matriz A , dada em (7.15).⁵⁹

Podemos analisar a dinâmica orbital do sistema (7.17), numa vizinhança (suficientemente pequena) de $X^* = (1, 1)$, pela figura 7.10, onde todas as órbitas, exceto

⁵⁷Confira a discussão sobre $\dot{X} = AX$ e $\dot{y} = JY$, página 142.

⁵⁸As duas exceções ocorrem na variedade $E^s(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

⁵⁹Cf. p.145.

Figura 7.10: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (1 - 2y + x^2, 1 + x - 3y + y^2)$ 

duas, aproximam-se de X^* , tangencialmente à *variedade não linear* associada ao autovalor de menor módulo de A .⁶⁰ Note que o espaço de fase da figura 7.10 (em torno de X^*) é semelhante ao da figura 7.9 (em torno da origem).

• Caso hiperbólico

Para $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, (7.13) é uma curva hiperbólica no plano OY_1Y_2 da forma

$$|y_1|^{|\lambda_2|} |y_2|^{|\lambda_1|} = C,^{61} \quad (7.18)$$

onde C é uma constante dependendo dos autovalores e da condição inicial, e $(0, 0)$ é um ponto fixo instável dito *ponto hiperbólico* ou *ponto de sela*, conforme ilustrado na figura 7.11 para o caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, onde temos uma variedade estável e outra instável, dadas por $E^s(-1)$ e $E^u(2)$, respectivamente.⁶²

Aqui, além da análise (da equação $\dot{Y} = JY$) feita, as equações $\dot{X} = AX$ e $\dot{X} = f(X)$ podem ser analisadas de modo análogo ao que fizemos para o caso parabólico. Contudo, deixamos essa análise adicional como exercício para o leitor.

• A diagonalizável com autovalores reais e iguais

Seja

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ = \lambda I,$$

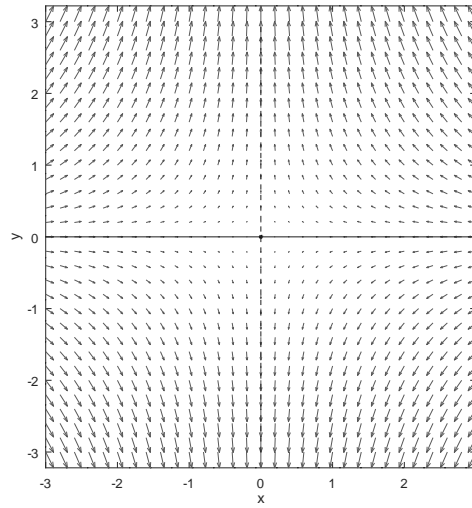
onde o autovalor λ é real. Consequentemente,

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1},$$

⁶⁰Sem entrarmos em maiores detalhes, é conveniente destacarmos a existência de duas *variedades não lineares* em torno de X^* , que são, nesse caso, duas curvas que “passam” pelo ponto X^* , cada uma delas tangente à sua respectiva variedade linear. Na figura 7.10, apenas uma pequena parte dessas curvas, em torno do ponto fixo, está delineada.

⁶¹A prova é análoga a apresentada no caso parabólico.

⁶²Como podemos descrever o espaço de fase para o caso $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$?

Figura 7.11: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (-x, 2y)$ 

com

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.^{63} \quad (7.19)$$

Observações

- Como $A = J$,⁶⁴ temos

$$e^{tA} = e^{tJ}. \quad (7.20)$$

- Qualquer condição inicial é um autovetor de A (associado ao autovalor λ), ou seja,

$$X_0 \in \mathbb{R}^2 \implies X_0 \text{ é um autovetor de } A.^{65}$$

- Como qualquer reta passando pela origem na direção de X_0 é invariante por e^{tA}

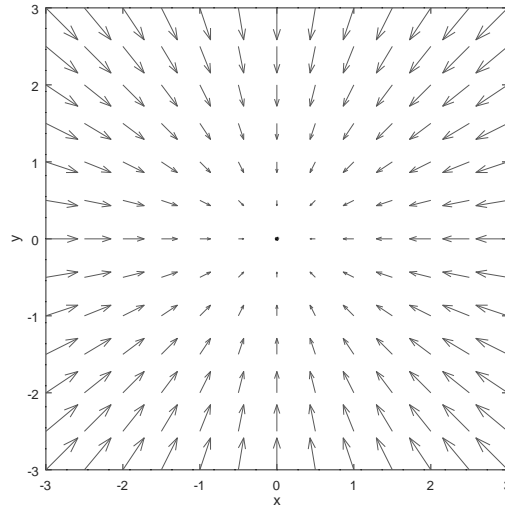
⁶³Confira o caso “ A diagonalizável”, iniciado na página 142.

⁶⁴De fato,

$$\begin{aligned} A &= PJP^{-1} \\ &= P(\lambda I)P^{-1} \\ &= \lambda PP^{-1} \\ &= \lambda I. \end{aligned}$$

⁶⁵De fato,

$$\begin{aligned} AX_0 &= \lambda IX_0 \\ &= \lambda X_0. \end{aligned}$$

Figura 7.12: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (-x, -y)$ 

e e^{tJ} ,⁶⁶ as órbitas associadas às equações $\dot{X} = AX$ e $\dot{Y} = JY$ são semirretas abertas na origem.

- Para λ negativo (resp., positivo), diremos que $(0, 0)$ é um *nó estrelado atrativo* (resp., *repulsivo*), por “atrair” (resp., “repelir”) órbitas, conforme ilustrado na figura 7.12 para o caso atrativo.

- **A diagonalizável com autovalores complexos conjugados**⁶⁷

Caso A tenha dois autovalores complexos conjugados, digamos $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, com $\beta \neq 0$, temos

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.^{68}$$

Portanto, o fluxo $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é dado por

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1},$$

onde

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \text{sen } \beta t \\ -\text{sen } \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

⁶⁶De fato,

$$\begin{aligned} e^{tA} X_0 &= e^{tJ} X_0 \\ &= e^{\lambda t} X_0 \end{aligned}$$

é um múltiplo escalar de X_0 , por (7.19) e (7.20).

⁶⁷Confira o caso III das soluções das *edos* lineares escalares de segunda ordem, p. 26.

⁶⁸É importante observarmos que, embora essa matriz J não seja propriamente uma forma de Jordan, ela é obtida ao considerarmos um autovetor V_+ de A (associado ao autovalor λ_+) e a matriz $P = [\Re(V_+) \Im(V_+)]$, onde a parte real e a parte imaginária de V_+ são as colunas de P , pois $J = P^{-1}AP$. De fato, confira o capítulo 3 de [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

De fato, considere $J = \alpha I + \beta B$, onde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A sequência cujo k -ésimo termo é B^k é dada por

$$B^0 = I, B^1 = B, B^2 = -I, B^3 = -B, B^4 = I, B^5 = B, B^6 = -I, B^7 = -B, \dots,$$

repetindo os quatro primeiros termos indefinidamente. Assim,

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t(\alpha I + \beta B)} \\ &= e^{\alpha t I} e^{\beta t B} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} I^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^k}{k!} B^k \right) \\ &= e^{\alpha t} I \left(I + \beta t B + \frac{(\beta t)^2}{2!} B^2 + \frac{(\beta t)^3}{3!} B^3 + \frac{(\beta t)^4}{4!} B^4 + \frac{(\beta t)^5}{5!} B^5 + \dots \right) \\ &= e^{\alpha t} \left(I + \beta t B - \frac{(\beta t)^2}{2!} I - \frac{(\beta t)^3}{3!} B + \frac{(\beta t)^4}{4!} I + \frac{(\beta t)^5}{5!} B - \dots \right) \\ &= e^{\alpha t} \left(\left(1 - \frac{(\beta t)^2}{2!} + \frac{(\beta t)^4}{4!} - \dots \right) I + \left(\beta t - \frac{(\beta t)^3}{3!} + \frac{(\beta t)^5}{5!} - \dots \right) B \right) \\ &= e^{\alpha t} ((\cos \beta t) I + (\sin \beta t) B). \end{aligned}$$

• Caso elíptico

Quando $\alpha = 0$, as soluções de $\dot{Y} = JY$ (resp., $\dot{X} = AX$) são circunferências (resp., elipses) de *centro* em $(0,0)$, percorridas no sentido anti-horário (para $\beta > 0$) ou horário (para $\beta < 0$), com espaço de fase semelhante ao da figura 7.1,⁶⁹ para o caso $\beta < 0$. As órbitas circulares são obtidas pois, ao considerarmos uma condição inicial não nula

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix}$$

e o fluxo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tJ} Y_0 \\ &= \begin{pmatrix} y_{0,1} \cos \beta t + y_{0,2} \sin \beta t \\ -y_{0,1} \sin \beta t + y_{0,2} \cos \beta t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= (y_{0,1})^2 (\cos^2 \beta t + \sin^2 \beta t) + (y_{0,2})^2 (\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t) \\ &= \left(\sqrt{(y_{0,1})^2 + (y_{0,2})^2} \right)^2. \end{aligned}$$

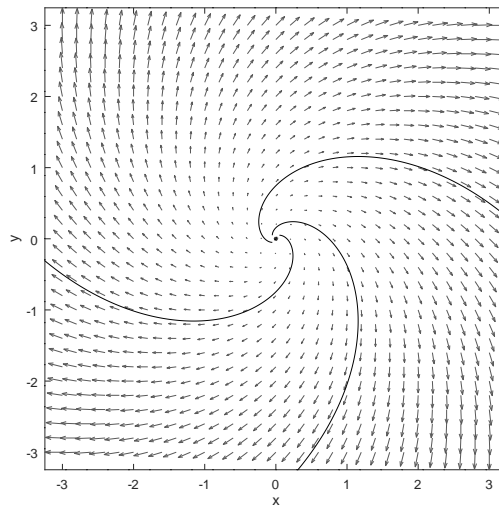
Por outro lado, pela mudança de bases P , as órbitas elípticas são obtidas das circulares.

⁶⁹Cf. p. 130.

• **Caso espiralado**

Quando a *amplitude* α é negativa (resp., positiva), as soluções de $\dot{Y} = JY$ e $\dot{X} = AX$ são espirais convergindo para a (resp., divergindo da) origem e, assim, diremos que $(0, 0)$ é um *foco atrativo* (resp., *repulsivo*) ou um *ralo* (resp., uma *fonte*). Para $\beta > 0$ (resp., $\beta < 0$), as órbitas são percorridas no sentido anti-horário (resp., horário) e ditas *espirais levogiras* (resp., *dextrogiras*), conforme a figura 7.13, onde ilustramos um campo de vetores de órbitas dextrogiras (afastando-se de uma fonte) e três dessas órbitas.

Figura 7.13: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (x + y, -x + y)$



• **A não diagonalizável**⁷⁰

Nesse caso, A tem um autovalor generalizado $\lambda \in \mathbb{R}$ (com um autoespaço generalizado unidimensional associado, podendo ser E^s (para $\lambda < 0$) ou E^u (para $\lambda > 0$)) e

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.^{71}$$

Consequentemente, como

$$J^0 = I, J^1 = J, J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 3\lambda^2 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \text{ etc.,}$$

temos o fluxo

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}, t \in \mathbb{R},$$

⁷⁰Confira o caso II das soluções das *edos* lineares escalares de segunda ordem, p. 26.

⁷¹Cf. [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

com

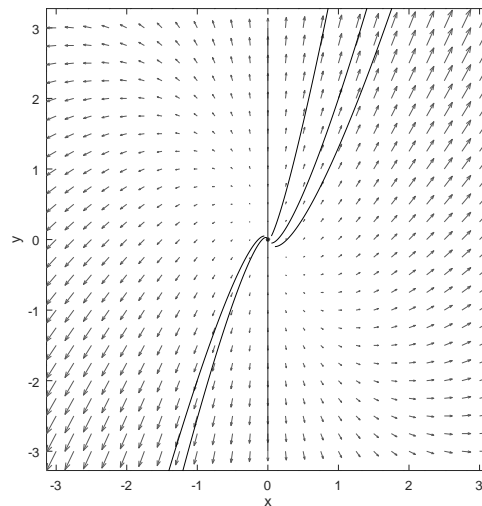
$$\begin{aligned}
 e^{tJ} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J^k \\
 &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} \\
 &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(t\lambda)^k}{k!} & 0 \\ \frac{t(t\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{(t\lambda)^k}{k!} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Portanto, para uma condição inicial Y_0 arbitrária e $\lambda \leq 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{tJ} Y_0 = (0, 0).$$

Pontos críticos como a origem, nesse contexto, são ditos *nós degenerados atrativos* (resp., *repulsivos*) quando $\lambda < 0$ (resp., $\lambda > 0$), onde essa atração (resp., repulsão) orbital que a origem “exerce” é tangencial à variedade E^s (resp., E^u), conforme ilustramos na figura 7.14 (para $\dot{Y} = JY$ e $\lambda > 0$).

