

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MANUAL TÉCNICO-DIDÁTICO

CÁLCULO IV - CM044  
VARIÁVEIS COMPLEXAS - CM068  
MÉTODOS II - CM105  
TEORIA RESUMIDA E EXERCÍCIOS

Autor:

Professor José Renato Ramos Barbosa

Chefe do Departamento:

Professor Alexandre Kirilov

1a. versão: 2013

Última versão: 2024

Homepage Acadêmica: [www.ufpr.br/~jrrb](http://www.ufpr.br/~jrrb)



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Parte I : Variáveis complexas</b>	<b>7</b>
2.1	Preliminares . . . . .	7
2.2	Funções holomorfas . . . . .	7
2.2.1	O Logaritmo complexo . . . . .	10
2.2.2	Funções não holomorfas . . . . .	13
2.3	Integração complexa . . . . .	13
2.4	Séries de números complexos . . . . .	27
2.5	Cálculo de integrais reais pelo teorema dos resíduos . . . . .	47
2.5.1	Integrais de tipo $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ , onde $F(\cos \theta, \sin \theta)$ é uma função real, racional (em $\cos \theta$ e $\sin \theta$ ) e finita em $[0, 2\pi]$ . . . . .	47
2.5.2	Integrais reais impróprias de funções $f(x)$ racionais . . . . .	51
2.6	Exercícios e algumas resoluções/sugestões . . . . .	56
2.6.1	Operações elementares dos números complexos . . . . .	56
2.6.2	Derivadas . . . . .	61
2.6.3	Integrais . . . . .	64
2.6.4	Séries de Taylor, séries de Laurent e resíduos . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Parte II - Séries e transformadas de Fourier</b>	<b>83</b>
3.1	Série(s) de Fourier (SF) . . . . .	83
3.2	Transformada de Fourier (TF) . . . . .	92
3.3	Exercícios . . . . .	107



# Capítulo 1

## Introdução

- A parte 1 (desse manual) cobre o programa da disciplina CM068 (*variáveis complexas*) para os cursos de Matemática e Matemática Industrial, além de (aproximadamente) metade do programa da disciplina CM044 (*cálculo IV*) para os cursos de Física e Engenharia Ambiental da UFPR. A outra metade da CM044, além de grande parte do programa da CM105 (*métodos de matemática aplicada II*), é contemplada na parte 2.
- Para os cursos de Matemática supracitados, em relação às demonstrações dos resultados citados nesse manual, é recomendável uma complementação em livros de *análise complexa* e *séries e transformada de Fourier*.
- Como a matéria, aqui, é dada de forma bastante resumida e sumarizada, é dever do leitor buscar outras fontes. Por exemplo:
  - MATEMÁTICA SUPERIOR PARA ENGENHARIA, Erwin Kryeszic, LTC, 2009, ISBN 978-85-216-1643-6, 9a. edição;
  - INICIAÇÃO À FÍSICA MATEMÁTICA, Juan López Gondar e Rolci Cipolatti, IMPA, 2009, ISBN 978-85-244-0287-6, 1a. edição;
  - FÍSICA MATEMÁTICA, George B. Arfken e Hans J. Weber, Elsevier, 2007, ISBN 978-85-352-2050-6, 1a. edição;
  - CURSO INTRODUTÓRIO À ANÁLISE COMPLEXA COM APLICAÇÕES, Dennis G. Zill e Patrick D. Shanahan, LTC, 2011, ISBN 978-85-216-1809-6, 2a. edição.
- Como iniciaremos nosso estudo por *funções holomorfas*, nas fontes supracitadas podem ser encontradas as propriedades operatórias dos *números complexos*, além da interpretação *vetorial* da adição e da multiplicação desses números, e o estudo de *limites e continuidade das funções complexas*.
- Para revisar *curvas planas parametrizadas*, *conjuntos abertos*, *derivadas parciais*, etc., confira meu livro de *cálculo de várias variáveis reais*, no endereço eletrônico que se encontra na capa desse manual.
- Estudaremos uma parte básica de *edp*, grosso modo, que tem relação com *séries e transformada de Fourier*.
- Agradeço ao colega Professor Raul Prado Raya. Ele, gentilmente, cedeu o que já havia preparado de exercícios para as turmas dele (baseado no excelente livro de *análise complexa* do Steven Krantz). Agradeço, ainda, por discussões produtivas sobre o conteúdo desse manual, ao colega Professor Pedro Anizete Damázio.

- Apreciaria sugestões que possam melhorar a redação ou que corrijam eventuais descuidos (erros de mérito ou de português).

# Capítulo 2

## Parte I : Variáveis complexas

### 2.1 Preliminares

- Para uma introdução/revisão resumida da estrutura algébrica do conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos, confira a seção 5.1.1 do meu livro de *álgebra linear* na minha página acadêmica institucional.<sup>1</sup>
- Caso  $z \in \mathbb{C}$ , ou seja,  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ , denotamos  $\Re(z) = x$  e  $\Im(z) = y$ .
- Uma *função complexa*  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função cujo domínio  $D$  e cuja imagem  $f(D)$  são subconjuntos de  $\mathbb{C}$ .

#### Exemplos

- Se  $f(z) = z_0$ , onde  $z_0$  é uma constante complexa, para cada  $z \in \mathbb{C}$ , então  $D = \mathbb{C}$  e  $f(D) = \{z_0\}$ ;
- Se  $f(z) = z$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ , então  $D = f(D) = \mathbb{C}$ ;
- Se  $f(z) = \bar{z}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ , então  $D = f(D) = \mathbb{C}$ ;
- Se  $f(z) = z^{-1}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  com  $z \neq 0$ , então  $D = f(D) = \mathbb{C} - \{0\}$ ;
- Se  $f(z) = |z|$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ , então  $D = \mathbb{C}$  e  $f(D) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

### 2.2 Funções holomorfas

Dentre as funções estudadas na *análise complexa*, destacam-se as *holomorfas*, isto é, aquelas que são *diferenciáveis* (como funções complexas) e definidas em conjuntos *abertos* em  $\mathbb{C}$ .<sup>2</sup> Diferenciabilidade complexa tem implicações mais fortes que diferenciabilidade real. Por exemplo, pode ser demonstrado que toda função holomorfa pode ser representada como uma *série de potências* em todo *disco* aberto do seu domínio, ou seja, é *analítica*. Em particular, funções holomorfas são *infinitamente diferenciáveis*, que é uma propriedade não satisfeita

<sup>1</sup>Cf. endereço eletrônico na capa desse manual.

<sup>2</sup>Cada elemento  $z$  de um conjunto *aberto*  $A \subset \mathbb{C}$  é caracterizado pela seguinte propriedade:

Caso  $h \in \mathbb{C}$  seja arbitrário e tenha módulo suficientemente pequeno,  $z + h \in A$ .

para as funções diferenciáveis reais.<sup>3</sup> Como veremos, a maioria das funções *elementares* (tais como, as polinomiais, as trigonométricas, as exponenciais e as logarítmicas) são holomorfas.

### Observações (em outras palavras, notações, definições e resultados) iniciais

Doravante, consideraremos que  $D$  é um aberto em  $\mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$  pertencem ao conjunto  $D$ , com  $z$  arbitrário e  $z_0$  fixo,  $f$  representa uma função complexa definida (em  $D$ ) por

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y), \quad (2.1)$$

sendo  $P$  e  $Q$  funções reais nas variáveis reais  $x$  e  $y$ .<sup>4</sup>

#### Exemplo

Seja  $f(z) = z^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Assim,

$$P(x, y) = x^2 - y^2 \text{