Figura 7.14: Campo de vetores associado à equação $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, x + y)$

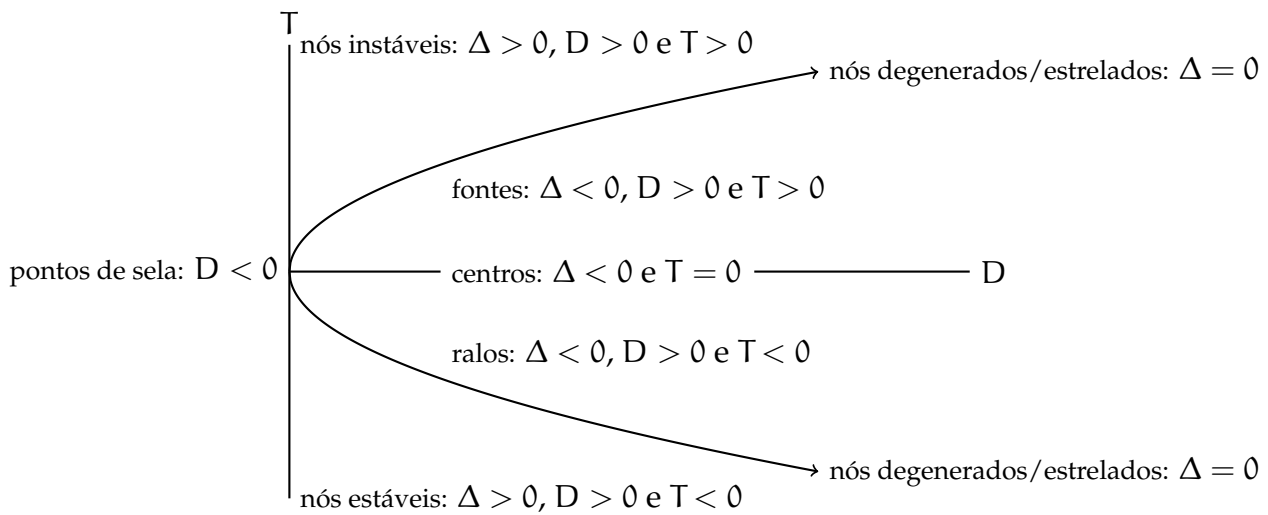


Identificação gráfica do tipo de ponto fixo, ou seja, da dinâmica orbital ao redor dele

A identificação supracitada é feita pela figura 7.15. De fato, vimos que, após a obtenção dos pontos de equilíbrio de um sistema não linear $\dot{X} = f(X)$, segue a análise do espaço de fase a eles associado e, em particular, da dinâmica das órbitas ao redor dos pontos supracitados. Assim, se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Figura 7.15: Tipos de pontos críticos, conforme posição dos pontos (D, T)



é a matriz da aproximação linear de $f(X)$ em torno do ponto fixo X^* , então, como

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc,$$

temos que

$$\lambda_- = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_+ = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

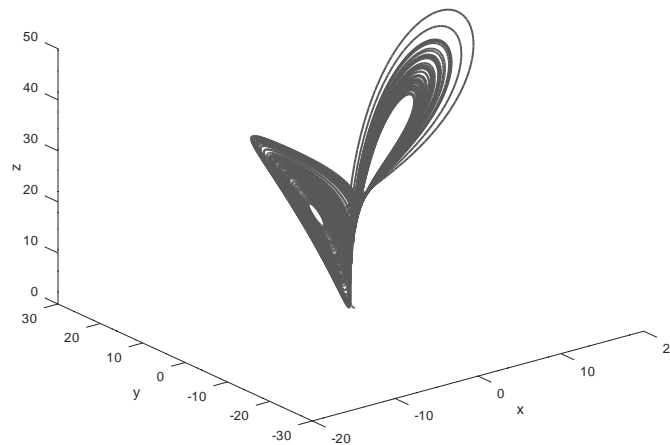
são os autovalores de A , onde $T = a + b$ e $D = ad - bc \neq 0$ representam o *traço* e o *determinante* de A , respectivamente. Além disso, considere o *discriminante* $\Delta = T^2 - 4D$ e o plano onde OD e OT representam os eixos das abcissas e ordenadas, respectivamente, conforme à figura 7.15. Consequentemente, caso (D, T) e Δ tenham sido calculados para a matriz A , note que:

- Se $\Delta = 0$, ou seja, $T^2 = 4D$, isto é, (D, T) pertence ao lugar geométrico dos pontos do plano representado pela parábola $D = \frac{1}{4}T^2$ com vértice na origem e concavidade para à direita, então X^* é um nó estrelado ou degenerado, pois $\lambda_{\pm} = \frac{T}{2}$;
- Se $D < 0$, ou seja, (D, T) pertence à região dos pontos do plano que estão à esquerda do eixo OT , então X^* é um ponto de sela, pois $\lambda_- \lambda_+ < 0$;
- Se $\Delta > 0$ (ou seja, $T^2 > 4D$, isto é, $D < \frac{1}{4}T^2$), $D > 0$ e $T > 0$ (resp., $T < 0$), em outras palavras, (D, T) pertence à região dos pontos do plano que estão no primeiro (resp., quarto) quadrante, entre o eixo OT e a parábola supracitada, então X^* é um nó instável (resp., estável), pois $\lambda_- \lambda_+ > 0$;
- Se $\Delta < 0$ (ou seja, $T^2 < 4D$, isto é, $D > \frac{1}{4}T^2$), $D > 0$ e $T > 0$ (resp., $T < 0$), em outras palavras, (D, T) pertence à região dos pontos do plano que estão no primeiro (resp., quarto) quadrante, na parte côncava em que a parábola supracitada divide o plano, então X^* é uma fonte (resp., um ralo), pois λ_{\pm} são complexos conjugados com parte real não nula;
- Se $\Delta < 0$ e $T = 0$, ou seja, (D, T) pertence ao semieixo positivo das abcissas, então X^* é um centro, pois λ_{\pm} são complexos conjugados com parte real nula.

Órbitas em torno de pontos fixos associados à equação $\dot{X} = f(X)$ n-dimensional, $n > 2$

Nesse caso, a dinâmica das órbitas pode ser “caótica”.⁷² Por exemplo, o *atrator de Lorenz* está ilustrado na figura 7.16, onde o comportamento de longa duração de uma órbita tridimensional (associada à equação do modelo) é representado como uma “borboleta”, sendo que essa órbita percorre as “asas” dessa borboleta em torno de dois pontos fixos instáveis, um em cada asa.⁷³ Por outro lado, sistemas dinâmicos bidimensionais são bem comportados,

Figura 7.16: No atrator de Lorenz, para t suficientemente grande, as órbitas percorrem o traçado de uma “borboleta”, contornando dois pontos fixos instáveis, um em cada “asa”



não apresentando comportamento “caótico”. De fato, pelo *teorema de Poincaré-Bendixson*,⁷⁴ o único tipo de órbita diferente de um ponto fixo, contida numa região limitada do plano e que pode atrair ou repelir outras órbitas dessa região quando $t \rightarrow \infty$, é uma *órbita periódica*. A propósito, uma solução $\varphi(t)$ de $\dot{X} = f(X)$ é dita *periódica* quando existe algum real positivo T tal que

$$\varphi(t + T) = \varphi(t),$$

para cada t pertencente ao domínio de φ . Nesse caso, diremos que $\varphi(t)$ é T -*periódica* e, caso não exista $\tau \in (0, T)$ com $\varphi(t)$ τ -*periódica*, o *período* T é *mínimo*.

Exemplos

⁷²O conceito matemático de *caos* em sistemas dinâmicos é bem trabalhado em, por exemplo, [Wiggins (2003)], [Hirsch, Smale e Devaney (2004)] e [Sternberg (2015)].

⁷³Esse “atrator” foi descoberto em 1963, pelo meteorologista americano do MIT chamado Edward Lorenz, enquanto procurava padrões atmosféricos convectivos num modelo climático. Ele simplificou (consideravelmente) as *equações diferenciais parciais* do modelo, obtendo uma equação $\dot{X} = f(X)$ tridimensional. Para um estudo dessa *edo* e do comportamento caótico de suas órbitas em torno de seus pontos fixos, confira [Oliveira (2023)], que é um TCC baseado no capítulo 7 de [Kaper e Engler (2013)] e na análise (do capítulo supracitado) feita em [Barbosa (2023)].

⁷⁴Cf. [Hirsch, Smale e Devaney (2004)].

1. Qualquer órbita não nula associada à equação (7.5) (do oscilador harmônico linear) é $2k\pi$ -periódica, $k = 1, 2, \dots$, com período mínimo dado por $T = 2\pi$.⁷⁵
2. Considere a *edo* escalar de segunda ordem, não autônoma,⁷⁶ dada por

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + x = \gamma \cos \omega t, \beta \in (0, 1),^{77} \quad (7.21)$$

que modela o *oscilador harmônico amortecido com forçamento T-periódico*, onde $T = 2\pi/\omega$.⁷⁸ Portanto:

- A expressão

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + e^{-\beta t}(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma solução de (7.21) se, e somente se,

$$\lambda = \sqrt{1 - \beta^2}$$

e as constantes a e b são dadas por

$$\frac{(1 - \omega^2)\gamma}{(1 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \frac{2\beta\omega\gamma}{(1 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2},$$

respectivamente.⁷⁹

⁷⁵Cf. p. 130.

⁷⁶Confira o segundo item da nota de rodapé da equação (7.1), p. 127.

⁷⁷Essa *edo* escalar de ordem $n = 2$ pode ser transformada num sistema $\dot{X} = f(X)$, $X = (x_1, x_2)$. (Cf. p. 128.)

⁷⁸Esse modelo é semelhante ao do sistema massa-mola com forçamento. (Cf. (4.9), p. 83.)

⁷⁹De fato, $x + 2\beta\dot{x} + \ddot{x}$ é igual a

$$\begin{aligned} & a \cos \omega t + b \sin \omega t + e^{-\beta t}(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t) \\ & \quad + \\ & 2\beta \left(\omega(-a \sin \omega t + b \cos \omega t) + e^{-\beta t}((-\beta)(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t) + \lambda(-c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t)) \right) \\ & \quad + \\ & \left(-\omega^2 \right) (a \cos \omega t + b \sin \omega t) \\ & \quad + \\ & e^{-\beta t} \left((\beta^2 - \lambda^2)(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t) + (-2\beta\lambda)(-c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t) \right), \end{aligned}$$

que é igual a

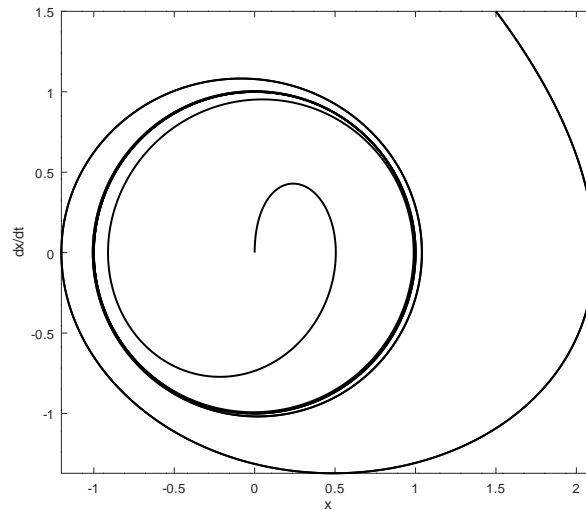
$$\begin{aligned} & a \left(\cos \omega t - 2\beta\omega \sin \omega t - \omega^2 \cos \omega t \right) \\ & \quad + \\ & b \left(\sin \omega t + 2\beta\omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t \right) \\ & \quad + \\ & e^{-\beta t} \left((1 - 2\beta^2 + \beta^2 - \lambda^2)(c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t) + (2\beta - 2\beta)\lambda(-c_1 \sin \lambda t + c_2 \cos \lambda t) \right), \end{aligned}$$

que é igual a

$$\gamma \cos \omega t.$$

- A *edo* (7.21) tem uma única solução periódica $x_0(t)$ e todas as outras soluções $x(t)$ convergem para $x_0(t)$,⁸⁰ conforme ilustramos na figura 7.17, para $\beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = \omega = 1$ em (7.21). Nessa figura, temos duas órbitas, com condições iniciais dadas por $(0,0)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, espiralando em torno da órbita periódica circular.

Figura 7.17: Órbitas espiralando em torno de uma órbita periódica circular



7.2 Teoria de bifurcações

Considere que as componentes de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ representam k parâmetros reais, onde k pode ser, inclusive, igual a 1. Uma *bifurcação* ocorre quando o sistema dinâmico associado à equação autônoma

$$\dot{X} = f(\lambda, X) \quad (7.22)$$

apresenta uma mudança qualitativa no seu espaço de fase para $\lambda = \lambda_0$. Isso pode significar que, quando λ assume o valor λ_0 , o número de pontos de equilíbrio aumenta ou diminui, e/ou algum ponto fixo ou órbita periódica deixa de ser estável ou instável, uma órbita periódica (atrativa ou repulsiva) surge ou desaparece no lugar de um ponto fixo, etc.

Exemplos

Nos modelos *meet* e *cth* (unidimensional) do capítulo 6, vimos que o tipo de estabilidade das soluções de equilíbrio e o número delas são alterados quando os parâmetros daqueles modelos ultrapassam determinados valores.⁸¹

Observações

⁸⁰De fato, caso $x_0(t)$ seja a solução para $c_1 = c_2 = 0$, $x_0(t)$ é periódica e qualquer solução não periódica $x(t)$ converge para $x_0(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

⁸¹Cf. pp. 115 e 124.

- Como antes, um ponto de equilíbrio $X = X^*$ (associado à equação (7.22)) é uma solução da equação

$$f(\lambda, X) = 0. \quad (7.23)$$

- Agora, a existência e a estabilidade de X^* também dependem de λ .
- Para o caso escalar, denota-se a equação (7.22) por

$$\dot{x} = f(\lambda, x). \quad (7.24)$$

Logo, $\varphi(t)$ é uma solução de (7.24) se, e somente se,

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\lambda, \varphi(t)), \quad (7.25)$$

para cada t pertencente ao domínio de φ .⁸²

- Existem “trocentos” tipos de bifurcações.⁸³ Nessa seção, contudo, são apresentados apenas quatro exemplos para o caso escalar e três para o caso vetorial, além de resultados que podem ser utilizados para a análise de bifurcações.⁸⁴ A propósito, para um exemplo de bifurcação relacionada com o modelo *cth*,⁸⁵ reduzido a equação (7.22) bidimensional,⁸⁶ confira a seção 7.3.

7.2.1 Bifurcação transcritical

Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, considere

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) &= \lambda x - x^2 \\ &= x(\lambda - x) \end{aligned}$$

em (7.24) e, para obtermos cada ponto fixo x^* ,

$$f(\lambda, x) = 0.⁸⁷$$

Assim, $x^* \in \{0, \lambda\}$, onde denotaremos $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \lambda$.

- Caso $\lambda < 0$
 $x_2^* < x_1^*$ e podemos considerar o gráfico de $f(\lambda, x)$ (em função de x) como ilustrado na figura 7.18, para estudarmos o seu sinal.

Caso $\varphi(t)$ satisfaça a equação (7.25), note que

$$\begin{aligned} \varphi(t) < \lambda &\implies f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente,} \end{aligned}$$

⁸²Confira as duas primeiras páginas do capítulo 1.

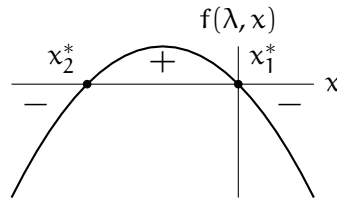
⁸³Muitos tipos, inclusive, com denominações próprias.

⁸⁴Para um estudo mais aprofundado de bifurcações e dos resultados supracitados, confira, por exemplo, [Hirsch, Smale e Devaney (2004)] e [Sternberg (2015)].

⁸⁵Cf. cap. 6.

⁸⁶Nesse caso, $X = (x_1, x_2)$.

⁸⁷Cf. (7.23).

Figura 7.18: Caso $\lambda < 0$ 

$$\begin{aligned} \varphi(t) \in (\lambda, 0) &\implies f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ crescente} \end{aligned}$$

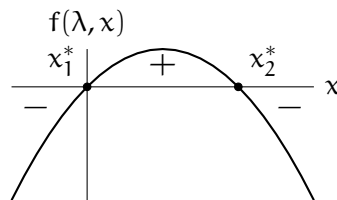
e

$$\begin{aligned} \varphi(t) > 0 &\implies f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente.} \end{aligned}$$

Consequentemente, x_1^* é (assintoticamente) estável e x_2^* é instável.

• Caso $\lambda > 0$

$x_1^* < x_2^*$ e podemos considerar o gráfico de $f(\lambda, x)$ (em função de x) como ilustrado na figura 7.19, para estudarmos o seu sinal.

Figura 7.19: Caso $\lambda > 0$ 

Caso $\varphi(t)$ satisfaça a equação (7.25), note que

$$\begin{aligned} \varphi(t) < 0 &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) \in (0, \lambda) &\implies \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ crescente} \end{aligned}$$

e

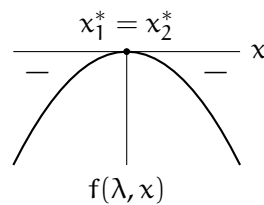
$$\begin{aligned}\varphi(t) > \lambda &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente,}\end{aligned}$$

Conseqüentemente, x_1^* é instável e x_2^* é (assintoticamente) estável.

· Caso $\lambda = 0$

$x_i = 0$, $i = 1, 2$, e podemos considerar o gráfico de $f(\lambda, x)$ (em função de x) como ilustrado na figura 7.20, para estudarmos o seu sinal.

Figura 7.20: Caso $\lambda = 0$



Caso $\varphi(t)$ satisfaça a equação (7.25), note que

$$\begin{aligned}\varphi(t) < 0 &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente.}\end{aligned}$$

Conseqüentemente, x^* é instável.

Em suma, ocorre uma mudança qualitativa na dinâmica das órbitas do espaço de fase (eixo x) em $\lambda_0 = 0$:⁸⁸

- Para $\lambda < 0$, as órbitas convergem para o ponto fixo estável $x^* = 0$ e divergem do ponto fixo instável $x^* = \lambda$.
- Para $\lambda > 0$, as órbitas convergem para o ponto fixo estável $x^* = \lambda$ e divergem do ponto fixo instável $x^* = 0$.

Para uma visualização dessa mudança, considere o *diagrama de bifurcação* da *edo*, ou seja, os gráficos

$$\lambda \mapsto x_1^*(\lambda) = 0$$

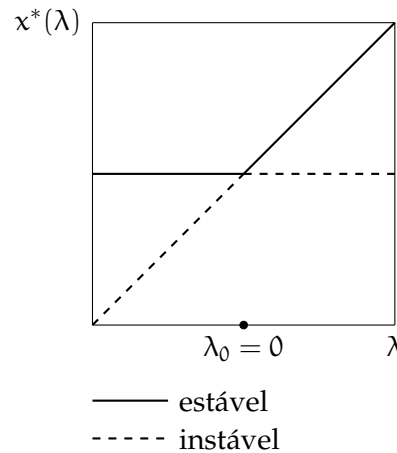
e

$$\lambda \mapsto x_2^*(\lambda) = \lambda,$$

conforme a figura 7.21.

Note que, qualquer reta vertical intercepta os gráficos supracitados nos pontos fixos para um dado parâmetro λ .

⁸⁸Um ponto $(\lambda_0, x^*(\lambda_0))$ onde ocorra uma mudança qualitativa (no espaço de fase) é dito *ponto de bifurcação*.

Figura 7.21: Diagrama de bifurcação de $\dot{x} = \lambda x - x^2$ **Definição**

Chamamos as partes do diagrama de bifurcação de uma *edo* onde x^* seja uma função de λ , isto é, $x^* = x^*(\lambda)$, de *ramos de soluções*. Especificamente, um *ramo de solução* é um subconjunto de

$$\{(\lambda, x) : f(\lambda, x) = 0\}$$

que pode ser escrito na forma

$$\{(\lambda, g(\lambda)) : \lambda \in I\},$$

onde g é uma função suficientemente *suave* num intervalo I , ou seja, g é C^k em I , para algum k tal que o gráfico de g seja contínuo e não apresente “quinas” ou “variações abruptas”.

Exemplo

Para a bifurcação transcritical, seus ramos são dados por

$$\{(\lambda, x^*) : x^* = 0, \lambda < 0\} \cup \{(\lambda, x^*) : x^* = \lambda, \lambda < 0\}$$

e

$$\{(\lambda, x^*) : x^* = 0, \lambda > 0\} \cup \{(\lambda, x^*) : x^* = \lambda, \lambda > 0\}.$$

Observação

A existência da g supracitada decorre do *teorema da função implícita*,⁸⁹ para pontos suficientemente próximos de (λ, x^*) onde

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) \neq 0. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} f(\lambda, x^*) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda, x^*) = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

é uma condição necessária para que ramos de soluções possam se interceptar, em outras palavras, qualquer ponto onde a condição (7.26) seja válida é candidato a ponto de bifurcação.

⁸⁹Cf. [Hirsch, Smale e Devaney (2004)] e [Sternberg (2015)].

Exemplo

Para a bifurcação transcítica, como (7.26) é dada por

$$\begin{cases} x^*(\lambda - x^*) = 0, \\ \lambda - 2x^* = 0, \end{cases}$$

o candidato a ponto de bifurcação é

$$(\lambda, x^*) = (0, 0).$$

De fato, como vimos, esse é o ponto de bifurcação.

7.2.2 Bifurcação sela-nó

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere

$$f(\lambda, x) = \lambda + x^2$$

em (7.24) e, para obtermos cada ponto fixo x^* ,

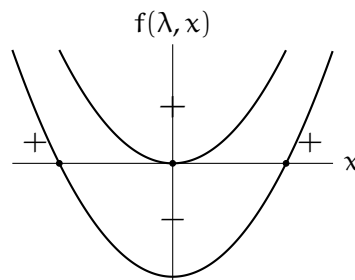
$$f(\lambda, x) = 0.^{90}$$

Assim, $x^* \in \{0, \pm\sqrt{-\lambda}\}$ existe somente para $\lambda \leq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lambda + x^2 = 0 &\implies x^2 = -\lambda \\ &\implies x = \pm\sqrt{-\lambda}. \end{aligned}$$

Portanto, ao considerarmos os espaços de fase para $\lambda \leq 0$, conforme a figura 7.22, e uma

Figura 7.22: Espaços de fase (no eixo das abscissas) para $\dot{x} = \lambda + x^2$



solução $\varphi(t)$ satisfazendo (7.25),⁹¹ temos, por um lado,

$$\begin{aligned} \varphi(t) < -\sqrt{-\lambda} &\implies f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ crescente} \end{aligned}$$

⁹⁰Cf. p. 157.

⁹¹Idem!

e

$$\begin{aligned}\varphi(t) > -\sqrt{-\lambda} &\implies f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente,}\end{aligned}$$

ou seja, $x^* = -\sqrt{-\lambda}$ é estável. Por outro,

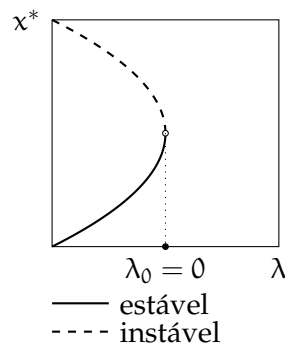
$$\begin{aligned}\varphi(t) < \sqrt{-\lambda} &\implies f(\lambda, \varphi(t)) < 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} < 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ decrescente}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi(t) > \sqrt{-\lambda} &\implies f(\lambda, \varphi(t)) > 0 \\ &\implies \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ &\implies \varphi(t) \text{ crescente,}\end{aligned}$$

isto é, $x^* = \sqrt{-\lambda}$ é instável. Além disso, $x^* = 0$ é (claramente) instável e, como

$$\begin{aligned}f_x(\lambda, x) &= 2x \\ &= 0,\end{aligned}$$

é o único candidato para ponto de bifurcação.⁹²Figura 7.23: Diagrama de bifurcação para $\dot{x} = \lambda + x^2$ 

Em suma, existem dois pontos fixos para $\lambda < 0$: $x^*_- = -\sqrt{-\lambda}$ (estável) e $x^*_+ = \sqrt{-\lambda}$ (instável). Esses pontos se fundem num único ponto fixo instável em $\lambda_0 = 0$ e deixam de existir para $\lambda \in (0, +\infty)$, conforme o diagrama de bifurcação da figura 7.23.

⁹²Cf. (7.26), p. 160.

7.2.3 Bifurcação forquilha supercrítica

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) &= \lambda x - x^3 \\ &= x(\lambda - x^2) \end{aligned}$$

em (7.24) e, para obtermos cada ponto fixo x^* ,

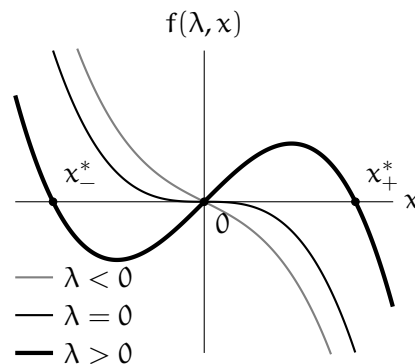
$$f(\lambda, x) = 0.^{93}$$

Portanto, temos $x^* \in \{0, \pm\sqrt{\lambda}\}$, onde:

- $x^* = 0$ existe para cada $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $x^* = x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\lambda}$ existem para cada $\lambda \geq 0$.

Agora, ao procedermos como nas subseções 7.2.1 e 7.2.2, podemos estudar os sinais dos gráficos de $f(\lambda, x)$ em função de x , como ilustrados na figura 7.24, onde consideramos três valores para λ (um positivo, outro nulo e um negativo). Assim, para $\lambda > 0$, x_{\pm}^* são estáveis e

Figura 7.24: Gráficos de $f(\lambda, x)$



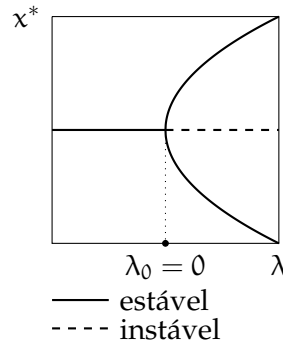
$x^* = 0$ é instável, enquanto que, para $\lambda \leq 0$, $x^* = 0$ é estável. Além disso, para confirmarmos que $\lambda_0 = 0$ é um ponto de bifurcação, basta considerarmos

$$\begin{aligned} f_x(\lambda, x) &= \lambda - 3x^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

juntamente com (7.26),⁹⁴ e o diagrama da figura 7.25.

⁹³Cf. p. 157.

⁹⁴Cf. p. 160.

Figura 7.25: Diagrama de bifurcação para $\dot{x} = \lambda x - x^3$ 

7.2.4 Múltiplas bifurcações

Para $(\lambda, x) \in (-1, 1) \times (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, considere

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) &= \lambda x + x^3 - x^5 \\ &= x(\lambda + x^2 - x^4) \end{aligned}$$

em (7.24) e, para obtermos cada ponto fixo x^* ,

$$f(\lambda, x) = 0.^{95}$$

Portanto, temos

$$x^* \in \left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}} \right\},$$

onde $x^* = 0$ existe para $-1 < \lambda < 1$, enquanto que os outros pontos fixos existem para $-\frac{1}{4} \leq \lambda < 1$.⁹⁶ Note que, nesse caso, a condição $x^* \in (-3/2, 3/2)$ continua válida.⁹⁷ Consequentemente:

- $-1 < \lambda < -\frac{1}{4} \implies$ existe um único ponto fixo: $x^* = 0$;
- $\lambda = -\frac{1}{4} \implies$ existem três pontos fixos: $x^* \in \left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$;

⁹⁵Cf. p. 157.

⁹⁶De fato, considere a equação biquadrada $x^4 - x^2 - \lambda = 0$ e a mudança de variáveis $x^2 = t$. Logo,

$$t^2 - t - \lambda = 0 \implies t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2},$$

para $1+4\lambda \geq 0$ e $-1 < \lambda < 1$.

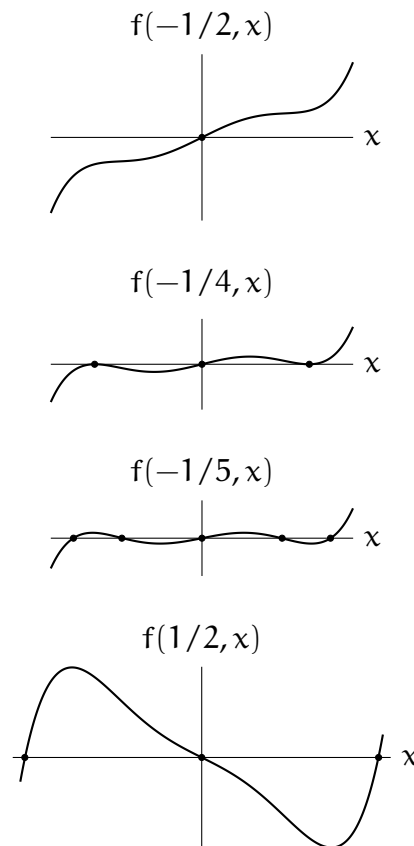
⁹⁷De fato,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \leq \lambda < 1 &\iff 0 \leq 1+4\lambda < 5 \\ &\iff 0 \leq \sqrt{1+4\lambda} < \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- $-\frac{1}{4} < \lambda < 0 \implies$ existem cinco pontos fixos para cada tal λ ;
- $\lambda = 0 \implies$ existem três pontos fixos: $x^* \in \{0, \pm 1\}$;
- $0 < \lambda < 1 \implies$ existem três pontos fixos para cada tal λ : $x^* \in \left\{0, \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}}\right\}$.

(Assim, o número de pontos fixos muda três vezes quando λ varia entre -1 e 1 .)

Agora, como nas três subseções anteriores, queremos analisar a estabilidade dos pontos fixos pelo estudo de sinais do gráfico de $f(\lambda, x)$ em função de x , onde, aqui, consideramos $\lambda \in \{-1/2, -1/4, -1/5, 1/2\}$:

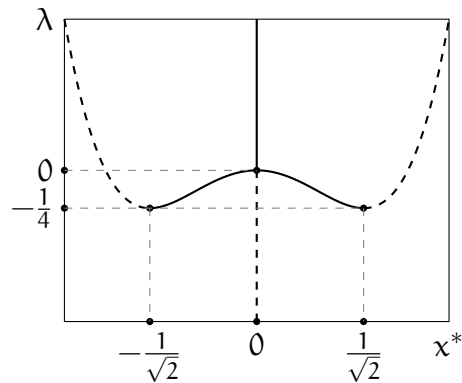


Portanto:

- $x^* = 0$ é instável (resp., estável) para $\lambda < 0$ (resp., $\lambda > 0$);
- cada x^* é instável para $\lambda = -0,25$;
- os pontos fixos mais distantes (resp., próximos) de $x^* = 0$ são instáveis (resp., estáveis) para $-0,25 < \lambda \leq 0$;
- os pontos fixos não nulos são estáveis para $0 < \lambda < 1$.

Por outro lado, para os candidatos à ponto de bifurcação, considere $f_x(\lambda, x) = 5x^4 - 3x^2 - \lambda$ e note que

$$f_x(0,0) = 0 \text{ e } f_x\left(-\frac{1}{4}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Figura 7.26: Diagrama de bifurcação para $\dot{x} = \lambda x + x^3 - x^5$ 

Toda essa análise, juntamente com as equações $x = 0$ e $\lambda + x^2 - x^4 = 0$, acarretam o diagrama de bifurcação da figura 7.26, onde $(x^*, \lambda) \in \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) \times (-1, 1)$.⁹⁸

7.2.5 Bifurcações para campos vetoriais planares

Observações

- Para essas bifurcações, considere

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

na *edo* (7.22).⁹⁹

- Analogamente à equação (7.26),¹⁰⁰ (λ, X^*) é candidato a ponto de bifurcação quando

$$\begin{cases} f(\lambda, X^*) = 0, \\ \det(Df(\lambda, X^*)) = 0, \end{cases} \quad (7.27)$$

conforme [Kaper e Engler (2013)].

Exemplo

Ao considerarmos

$$f(\lambda, X) = \begin{pmatrix} \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 \\ x_1^2 - 2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

na equação (7.23),¹⁰¹ os pontos fixos são obtidos via

$$\begin{cases} \lambda - x_1^2 + x_1 x_2 = 0, \\ x_1^2 - 2x_1 x_2 = 0. \end{cases} \quad (7.28)$$

⁹⁸Note que os eixos do diagrama de bifurcação dessa figura estão invertidos em relação aos dos diagramas de bifurcação das três subseções anteriores!

⁹⁹Cf. p. 156.

¹⁰⁰Cf. p. 160.

¹⁰¹Cf. p. 157.

Portanto, pela adição das equações de (7.28), temos

$$\lambda - x_1 x_2 = 0,$$

ou seja,

$$x_1 x_2 = \lambda, \tag{7.29}$$

que, ao ser substituída na primeira equação de (7.28), resulta em

$$x_1^2 - 2\lambda = 0.$$

Consequentemente, para $\lambda > 0$, temos

$$x_1 = \pm \sqrt{2\lambda}$$

e, por (7.29),

$$\begin{aligned} x_2 &= \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda}} \\ &= \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{2}, \end{aligned}$$

onde x_1 e x_2 têm o mesmo sinal. Assim, o ponto fixo

$$\begin{aligned} X^* &= \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \\ &= \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2\lambda} \\ \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

existe apenas para $\lambda \geq 0$. Dentre esses pontos, os possíveis pontos de bifurcação são obtidos pela segunda equação de (7.27). Portanto, como

$$Df(\lambda, X^*) = \begin{pmatrix} -2x_1^* + x_2^* & x_1^* \\ 2x_1^* - 2x_2^* & -2x_1^* \end{pmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned} \det Df(\lambda, X^*) &= 2(x_1^*)^2 \\ &= 4\lambda \end{aligned}$$

é nulo apenas para $\lambda = 0$, isto é, para $X^* = 0$. Agora, para analisarmos a geometria do espaço de fase nas proximidades da origem (em função de λ), sejam T e D como na figura 7.15.¹⁰² Logo, para $\lambda > 0$,

$$D = \det Df(\lambda, X^*)$$

é positivo, como acabamos de calcular. Além disso,

$$\begin{aligned} T &= \text{traço}(Df(\lambda, X^*)) \\ &= -4x_1^* + x_2^* \\ &= \mp \frac{7}{2} \sqrt{2\lambda} \leq 0 \end{aligned}$$

e o discriminante

$$T^2 - 4D = \left(\frac{49}{2} - 16 \right) \lambda$$

é positivo. Consequentemente, como $D > 0$, os autovalores de $Df(\lambda, X_{\pm}^*)$ são reais (de mesmo sinal) e os pontos fixos X_{\pm}^* são nós: X_+^* é estável ($T < 0$) e X_-^* é instável ($T > 0$).

¹⁰²Cf. p. 153.

Bifurcação de Hopf

Considere a *edo*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1. \end{cases} \quad (7.30)$$

Nesse caso, ao considerarmos

$$f(\lambda, X) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2 \\ x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

na equação (7.23),¹⁰³ os pontos fixos são obtidos via

$$\begin{cases} x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) + x_2 = 0, \\ x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) - x_1 = 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Assim, da soma da primeira equação de (7.32), multiplicada por x_1 , com a segunda, multiplicada por x_2 , podemos obter, via coordenadas polares, ou seja,

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2,$$

a equação

$$r^2(\lambda - r^2) = 0.$$

Portanto, para os pontos fixos (em coordenadas polares), as seguintes condições são válidas:

- $r^* = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $r^* = 0$ é o único ponto fixo para $\lambda < 0$;
- $r^* \in \{0, \sqrt{\lambda}\}$ para $\lambda > 0$.¹⁰⁴

Para analisarmos a estabilidade/instabilidade desses pontos fixos, vamos considerar as derivadas temporais (t) de

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ e } \theta = \arctan(x_2/x_1).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt} \left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} (2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2)(\lambda - x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} \\ &= \frac{r^2(\lambda - r^2)}{r}, \end{aligned}$$

¹⁰³Cf. p. 157.

¹⁰⁴Como $r \geq 0$, desconsideramos a raiz $-\sqrt{\lambda}$.

onde utilizamos (7.30) na penúltima igualdade, de cima para baixo. Note que

$$\dot{r} = \lambda r - r^3$$

está associada à bifurcação forquilha da subseção 7.2.3, com r no lugar de x e diagrama de bifurcação sem o ramo $r = -\sqrt{\lambda}$.¹⁰⁵ Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{d}{dt}(\arctan(x_2/x_1)) \\ &= \frac{1}{1 + (x_2/x_1)^2} \cdot \frac{\dot{x}_2 x_1 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \frac{-x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} \\ &= -1\end{aligned}$$

(onde, na penúltima igualdade, de cima para baixo, utilizamos (7.30)), cuja solução é dada por

$$\theta(t) = -t + \text{cte},$$

com cte constante. Assim, em coordenadas cartesianas, isto é,

$$x_1 = r \cos \theta \text{ e } x_2 = r \sin \theta,$$

os pontos fixos são dados por

$$\begin{aligned}X^* &= \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} \cos(-t + \text{cte}) \\ \sin(-t + \text{cte}) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

que é a origem, para $\lambda = 0$, e uma circunferência (órbita periódica circular) de centro na origem e raio $\sqrt{\lambda}$, para $\lambda > 0$.¹⁰⁶ Além disso, pela análise do ponto de bifurcação (em coordenadas polares) que fizemos, $X^* = (0, 0)$ para $\lambda < 0$ e resta analisarmos a dinâmica das órbitas nas proximidades da origem, linearizando $f(\lambda, X)$ em torno dela e utilizando a figura 7.15.¹⁰⁷ Portanto, como o polinômio característico de

$$Df(\lambda, X^*) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

é dado por

$$\det(Df(\lambda, X^*) - \ell I) = \ell^2 - 2\lambda\ell + \lambda^2 + 1,¹⁰⁸$$

seus autovalores são dados por

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{2\lambda \pm 2i}{2} \\ &= \lambda \pm i.\end{aligned}$$

Além disso, como $\Delta = -4$, $T = 2\lambda$ e $D = \lambda^2 + 1$, temos:

¹⁰⁵Uma figura representativa desse diagrama pode ser obtida da figura 7.25, sem o ramo $x = -\sqrt{\lambda}$.

¹⁰⁶Note que o raio dessa circunferência é (estritamente) crescente para $\lambda > 0$.

¹⁰⁷Cf. p. 153.

¹⁰⁸ I representa a matriz identidade 2×2 .

- $\lambda < 0 \implies$ as órbitas espiralam, aproximando-se do ralo $X^* = (0, 0)$;
- $\lambda > 0 \implies$ as órbitas limitadas pela órbita periódica (circular) espiralam, afastando-se da fonte $X^* = (0, 0)$ e aproximando-se da órbita periódica “por dentro”, ou seja, pelo interior da região delimitada por ela. Todas as outras órbitas espiralam ao redor da órbita periódica, “por fora”.

Para uma visualização tridimensional dessa bifurcação, confira a figura 5.8 da página 73 de [Kaper e Engler (2013)]. Se acrescentarmos, a essa figura, um plano perpendicular ao semi-eixo positivo dos valores de λ , teremos uma dinâmica similar a da figura 7.17 da página 156 desse capítulo.

7.3 De volta ao modelo de duas caixas

O sistema (6.17),¹⁰⁹ representado como uma *edo* vetorial de primeira ordem no exemplo da página 128,¹¹⁰ será reduzido a um sistema bidimensional e analisado sob o prisma das seções 7.1 e 7.2.

7.3.1 Stommel

Embora existam muitos tipos de modelos de duas caixas (*2-box models*), semelhantes ao dessa seção, faremos uma análise baseada no modelo original, idealizado pelo oceanógrafo e meteorologista americano Henry Stommel em 1961.¹¹¹ Assim como Stommel, vamos considerar que H (ou seja, o fluxo virtual de sal na superfície oceânica para compensar a evaporação na caixa 2, precipitação na caixa 1 e troca salina com as fronteiras (das caixas)) seja nulo e trocas de sal e temperatura ocorram apenas com as fronteiras. Portanto, as constantes c e d continuam positivas e (6.17) é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(-T^* - T_1) + |q|\Delta T, \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T^* - T_2) - |q|\Delta T, \\ \frac{dS_1}{dt} &= d(-S^* - S_1) + |q|\Delta S, \\ \frac{dS_2}{dt} &= d(S^* - S_2) - |q|\Delta S.\end{aligned}\tag{7.33}$$

7.3.2 Reduzindo a dimensão

Médias das anomalias

Para reduzirmos (7.33) a um sistema bidimensional, podemos considerar, como na subseção 6.3.1, as médias

$$\frac{T_1 + T_2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{S_1 + S_2}{2}.\tag{112}$$

¹⁰⁹Cf. p. 120.

¹¹⁰Agora é o momento adequado para o leitor revisar as hipóteses da construção do modelo *cth* da subseção 6.3.1.

¹¹¹Cf. [Stommel (1961)].

¹¹²Cf. (6.11), p. 118.

Portanto, como na subseção supracitada, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) &= \frac{\dot{T}_1 + \dot{T}_2}{2} \\ &= (-c) \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right) &= \frac{\dot{S}_1 + \dot{S}_2}{2} \\ &= (-d) \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right).\end{aligned}$$

Assim, para cte constante e $t \rightarrow \infty$, as médias

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = cte e^{-ct} \quad \text{e} \quad \frac{S_1 + S_2}{2} = cte e^{-dt}$$

convergem para 0,¹¹³ que não é uma informação relevante, pois, como $H = 0$, o sistema não é fechado, em outras palavras, há perda de massa (salinidade) e energia (térmica).

Bidimensionalização via $\Delta T = T_2 - T_1$ e $\Delta S = S_2 - S_1$

Nesse caso, o sistema (7.33) é dado por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Delta T) &= \dot{T}_2 - \dot{T}_1 \\ &= c(2T^* - \Delta T) - 2|q|\Delta T, \\ \frac{d}{dt}(\Delta S) &= \dot{S}_2 - \dot{S}_1 \\ &= d(2S^* - \Delta S) - 2|q|\Delta S,\end{aligned}\tag{7.34}$$

onde

$$q = \kappa(\alpha\Delta T - \beta\Delta S),\tag{7.35}$$

por (6.16).¹¹⁴

7.3.3 Adimensionalizando as variáveis, alterando a escala de tempo e diminuindo o número de constantes

Na subseção 6.3.1, onde o sistema é reduzido à uma *edo* escalar, concomitantemente, suas variáveis e constantes são adimensionalizadas e suas quantidades são diminuídas, para que a análise do sistema também seja simplificada. Adotaremos, agora, o mesmo procedimento. Contudo, munidos do conhecimento adquirido nesse capítulo, não precisamos transformar (7.34) numa *edo* escalar. Assim, para

$$x := \frac{\Delta S}{2S^*}, \quad y := \frac{\Delta T}{2T^*} \quad \text{e} \quad \tau := ct,$$

¹¹³Confira a seção 1.1.

¹¹⁴Cf. p. 119.

podemos reescrever (7.34) como

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{dx}{d\tau} \\
 &= \frac{1}{c(2S^*)} \left(\frac{d}{dt}(\Delta S) \right) \\
 &= \frac{d}{c}(1-x) - \left| \frac{2q}{c} \right| x \\
 &= \delta(1-x) - |f|x, \\
 \dot{y} &= \frac{dy}{d\tau} \\
 &= \frac{1}{c(2T^*)} \left(\frac{d}{dt}(\Delta T) \right) \\
 &= 1-y - \left| \frac{2q}{c} \right| y \\
 &= 1-y - |f|y,
 \end{aligned}$$

onde

$$\delta = \frac{d}{c} \text{ e } f = -\frac{2q}{c},$$

sendo que f depende de x e y , pois, ao considerarmos as constantes

$$R := \frac{\beta S^*}{\alpha T^*} \text{ e } \lambda := \frac{c}{4\alpha T^* \kappa},$$

temos

$$\begin{aligned}
 Rx - y &= \lambda f \\
 &= \lambda f(x, y).
 \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 Rx - y &= \frac{\beta S^*}{\alpha T^*} \cdot \frac{\Delta S}{2S^*} - \frac{\Delta T}{2T^*} \\
 &= \frac{\beta \Delta S - \alpha \Delta T}{2\alpha T^*} \\
 &= \frac{1}{2\alpha T^* \kappa} (\kappa(\beta \Delta S - \alpha \Delta T)) \\
 &= \frac{c}{4\alpha T^* \kappa} \left(-\frac{2q}{c} \right) \\
 &= \lambda f,
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a expressão (7.35) na penúltima igualdade, de cima para baixo.

7.3.4 Sumarizando o sistema a ser estudado

λ , R e δ são os parâmetros do sistema (não linear) dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \delta(1-x) - |f|x, \\
 \dot{y} &= 1-y - |f|y,
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

com

$$f = \frac{Rx - y}{\lambda}. \quad (7.37)$$

Observações

- Pode ser demonstrado que o campo de vetores do sistema (7.36) é lipschitziano. Portanto, como vimos na subseção 7.1.2, qualquer *pvi* associado a esse sistema tem solução única.
- $\delta \in (0, 1]$, pois, em geral, a energia térmica (calor) varia numa escala de tempo (c) maior do que a da variação salina (d).
- $S^*T^* > 0$, isto é, $R > 0$. Além disso, diferenças de salinidade (resp., temperatura) prevalecem sobre diferenças de temperatura (resp., salinidade) caso a condição $R > 1$ (resp., $R < 1$) seja válida.

7.3.5 Soluções de equilíbrio (pontos fixos)

Claramente, as coordenadas dos pontos fixos de (7.36) são dadas por

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\delta}{\delta + |f^*|}, \\ y^* &= \frac{1}{1 + |f^*|}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

onde

$$f^* = \frac{Rx^* - y^*}{\lambda}. \quad (7.39)$$

Consequentemente, os pontos fixos podem ser obtidas via

$$\begin{aligned} \lambda f^* &= \phi(f^*) \\ &= \frac{\delta R}{\delta + |f^*|} - \frac{1}{1 + |f^*|} \end{aligned}$$

isto é, pelas interseções dos gráficos de

$$f \mapsto \lambda f \text{ e } f \mapsto \phi(f),^{115} \quad (7.40)$$

para diferentes escolhas dos parâmetros λ , R e δ , conforme ilustramos na figura 7.27,¹¹⁶ onde as abscissas dos pontos fixos 'a', 'b', 'c', 'd', 'e' e 'g' são dadas, respectivamente, por $f_a^* \approx -1,068$, $f_b^* \approx -0,307$, $f_c^* \approx 0,219$, $f_d^* \approx 0,16$, $f_e^* \approx 0,618$ e $f_g^* \approx 1,7913$.

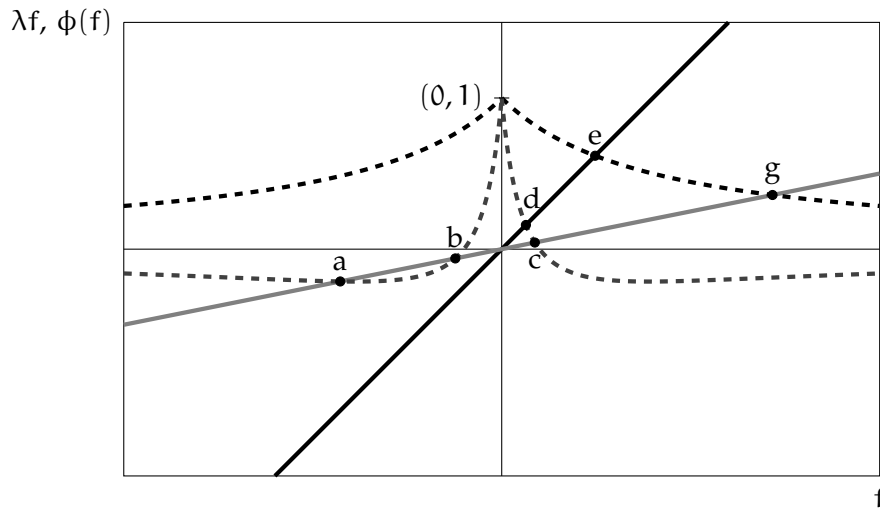
A seguir, justificaremos (analiticamente) o padrão, não apenas dos gráficos da figura 7.27, mas também dos gráficos de (7.40) que podem ser obtidos para outros valores admissíveis dos parâmetros (adimensionais) λ , R e δ . Antes, porém, consideraremos algumas de suas características gerais.

Para cada tripla (λ, R, δ) admissível, $\phi(0) = R - 1$ é o valor máximo de $\phi(f)$ e existe, no mínimo, um ponto de interseção. Esse ponto sempre tem ordenada f^* positiva, tais como

¹¹⁵Note que, como $\phi(f)$ é uma função par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

¹¹⁶Essa figura é similar à figura 6 de [Stommel (1961)] e à figura 6.1 da página 80 de [Kaper e Engler (2013)].

Figura 7.27: Gráficos de λf e $\phi(f)$ para $\lambda = 1$ (linha preta contínua), $\lambda = \frac{1}{5}$ (linha cinza contínua), $R = 2$, $\delta = 1$ (linha preta tracejada) e $\delta = \frac{1}{6}$ (linha cinza tracejada)



os pontos 'c', 'd', 'e' e 'g' supracitados. Contudo, os parâmetros R e δ podem ser escolhidos de modo que exista algum f tal que $\phi(f) = 0$ (ou seja, o gráfico de $\phi(f)$ intercepte o eixo horizontal da figura 7.27) e, nesse caso, algum valor suficientemente pequeno do parâmetro λ acarretará o surgimento de mais dois pontos de interseção.¹¹⁷ Esses dois pontos têm ordenadas f^* negativas, como os pontos 'a' e 'b' supracitados. Uma condição necessária para a existência de três pontos de interseção é que $\phi(f)$ seja negativa para algum valor positivo de f . Nesse caso, como $\phi(f)$ é contínua e decrescente no primeiro quadrante, temos $\phi(f) = 0$ e isso ocorre exatamente em

$$f = \delta(R - 1)/(1 - \delta R) \quad (7.41)$$

positivo. Conseqüentemente, como δ é positivo,¹¹⁸ uma das condições seguintes é válida:

$$\begin{aligned} \cdot R > 1 \text{ e } \delta R < 1; \\ \cdot R < 1 \text{ e } \delta R > 1. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Assumiremos a validade da primeira condição de (7.42),¹¹⁹ que pode ser reescrita como

$$0 < \delta < \delta R < 1 < R. \quad (7.43)$$

Portanto, estamos assumindo que diferenças de salinidade prevalecem sobre diferenças de temperatura.¹²⁰

Justificativa analítica para o comportamento gráfico na figura 7.27

Caso ϕ_+ seja a restrição de ϕ aos valores não negativos de f , isto é,

$$\phi_+(f) = \frac{\delta R}{\delta + f} - \frac{1}{1 + f}, \quad f \geq 0,$$

¹¹⁷Confira a figura 7.27 e o exemplo que começa na página 175.

¹¹⁸Confira a segunda observação da subseção 7.3.4.

¹¹⁹Nesse caso, como o numerador de (7.41) é positivo, temos $\delta R - \delta > 0$.

¹²⁰Confira a terceira observação da subseção 7.3.4.

e (7.43) seja válida, as seguintes propriedades são verdadeiras:

- $\phi_+(0) > 0$;
- $\phi'_+(0) < 0$;
- $\phi_+(f) < 0$ para f suficientemente grande.

De fato:

$$\begin{aligned}\phi_+(0) &= \frac{\delta R}{\delta} - 1 \\ &= R - 1 \\ &> 0 \quad (\text{pois } R > 1); \\ \left. \frac{d\phi_+}{df} \right|_{f=0} &= -\frac{\delta R}{(\delta + f)^2} + \frac{1}{(1 + f)^2} \Big|_{f=0} \\ &= -\frac{\delta R}{\delta^2} + 1 \\ &= -\frac{R}{\delta} + 1 \\ &< 0 \quad (\text{pois } R > \delta); \\ \lim_{f \rightarrow \infty} \phi_+(f) &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\delta R(1 + f) - (\delta + f)}{(\delta + f)(1 + f)} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{(\delta R - 1)f + \delta R - \delta}{f^2 + (\delta + 1)f + \delta} \\ &= \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{\frac{\delta R - 1}{f}}{1} \\ &= 0^- \quad (\text{pois } \delta R < 1).\end{aligned}$$

Note que o ponto 'c' (da figura 7.27), obtido para $\lambda = \frac{1}{5}$, $R = 2$ e $\delta = \frac{1}{6}$, é consistente com as propriedades supracitadas. De fato, o gráfico de ϕ curva-se na direção de 'c' (com "concavidade para cima"),¹²¹ cruza o eixo f e continua curvando-se até aproximar-se assintoticamente do eixo f .¹²² Assim, como λ é positivo, os gráficos de (7.40) tem um único ponto de interseção no primeiro quadrante.

Um exemplo de bifurcação no plano $\lambda \times f^*$ para R e δ constantes

Podemos considerar qualquer um dos três parâmetros do sistema como parâmetro de bifurcação. Aqui, λ representará esse parâmetro e os valores de R e δ serão mantidos constantes. Isso significa que apenas a "potência" da *cth* estará variando, enquanto que as anomalias (de temperatura e salinidade) das fronteiras das caixas, juntamente com a razão entre as taxas de variação das trocas das anomalias entre as caixas e suas fronteiras, permanecerão inalteradas. Por exemplo, se $\delta = \frac{1}{6}$ e $R = \frac{3}{2}$, então a equação $\lambda f = \phi(f)$ tem (exatamente) duas soluções negativas (resp., uma solução negativa) $f = f^*$ para cada $\lambda \in (0, \frac{4}{5})$ (resp., para

¹²¹ Isso é consistente com as duas primeiras propriedades.

¹²² Isso é consistente com a última propriedade.

$\lambda = \frac{4}{5}$). De fato, como

$$\begin{aligned}\lambda f &= \phi(f) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6} - f} - \frac{1}{1 - f} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1-6f}{3}} - \frac{1}{1-f} \\ &= \frac{3(1-f) - 2(1-6f)}{2(1-6f)(1-f)} \\ &= \frac{9f+1}{2(6f^2-7f+1)},\end{aligned}$$

podemos obter as raízes negativas f^* de

$$p(\lambda, f) = 12\lambda f^3 - 14\lambda f^2 + (2\lambda - 9)f - 1$$

para, por exemplo,

$$\lambda \in \left\{ \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5} \right\},$$

ou seja, os zeros negativos das equações cúbicas dadas por

$$\begin{aligned}0,6f^3 - 0,7f^2 - 8,9f - 1 &= 0, \\ 1,2f^3 - 1,4f^2 - 8,8f - 1 &= 0, \\ 12f^3 - 14f^2 - 43f - 5 &= 0, \\ 3,6f^3 - 4,2f^2 - 8,4f - 1 &= 0, \\ 24f^3 - 28f^2 - 41f - 5 &= 0, \\ 6f^3 - 7f^2 - 8f - 1 &= 0, \\ 36f^3 - 42f^2 - 39f - 5 &= 0, \\ 8,4f^3 - 9,8f^2 - 7,6f - 1 &= 0 \text{ e} \\ 48f^3 - 56f^2 - 37f - 5 &= 0.\end{aligned}$$

Esses zeros são dados por

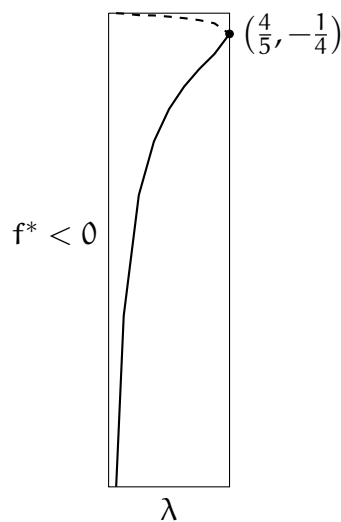
$$\begin{aligned}f^* &\approx -3,246, -0,113, \\ f^* &\approx -2,115, -0,116, \\ f^* &\approx -1,316, -0,126, \\ f^* &\approx -0,961, -0,128, \\ f^* &\approx -0,747, -0,136, \\ f^* &\approx -0,598, -0,146, \\ f^* &\approx -0,482, -0,159, \\ f^* &\approx -0,383, -0,180 \text{ e} \\ f^* &= -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

respectivamente. Além disso, note que $\lambda = \frac{4}{5}$ é um candidato a ponto de bifurcação, pois, para $(\lambda, f) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{4})$, temos

$$\begin{cases} p(\lambda, f) = 0; \\ \frac{\partial p}{\partial f} = 0. \end{cases}$$

Essa análise é corroborada pelo diagrama de bifurcação da figura 7.28, sendo que a instabilidade (ramo tracejado) e a estabilidade (ramo contínuo) são decorrentes da análise que faremos na subseção 7.3.6.

Figura 7.28: Diagrama de bifurcação



Um pouco acima do ramo tracejado, existe um ramo horizontal contínuo, que não está ilustrado nessa figura, representando os pontos fixos positivos.¹²³

7.3.6 Dinâmica na vizinhança de (x^*, y^*)

Nos cálculos vindouros, os sinais “de cima” (resp., “de baixo”) de \pm , \mp , \leq e \geq estarão relacionados ao sinal “de cima” (resp., “de baixo”) da hipótese $f^* \geq 0$.

Primeiramente, por (7.36) e (7.37),¹²⁴ temos

$$Df(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -(\delta + |f^*|) \mp \frac{Rx^*}{\lambda} & \pm \frac{x^*}{\lambda} \\ \mp \frac{Rx^*}{\lambda} & -(1 + |f^*|) \pm \frac{y^*}{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

¹²³Confira a figura 6.3, p. 82, de [Kaper e Engler (2013)], onde R e o parâmetro de bifurcação são iguais ao nossos ($3/2$ e $4/5$, resp.), enquanto que $\delta = 4/5$.

¹²⁴Cf. p. 172.

De fato, o cálculo das entradas da diagonal secundária da matriz (7.44) é trivial. Por outro lado, as entradas da diagonal principal dessa matriz são obtidas via

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(\delta(1-x) - |f|x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta - \delta x \mp \frac{1}{\lambda} (Rx^2 - xy) \right) \\
 &= -\delta \mp \frac{1}{\lambda} (2Rx - y) \\
 &= -\delta \mp \frac{1}{\lambda} ((Rx - y) + Rx) \\
 &= -\delta - \left(\pm \frac{Rx - y}{\lambda} \right) \mp \frac{Rx}{\lambda} \\
 &= -(\delta + |f|) \mp \frac{Rx}{\lambda} \text{ e} \\
 \frac{\partial}{\partial y}(1 - y - |f|y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - y \mp \frac{1}{\lambda} (Rxy - y^2) \right) \\
 &= -1 \mp \frac{1}{\lambda} (Rx - 2y) \\
 &= -1 \mp \frac{1}{\lambda} ((Rx - y) - y) \\
 &= -1 - \left(\pm \frac{Rx - y}{\lambda} \right) \pm \frac{y}{\lambda} \\
 &= -(1 + |f|) \pm \frac{y}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Tipos de soluções de equilíbrio

Caso denotemos a matriz (7.44) por A , podemos considerar Δ , T e D como na figura 7.15.¹²⁵ Logo, por (7.38) e (7.39),¹²⁶ temos

$$\begin{aligned}
 T &= -\delta - 1 - 2|f^*| - \left(\pm \left(\frac{Rx^* - y^*}{\lambda} \right) \right) \\
 &= -\delta - 1 - 2|f^*| - |f^*| \\
 &= -(1 + \delta + 3|f^*|) < 0, \\
 D &= \delta + \delta|f^*| + |f^*| + |f^*|^2 \pm \left(\frac{Rx^*}{\lambda} - \frac{\delta y^*}{\lambda} \right) + |f^*| \left(\pm \frac{Rx^* - y^*}{\lambda} \right) \\
 &= \delta(1 + |f^*|) + |f^*| + 2|f^*|^2 \pm \left(\frac{Rx^*}{\lambda} - \frac{\delta y^*}{\lambda} \right) \pm \left(-\frac{y^*}{\lambda} + \frac{y^*}{\lambda} \right) \\
 &= \delta(1 + |f^*|) + 2|f^*| + 2|f^*|^2 \pm (1 - \delta) \frac{y^*}{\lambda} \\
 &= \delta(1 + |f^*|) + 2|f^*| + 2|f^*|^2 \pm \frac{1 - \delta}{\lambda(1 + |f^*|)}
 \end{aligned}$$

¹²⁵Cf. p. 153.

¹²⁶Cf. p. 173.

e, assim,

$$\begin{aligned}\Delta &= T^2 - 4D \\ &= (1 + \delta)^2 + 6(1 + \delta)|f^*| + 9|f^*|^2 - 4\delta(1 + |f^*|) - 8|f^*| - 8|f^*|^2 \mp \frac{4(1 - \delta)}{\lambda(1 + |f^*|)} \\ &= 1 - 2\delta + \delta^2 - 2(1 - \delta)|f^*| + |f^*|^2 \mp \frac{4(1 - \delta)}{\lambda(1 + |f^*|)} \\ &= (1 - \delta - |f^*|)^2 \mp \frac{4(1 - \delta)}{\lambda(1 + |f^*|)}.\end{aligned}$$

· Caso $f^* > 0$:

$$D = \delta(1 + f^*) + 2f^* + 2(f^*)^2 + \frac{1 - \delta}{\lambda(1 + f^*)}$$

é positivo, pois $0 < \delta < 1$.¹²⁷ Consequentemente, caso

$$\Delta = (1 - \delta - f^*)^2 - \frac{4(1 - \delta)}{\lambda(1 + f^*)}$$

seja negativo (resp., positivo), (x^*, y^*) será um ralo (resp., nó estável).¹²⁸

· Caso $f^* < 0$:

No intervalo $(-\infty, 0)$,

$$\begin{aligned}D &= D(f^*) \\ &= \delta(1 - f^*) - 2f^* + 2(f^*)^2 - \frac{1 - \delta}{\lambda(1 - f^*)}\end{aligned}$$

é decrescente, pois a parábola

$$p(f) = 2f^2 - 2f + \delta(1 - f)$$

e a hiperbóle

$$h(f) = -\frac{1 - \delta}{\lambda(1 - f)}$$

são decrescentes no intervalo supracitado, e muda de sinal em algum f localizado entre as duas soluções negativas da equação $\lambda f = \phi(f)$,¹²⁹ digamos $f_a^* < f_b^* < 0$.¹³⁰ Portanto, $a = (x_a^*, y_a^*)$ é um equilíbrio estável ($D > 0$) e $b = (x_b^*, y_b^*)$ é um ponto de sela ($D < 0$).

Essa análise pode ser corroborada numericamente. Por exemplo, para a escolha de parâmetros $R = 2$, $\delta = \frac{1}{6}$ e $\lambda = \frac{1}{5}$,¹³¹ os autovalores de A são dados por:

¹²⁷Cf. (7.43), p. 174.

¹²⁸O caso $\Delta = 0$ ((x^*, y^*) é um nó degenerado/estrelado) é uma anomalia. De fato, fixados os parâmetros λ , R e δ , ele ocorre para um único valor positivo de f^* .

¹²⁹Veja a subseção 7.3.5.

¹³⁰Note que, como D é decrescente e

$$\lim_{f^* \rightarrow -\infty} D = +\infty,$$

a mudança de sinal supracitada ocorre caso

$$\lim_{f^* \rightarrow f_b^*} D < 0.$$

¹³¹Cf. fig. 7.27, p. 174.

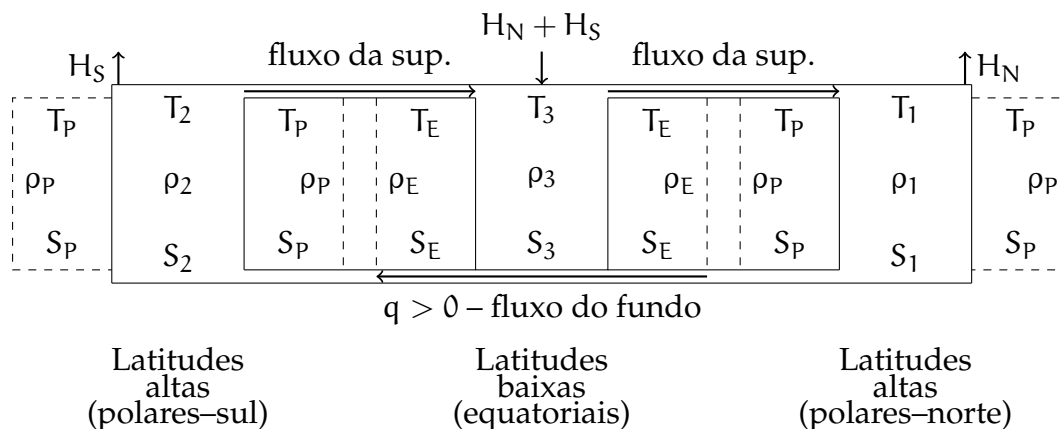
- a. $-3,596$ e $-0,764$, aprox., para $f^* = f_a^* \approx -1,068$;
- b. $-2,850$ e $0,760$, aprox., para $f^* = f_b^* \approx -0,307$;
- c. $-0,911 \pm 1,822i$, aprox., para $f^* = f_c^* \approx 0,219$.

Consequentemente, como ‘a’ é um nó estável, ‘b’ é um ponto de sela e ‘c’ é um ralo,¹³² esse modelo *cth* é representativo da ocorrência de dois tipos distintos de estabilidade. De fato, por (7.41) e (7.42),¹³³ ‘a’ representa o *modo T*, onde as diferenças de temperatura prevalecem sobre as de salinidade e o fluxo do fundo da caixa flui do polo norte para o equador,¹³⁴ enquanto que ‘c’ representa o tipo oposto, onde o fluxo flui do equador para o polo norte, dito *modo S*. Além disso, para determinados valores dos parâmetros do sistema, podem ocorrer mudanças instantâneas na dinâmica dos fluxos entre as caixas, em outras palavras, mudanças climáticas repentinas são inerentes ao sistema supracitado. Por exemplo, quando ‘a’ e ‘b’ deixam de existir para valores de λ um pouco maiores do que $1/5$,¹³⁵ temos uma mudança do modo T para o S, pois resta apenas o ponto ‘c’, após essa pequena perturbação de λ .

7.3.7 Um modelo de três caixas para a *cth*

O modelo das duas caixas que acabamos de analisar, baseado em [Stommel (1961)], é uma simplificação da *cth* do atlântico norte. Para uma modelagem (simplificada) da *cth* “de polo a polo”, isto é, bi-hemisférica, podemos acrescentar uma caixa “polar” à esquerda da caixa “equatorial” da figura 6.6,¹³⁶ representando um polo diferente do da caixa “polar” já existente, e considerar que o “cano” de passagem do fluxo do fundo conecta diretamente as caixas polares, sem passar pela caixa equatorial, e o “cano” de passagem do fluxo da superfície conecta as três caixas, conforme a figura 7.29, onde as temperaturas, salinidades e

Figura 7.29: 3-box model para a *cth* bi-hemisférica



¹³²Para uma representação do espaço de fase desse modelo, para esses valores dos parâmetros, confira a figura 7 de [Stommel (1961)], reproduzida na figura 6.2 da página 81 de [Kaper e Engler (2013)].

¹³³Cf. p. 174.

¹³⁴Confira a figura 6.6 da página 116.

¹³⁵Confira a figura 7.27 da página 174.

¹³⁶Cf. p. 116.

densidades das fronteiras das caixas são consideradas constantes, indexadas com P ou E,¹³⁷ as compensações salinas (como as do modelo das duas caixas da subseção 6.3.1) estão denotadas por $H_{N,S}$ e estamos supondo que:

- A massa d'água contida nos “canos” supracitados é desprezível;
- São válidas as mesmas leis e constantes físicas do modelo das duas caixas supracitado, com uma exceção: a direção do fluxo é de um polo ao outro, devido as diferenças de densidades;¹³⁸
- $T_E > T_P$.

Vinte e um anos após o *2-box model* de Stommel, um modelo similar ao da figura 7.29 foi proposto em [Rooth (1982)] e, mais de duas décadas depois, retomado e ampliado em [Rahmstorf (1995)] e [Scott, Marotzke e Stone (1999)]. Esses modelos bi-hemisféricos são representados por sistemas 6×6 , ao invés do sistema 4×4 dado por (6.10).¹³⁹ Por exemplo, se q é dado como em (6.9),¹⁴⁰ com T_2 e S_2 , agora, relacionadas à “caixa polar sul”, então as *edos* que modelam o sistema da figura 7.29 são dadas por:

- Caso $q > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= c(T_P - T_1) + q(T_3 - T_1), \\ \dot{T}_2 &= c(T_P - T_2) + q(T_1 - T_2), \\ \dot{T}_3 &= c(T_E - T_3) + q(T_2 - T_3), \\ \dot{S}_1 &= -H_N + d(S_P - S_1) + q(S_3 - S_1), \\ \dot{S}_2 &= -H_S + d(S_P - S_2) + q(S_1 - S_2), \\ \dot{S}_3 &= H_N + H_S + d(S_E - S_3) + q(S_2 - S_3); \end{aligned}$$

- Caso $q < 0$:

$$\begin{aligned}\dot{T}_1 &= c(T_P - T_1) + |q|(T_2 - T_1), \\ \dot{T}_2 &= c(T_P - T_2) + |q|(T_3 - T_2), \\ \dot{T}_3 &= c(T_E - T_3) + |q|(T_1 - T_3), \\ \dot{S}_1 &= -H_N + d(S_P - S_1) + |q|(S_2 - S_1), \\ \dot{S}_2 &= -H_S + d(S_P - S_2) + |q|(S_3 - S_2), \\ \dot{S}_3 &= H_N + H_S + d(S_E - S_3) + |q|(S_1 - S_3). \end{aligned}$$

Nesses dois casos, a resposta da pergunta “De onde está vindo o fluxo?” encontra-se nas parcelas onde aparecem q ou $|q|$ e, além disso, o número de variáveis pode ser reduzido (de seis para quatro) via

$$\begin{aligned}T_N &:= T_3 - T_1, \\ T_S &:= T_3 - T_2, \\ S_N &:= S_3 - S_1 \text{ e} \\ S_S &:= S_3 - S_2, \end{aligned}$$

¹³⁷Diferentemente da notação adotada para o modelo das duas caixas, não estamos asteriscando essas constantes!

¹³⁸Como na figura 6.6, a circulação “horária” da figura 7.29 representa o caso $q > 0$.

¹³⁹Cf. p. 118.

¹⁴⁰Cf. p. 117.

resultando num sistema de *edos* escrito em termos de diferenças de temperaturas e salinidades entre a caixa equatorial e as caixas de latitudes mais altas. De fato, para $q > 0$,¹⁴¹ temos o sistema

$$\begin{aligned}
 q &= \kappa[\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)] \\
 &= \kappa[\alpha(T_2 - T_3 + T_3 - T_1) - \beta(S_2 - S_3 + S_3 - S_1)] \\
 &= \kappa[\alpha(T_N - T_S) - \beta(S_N - S_S)], \\
 \dot{T}_N &= \dot{T}_3 - \dot{T}_1 \\
 &= c(T_E - T_3) - qT_S - c(T_P - T_1) - qT_N \\
 &= c(T_E - T_P - T_N) - q(T_S + T_N), \\
 \dot{T}_S &= \dot{T}_3 - \dot{T}_2 \\
 &= c(T_E - T_3) - qT_S - c(T_P - T_2) - q(T_1 - T_3 + T_3 - T_2) \\
 &= c(T_E - T_P - T_S) - q(2T_S - T_N), \\
 \dot{S}_N &= \dot{S}_3 - \dot{S}_1 \\
 &= H_N + H_S + d(S_E - S_3) - qS_S + H_N - d(S_P - S_1) - qS_N \\
 &= 2H_N + H_S + d(S_E - S_P - S_N) - q(S_S + S_N), \\
 \dot{S}_S &= \dot{S}_3 - \dot{S}_2 \\
 &= H_N + H_S + d(S_E - S_3) - qS_S + H_S - d(S_P - S_2) - q(S_1 - S_3 + S_3 - S_2) \\
 &= H_N + 2H_S + d(S_E - S_P - S_S) - q(2S_S - S_N),
 \end{aligned}$$

onde podemos determinar as suas soluções de equilíbrio, o espaço de fase nas vizinhanças dessas soluções, os tipos de bifurcações, etc.¹⁴² Aqui, consideraremos a versão desse sistema apresentada em [Scott, Marotzke e Stone (1999)],¹⁴³ onde as salinidades das caixas da figura 7.29 igualam, imediatamente, as das suas respectivas fronteiras. Nesse contexto, podemos considerar $d = 0$ e, para $q > 0$, obter o subsistema

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_N &= 2H_N + H_S - q(S_S + S_N), \\
 \dot{S}_S &= H_N + 2H_S - q(2S_S - S_N).
 \end{aligned}$$

Portanto, podemos obter as salinidades e o fluxo de equilíbrio (S_N^* , S_S^* e q^*) via

$$\begin{aligned}
 q^*(S_S^* + S_N^*) &= 2H_N + H_S, \\
 q^*(2S_S^* - S_N^*) &= H_N + 2H_S.
 \end{aligned}$$

¹⁴¹A obtenção do sistema com quatro variáveis para $q < 0$ é cobrada num exercício do capítulo 8.

¹⁴²Para uma análise do sistema supracitado, confira os exercícios 5, 6, 7 e 8, pp. 84–86, de [Kaper e Engler (2013)]. Para uma análise do modelo apresentado em [Rooth (1982)], confira o capítulo 11 de [van Aken (2007)].

¹⁴³Que também é uma representação do modelo apresentado em [Rooth (1982)]!

De fato,

$$\begin{aligned} S_S^* &= \frac{H_N + H_S}{q^*}, \\ S_N^* &= \frac{H_N}{q^*} \text{ e} \\ q^* &= \kappa \left[\alpha(T_N^* - T_S^*) + \beta \frac{H_S}{q^*} \right] \\ &= \frac{\alpha\kappa(T_N^* - T_S^*)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 \alpha^2 (T_N^* - T_S^*)^2 + 4\kappa\beta H_S}, \end{aligned}$$

onde usamos a penúltima igualdade, de cima para baixo, para obtermos uma equação quadrática em q^* , que pode ser obtido pela *fórmula de Bhaskara*.¹⁴⁴ Por outro lado, é importante observarmos que, como estamos analisando o caso $q > 0$, em outras palavras, a orientação horária da *cth*, temos $T_N^* < T_S^*$, devido a maior formação de gelo e uma maior densidade de sal ao norte (caixa 1), quando comparadas com as do sul (caixa 2). Consequentemente, apenas a solução positiva de q^* representa um valor fisicamente significativo. Por outro lado, para obtermos esse valor, é necessário determinarmos, previamente, os valores de T_N^* e T_S^* . Logo, para obtermos todas as soluções de equilíbrio e, assim, analisarmos os seus tipos de estabilidade e bifurcações, precisamos resolver (simultaneamente) as três equações anteriores e as equações

$$\begin{aligned} c(T_E - T_P - T_N^*) - q^*(T_S^* + T_N^*) &= 0, \\ c(T_E - T_P - T_S^*) - q^*(2T_S^* - T_N^*) &= 0, \end{aligned}$$

onde $c \approx 12,9 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $T_E \approx 30^\circ \text{C}$ e $T_P \approx 0^\circ \text{C}$ são valores típicos.¹⁴⁵ Além disso, H_N é considerado um múltiplo escalar de $H_S \approx 0,9 \times 10^{-10} \text{ psu/s}$ (e.g., $H_N = \frac{1}{2}H_S$, $H_N = H_S$ e $H_N = \frac{3}{2}H_S$).¹⁴⁶ Nesse contexto, o leitor é incentivado a obter (numericamente) as soluções de equilíbrio supracitadas e analisar seus tipos de estabilidade e bifurcações.¹⁴⁷

¹⁴⁴A obtenção de S_N^* , S_S^* e q^* para $q < 0$ é cobrada num exercício do capítulo 8.

¹⁴⁵Os valores típicos da constante hidráulica (κ) e dos coeficientes de expansão salina e contração térmica (α e β) foram dados na subseção 6.3.1.

¹⁴⁶Cf. [Scott, Marotzke e Stone (1999)].

¹⁴⁷Idem!

Capítulo 8

Exercícios para a parte II

Algumas resoluções apresentadas nesse capítulo estão incompletas e (ou) carecem de detalhes. Cabe ao leitor completá-las e (ou) detalhá-las!

1. No modelo unidimensional de equilíbrio energético terrestre da subseção 6.2.1,¹ utilizamos a equação de Stefan-Boltzmann

$$E_{\text{out}}(T) = \sigma T^4$$

para a energia térmica total irradiada pela Terra, dita *radiação de corpo negro*, por unidades de área superficial, por unidades de tempo, em função da temperatura T , medida em graus Kelvin. Obtenha a equação supracitada, integrando a intensidade $I(\lambda, T)$ da radiação supracitada sobre todos os comprimentos de onda λ , medidos em metros, onde

$$I(\lambda, T) = \pi \left(\frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right),^2$$

com constante de Planck $h \approx 6,625 \cdot 10^{-34}$ (Joules-segundos), constante de Boltzmann $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ (Joules por grau Kelvin) e velocidade da luz $c \approx 3 \cdot 10^8$ (metros por segundo). Nesse contexto, utilize a integral

$$\int_0^\infty x^3 (e^x - 1)^{-1} dx = \frac{1}{15} \pi^4$$

e verifique que

$$\frac{hc}{\lambda kT}$$

é adimensional e que

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \approx 5,670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K}^4 \text{s}}.^3$$

RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que

$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{(h \text{ em Js}) (c \text{ em } \frac{\text{m}}{\text{s}})}{(\lambda \text{ em m}) (k \text{ em } \frac{\text{J}}{\text{K}}) (T \text{ em K})} \text{ em } \frac{\text{Jm}}{\text{mJ}}$$

¹Com acrônimo *meet*, nesse livro.

²Cf. [Kaper e Engler (2013)], p. 23.

³ $\frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$.

é adimensional. Por outro lado, se

$$\begin{aligned} E_{\text{out}}(T) &= \int_0^{\infty} I(\lambda, T) d\lambda \\ &= 2\pi hc^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} x &= \frac{hc}{\lambda kT}, \text{ i.e., } \lambda = \frac{hc}{xkT} \implies \frac{d\lambda}{dx} = -\frac{hc}{x^2 kT} e \frac{1}{\lambda^5} = \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 x^5 \\ \implies E_{\text{out}}(T) &= 2\pi hc^2 \left(\frac{hc}{kT}\right) \left(\frac{k^5 T^5}{h^5 c^5}\right) \left(-\int_{\infty}^0 \frac{x^5}{x^2 (e^x - 1)} dx\right) \\ \implies E_{\text{out}}(T) &= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \left(\frac{1}{15} \pi^4\right) \\ \implies E_{\text{out}}(T) &= \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} T^4. \end{aligned}$$

2. Dados da radiação solar, obtidos via satélites, indicam que a constante solar S_0 varia (aproximadamente) entre $1.365,5 \text{ Wm}^{-2}$ e $1.367,5 \text{ Wm}^{-2}$, dentro de um período aproximado de 11 anos.

- (i) Utilize a equação

$$(1 - \alpha)Q = \varepsilon \sigma T^4,^4$$

com $\alpha = 0,3$ e $\varepsilon = 0,6$, para uma estimativa da variação (ou seja, diferença entre a máxima e a mínima) da temperatura média global T da superfície terrestre.

- (ii) Utilize a equação

$$(1 - \alpha)Q = A + BT,^5$$

com $\alpha = 0,3$, $A = 203,3$ e $B = 2,09$, para uma estimativa da variação da temperatura média global T da superfície terrestre.

- (iii) Explique (conceitualmente, sem fórmulas) porque a variação da temperatura média global da superfície terrestre pode ser menor do que as calculadas nos itens (i) e (ii) supracitados.⁶

RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que, aqui, $Q = \frac{S_0}{4}$ varia (aproximadamente) entre $341,375 \text{ Wm}^{-2}$ e $341,75 \text{ Wm}^{-2}$.

- (i) Como $T^* = T^*(Q)$ é estritamente crescente,⁷ T^* varia (aproximadamente) entre

$$\left(\frac{(0,7)(341,375)}{(0,6)(5,67 \cdot 10^{-8})} \right)^{1/4} \approx 289,5002 \text{ K}$$

⁴Confira a subseção 6.2.2.

⁵Para o segundo membro, confira a subseção 6.2.4. Contudo, no primeiro membro, considere α constante.

⁶Na explicação, tente utilizar o conceito *capacidade de calor*, dado no início da seção 6.2.

⁷Cf. (6.5), p. 111.

e

$$\left(\frac{(0,7)(341,75)}{(0,6)(5,67 \cdot 10^{-8})} \right)^{1/4} \approx 289,5797 \text{ K},$$

cuja diferença é (aproximadamente) igual a 0,0795 K.

(ii) Como $T^*(Q) = ((1 - \alpha)Q - A)/B$ é estritamente crescente, T^* varia (aproximadamente) entre

$$\frac{(0,7)(341,375) - (203,3)}{2,09} \approx 17,0634 \text{ graus Celsius}$$

$$\approx 290,2134 \text{ K}$$

e

$$\frac{(0,7)(341,75) - (203,3)}{2,09} \approx 17,1890 \text{ graus Celsius}$$

$$\approx 290,3390 \text{ K},$$

cuja diferença é (aproximadamente) igual a 0,1256 graus Celsius or Kelvin.

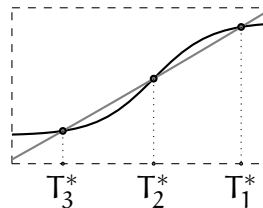
(iii) A *capacidade de calor* do sistema climático terrestre quantifica a quantidade de energia solar incidente necessária para aumentar $T(t)$ em 1 grau Celsius e seu valor real (que assumimos ser constante sobre o planeta inteiro) depende do meio considerado. De fato, a massa d'água terrestre aquece mais lentamente que o restante da superfície do planeta, pois tem de absorver uma grande quantidade de energia antes que a sua temperatura aumente.⁸ Portanto, os oceanos e outras massas d'água, que representam a maior parte da superfície terrestre, levam um longo tempo para sofrer qualquer mudança significativa em sua temperatura, enquanto que o restante do planeta aquece muito mais rapidamente.

3. Considere (apenas) a *edo*

$$C \frac{dT}{dt} = E_{\text{in}} - E_{\text{out}},$$

que modela o *meet*,⁹ e a figura 8.1 para verificar que as temperaturas de equilíbrio $T_{1,3}^*$

Figura 8.1: $E_{\text{in}}(T)$, $E_{\text{out}}(T)$ (em cinza) e temperaturas de equilíbrio



“atraem” temperaturas próximas, enquanto que T_2^* “repele” temperaturas próximas.¹⁰

⁸Capacidade de calor também pode ser definida como a resistência a variações de temperatura.

⁹Cf. (6.1), p. 110.

¹⁰Caso não consiga verificar, confira as considerações (sobre estabilidade/instabilidade de pontos de equilíbrio) que precedem a subseção 6.2.4.

4. Considere a equação de equilíbrio energético terrestre

$$C(dT/dt) = (1 - \alpha(T))Q - \varepsilon\sigma T^4,$$

estudada na subseção 6.2.3, e que T^* é uma solução de equilíbrio dessa equação.

(i) Obtenha a equação diferencial (não linear) para o desvio de temperatura

$$x(t) = T(t) - T^*.$$

(ii) Mostre que, para $T(t)$ suficientemente próxima de T^* , x satisfaz a equação linearizada

$$C(dx/dt) = -Dx,$$

com constante

$$D = \alpha'(T^*)Q + 4\varepsilon\sigma(T^*)^3.$$

Além disso, obtenha a solução geral da equação supracitada.

RESOLUÇÃO

Se $x = T - T^*$ e $x \rightarrow 0$, isto é, $T \rightarrow T^*$, então

$$\begin{aligned} C\dot{x} &= C\dot{T} \\ &= (1 - \alpha(x + T^*))Q - \varepsilon\sigma(x + T^*)^4 \\ &= \left(1 - \alpha(T^*) - \alpha'(T^*)x - \mathcal{O}(x^2)\right)Q - \varepsilon\sigma\left(x^4 + 4x^3T^* + 6x^2(T^*)^2 + 4x(T^*)^3 + (T^*)^4\right) \\ &\approx (1 - \alpha(T^*))Q - \varepsilon\sigma(T^*)^4 - \left(\alpha'(T^*)Q + 4\varepsilon\sigma(T^*)^3\right)x, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade (de cima para baixo), utilizamos a fórmula de Taylor para a função $\alpha(x)$ (em torno de T^*) e, na igualdade aproximada, consideramos apenas termos de primeira ordem em x . Agora, note que

$$(1 - \alpha(T^*))Q - \varepsilon\sigma(T^*)^4 = 0,$$

pois T^* é uma solução (constante) da equação de equilíbrio supracitada. Por outro lado, tendo obtido $\dot{x} = (-D/C)x$, sua solução geral é dada por

$$x = \text{cte } e^{(-D/C)t},$$

que converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$, caso $D > 0$.¹¹

5. Pela *edo* escalar

$$\frac{d}{dt}(\Delta S) = 2(H - \kappa|2\alpha T^* - \beta\Delta S|\Delta S),$$

obtida do modelo da *cth*,¹² e pelas mudanças de variáveis e parâmetros (do modelo supracitado) dadas por

$$\begin{aligned} x &:= \frac{\beta\Delta S}{2\alpha T^*}, \\ \tau &:= 4\alpha\kappa|T^*|t \end{aligned}$$

¹¹ $C > 0$, conforme definido na subseção 6.2.1!

¹²Cf. p. 121.

e

$$\lambda := \frac{\beta H}{4\alpha^2 \kappa T^* |T^*|},$$

obtenha a *edo*

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x,$$

observando-se que $|T^*| = T^*$.¹³ Além disso, determine os seus pontos fixos (para cada $\lambda > 0$) e o tipo de estabilidade de cada um desses pontos.¹⁴

6. Demonstre a equação (7.18), página 147, do caso hiperbólico.¹⁵
7. Faça a análise (do caso hiperbólico) deixada como exercício na página 147. Contudo, diferentemente do sistema (7.17),¹⁶ considere que os termos não lineares de $f(X)$ sejam distintos de múltiplos escalares de potências de x_i , $i = 1, 2$.¹⁷
8. Para demonstrar os resultados enunciados nos exemplos (da subseção 7.1.4) relacionados com a equação planar do pêndulo, obtenha as soluções de equilíbrio da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0,¹⁸$$

seus tipos de estabilidade e analise a linearização dessa equação nas vizinhanças dessas soluções.

RESOLUÇÃO

Por (7.3),¹⁹ temos:

- É fácil ver que $x_2 = 0$ e $\sin x_1 = 0$ acarretam os pontos fixos

$$X^* = (k\pi, 0), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

é a linearização, em torno de $(0, 0)$, de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mathcal{O}(x_1^3), \end{cases} \quad 20$$

¹³Caso não consiga obter a *edo* supracitada, confira os cálculos que precedem a equação (6.21) da página 122.

¹⁴Caso não consiga obter esses pontos e/ou seus tipos de estabilidade, confira os cálculos que sucedem a equação (6.21) da página 122.

¹⁵Confira a demonstração da equação análoga à supracitada, dada no caso parabólico!

¹⁶Cf. p. 146.

¹⁷Por exemplo, os termos não lineares podem ser múltiplos de $x_1 x_2$ e, para $i = 1, 2$, $\cos x_i$, e^{x_i} , $\ln x_i$, etc.

¹⁸Cf. (7.3), p. 129.

¹⁹Idem!

²⁰A notação $\mathcal{O}(x^n)$ é utilizada para representar um erro menor (em valor absoluto) do que alguma constante vezes x^n (para x arbitrariamente próximo de 0). No nosso contexto, a notação supracitada representa a série de Taylor de $-(\sin x_1 - x_1)$ em torno de 0.

temos (pelo caso elíptico da subseção 7.1.6) $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $A = J$ e

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{pmatrix},$$

com a dinâmica (do espaço de fase) descrita como no caso supracitado. Por outro lado, a entrada do canto inferior esquerdo da matriz da linearização muda, caso consideremos a fórmula de Taylor de $-\text{sen } x$ em torno de $\pm\pi$, ou seja,

$$-(x \pm \pi) + \mathcal{O}\left((x \pm \pi)^3\right).$$

Consequentemente, verifica-se que a entrada supracitada é positiva e X^* é um ponto hiperbólico.²¹ Finalmente, como o seno é 2π -periódico, repete-se a dinâmica do intervalo $[-\pi, \pi]$ no intervalo $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, onde k é um inteiro arbitrário.

9. Para o oscilador harmônico linear, estudado no primeiro exemplo da subseção 7.1.2, considere a seguinte afirmação: “A análise dos seus pontos fixos e da dinâmica das órbitas ao redor deles pode ser feita pela linearização (8.1) da equação (planar do pêndulo) supracitada.” Essa afirmação é verdadeira ou falsa? (Justifique a sua resposta.)²²
10. Considere a equação diferencial não autônoma

$$\frac{dx}{dt} = -x + \cos t. \quad (8.2)$$

- (i) Obtenha a solução de (8.2) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$.
- (ii) Obtenha a única solução periódica de (8.2).
- (iii) Verifique que a solução periódica supracitada é para onde as outras (soluções) convergem.

RESOLUÇÃO

(i)

$$x(t) = \text{cte } e^{-t} + \frac{\text{sen } t + \cos t}{2},$$

pelo método do fator integrante,²³ e, se $x(0) = x_0$, então

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + \frac{\text{sen } t + \cos t}{2}. \quad (8.3)$$

- (ii) Para $x_0 = \frac{1}{2}$, (8.3) é periódica e, para qualquer outra condição inicial, (8.3) não é periódica.
- (iii) Para t arbitrariamente grande, a primeira parcela de (8.3) fica arbitrariamente pequena e a segunda fica limitada.

²¹Verifique!

²²**DICA** A equação do oscilador supracitado é dada por (7.5), p. 130. Essa equação, já apresentada na forma linear, é exatamente a *edo* (8.1).

²³Confira o caso III da seção 1.1.

11. A *edo* (8.2) é de ordem um e tem espaço de fase unidimensional e, embora a *edo* (7.21) seja de ordem dois e tenha espaço de fase bidimensional,²⁴ temos uma dinâmica orbital semelhante nos espaços supracitados. Justifique essa afirmação.²⁵

12. Analise o espaço de fase e o diagrama de bifurcação (de modo semelhante à análise feita na subseção 7.2.2) para

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - x^2. \text{ }^{26}$$

13. Analise o espaço de fase e o diagrama de bifurcação (de modo semelhante à análise feita na subseção 7.2.3) para

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + x^3. \text{ }^{27}$$

14. Analise o espaço de fase e o diagrama de bifurcação (de modo semelhante as análises feitas no capítulo 7) para

$$\frac{dx}{dt} = \text{sen } x - \lambda, \quad x \in [-4\pi, 4\pi] \text{ e } \lambda \in [-2, 2].$$

RESOLUÇÃO

Se

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) &= \text{sen } x - \lambda \\ &= 0, \end{aligned}$$

então

$$x^* = \arcsen \lambda \tag{8.4}$$

existe apenas para

$$\lambda = \text{sen } x \in [-1, 1].$$

Portanto, não existem pontos fixos para $\lambda \in [-2, -1) \cup (1, 2]$. Assim, dividiremos o espaço de fase em retângulos de base $[-1, 1]$ e cujas alturas medem π ou, como veremos, $\pi/2$. Essas alturas representam os comprimentos das imagens (ou de metade delas) de (8.4), que é a inversa de $\lambda = \text{sen } x$ restrita a um intervalo (de comprimento π) adequado. Nesse contexto, a estabilidade/instabilidade dos pontos fixos nos retângulos supracitados será analisada da mesma forma que fizemos na subseção 7.2, isto é, transladando-se verticalmente o gráfico de $f(0, x) = \text{sen } x$,²⁸ para estudarmos o sinal do gráfico de $f(\lambda, x) = \text{sen } x - \lambda$ (em função de x), onde $(\lambda, x) \in [-1, 1] \times [-4\pi, 4\pi]$. Por outro lado, lembre-se que $f(\lambda, x)$ muda de sinal em $x = x^*$ e:

- x^* é estável onde $f(\lambda, x)$ muda o sinal de positivo para negativo;²⁹
- x^* é instável onde $f(\lambda, x)$ muda o sinal de negativo para positivo.³⁰

²⁴Cf. pp. 155–156.

²⁵Em cada um dos espaços supracitados, existe uma única órbita periódica e qualquer outra (órbita) converge para ela.

²⁶A bifurcação supracitada é dita *nó-sela*.

²⁷A bifurcação supracitada é dita *forquilha subcrítica*.

²⁸Ou seja, movendo-se esse gráfico para cima ou para baixo.

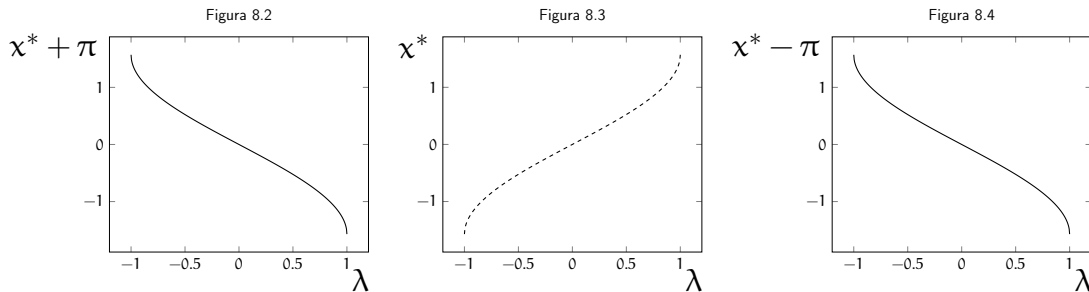
²⁹Isso ocorre num intervalo onde $f(\lambda, x)$ é decrescente.

³⁰Isso ocorre num intervalo onde $f(\lambda, x)$ é decrescente.

Em relação aos pontos de bifurcação, considere $f_x(\lambda, x) = \cos x = 0$. Consequentemente, como $x \in [-4\pi, 4\pi]$, temos

$$x^* \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2} \right\},$$

implicando que $\lambda = \pm 1$ são os candidatos a pontos de bifurcação. Esse fato e as considerações anteriores são fundamentais para podermos esboçar os retângulos supracitados da seguinte maneira:



onde x^* e $x^* \pm \pi$ representam pontos fixos, o eixo vertical da figura 8.3 representa $x^* \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, o eixo vertical da figura 8.2 representa $x^* + \pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ e o eixo vertical da figura 8.4 representa $x^* - \pi \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.³¹ Além disso, caso tracemos o restante do diagrama de bifurcação, veremos que, numa comparação com as figuras 8.2, 8.3 e 8.4, as figuras para:

- $x^* \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ e $x^* \in [-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}]$ são idênticas à figura 8.3;
- $x^* \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ e $x^* \in [-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}]$ são idênticas às figuras 8.2 e 8.4;
- $x^* \in [\frac{7\pi}{2}, 4\pi]$ e $x^* \in [-4\pi, -\frac{7\pi}{2}]$ são idênticas às metades da figura 8.3: a primeira metade relacionada com o primeiro intervalo; a segunda relacionada com o segundo.

15. Verifique que o sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta S) &= d(2S^* - \Delta S) - 2|q|\Delta S, \\ \frac{d}{dt}(\Delta T) &= c(2T^* - \Delta T) - 2|q|\Delta T, \\ q &= \kappa(\alpha\Delta T - \beta\Delta S), \end{aligned}$$

que é uma representação do modelo das duas caixas, pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \delta(1 - x) - |f|x, \\ \dot{y} &= 1 - y - |f|y, \\ f &= \frac{Rx - y}{\lambda}, \end{aligned}$$

³¹Por abuso de notação, os valores destacados nos eixos verticais das figuras 8.2 e 8.4 foram mantidos iguais aos da figura 8.3: $-1, 0$ e 1 .

onde

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta S}{2S^*}, \\y &= \frac{\Delta T}{2T^*}, \\ \tau &= ct, \\ f &= -\frac{2q}{c}, \\ \delta &= \frac{d}{c}, \\ R &= \frac{\beta S^*}{\alpha T^*} \text{ e} \\ \lambda &= \frac{c}{4\alpha T^* \kappa}\end{aligned}$$

representam, de cima para baixo, quatro mudanças de variáveis e três mudanças de parâmetros.³²

16. Considerando-se a restrição da função ϕ (do modelo das duas caixas do capítulo 7) à $[0, \infty)$, dada por

$$\phi(f) = \frac{\delta R}{\delta + f} - \frac{1}{1 + f},$$

onde $0 < \delta < \delta R < 1 < R$, verifique que:³³

- (i) $\phi(0) > 0$;
- (ii) $\phi'(0) < 0$;
- (iii) $\phi(f) < 0$ para f arbitrariamente grande.

17. Se $0 < \delta < 1$ e $\lambda > 0$, verifique que a função

$$D : (-\infty, 0) \ni f^* \mapsto D(f^*) = \delta(1 - f^*) - 2f^* + 2(f^*)^2 - \frac{1 - \delta}{\lambda(1 - f^*)} \in \mathbb{R}$$

(que calcula o determinante da matriz (7.44) da linearização da *edo* estudada na seção 7.3, em torno de um ponto fixo (x^*, y^*) com $f^* = \frac{Rx^* - y^*}{\lambda}$ negativo) é decrescente.³⁴

18. Resolva os exercícios propostos em duas notas de rodapé da subseção 7.3.7.³⁵

³²Para uma demonstração, confira a subseção 7.3.3.

³³Para uma verificação, confira a justificativa analítica da página 174.

³⁴Para uma verificação, considere a subseção 7.3.6.

³⁵Faça como no caso $q > 0$ da subseção supracitada!

Referências

- [Stommel (1961)] Stommel, Henry, *Thermohaline Convection with Two Stable Regimes of Flow*, *Tellus*, 13, pp. 224–230, 1961.
- [Rooth (1982)] Rooth, Claes, *Hidrology and Ocean Circulation*, 11, pp. 131–149, 1982.
- [Rahmstorf (1995)] Rahmstorf, Stefan, *Bifurcations of the Atlantic Thermohaline Circulation in Response to Changes in the Hydrological Cycle*, *Nature*, 378, pp. 145–149, 1995.
- [Scott, Marotzke e Stone (1999)] Scott, Jeffery, Marotzke, Jochem e Stone, Peter, *Interhemispheric Thermohaline Circulation in a Coupled Box Model*, *Journal of Physical Oceanography*, 29, pp. 351–365, 1999.
- [Wiggins (2003)] Wiggins, Stephen, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, segunda edição, Springer Verlag, 2003.
- [Hirsch, Smale e Devaney (2004)] Hirsch, Morris, Smale, Stephen e Devaney, Robert, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, segunda edição, Elsevier/AP, 2004.
- [van Aken (2007)] van Aken, Hendrik, *The Oceanic Thermohaline Circulation: An Introduction*, primeira edição, Springer, 2007.
- [Mackenzie (2007)] Mackenzie, Dana, *Mathematics of Climate Change: A New Discipline for an Uncertain Century*, primeira edição, MSRI (Mathematical Sciences Research Institute), Berkeley, Califórnia, 2007.
- [Kaper e Engler (2013)] Kaper, Hans e Engler, Hans, *Mathematics and Climate*, primeira edição, SIAM, 2014.
- [Sternberg (2015)] Sternberg, Shlomo, *Dynamical Systems*, primeira edição revisada e reimpressa, Dover, 2015.
- [Oliveira (2023)] Oliveira, Letícia, *Equações Diferenciais Ordinárias e o Atrator de Lorenz*, trabalho de conclusão de curso (TCC) apresentado como requisito à obtenção do título de bacharel em Matemática Industrial, sob a orientação do Professor José Renato Ramos Barbosa, UFPR, 2023.
- [Barbosa (2023)] Barbosa, José Renato, *A Survival Guide to Mathematics & Climate*, material disponibilizado em https://docs.ufpr.br/~jrrb/Kaper_Engler.pdf, última versão, UFPR, 2023.
- [Barbosa (2024)] Barbosa, José Renato, *Lições de Cálculo de Várias Variáveis Reais*, primeira edição, Editora UFPR, 2024.

[Barbosa (2025)] Barbosa, José Renato, *Lições de Álgebra Linear*, notas de aulas disponibilizadas em https://docs.ufpr.br/~jrrb/JR_AL__1_.pdf, última versão, UFPR, 2025.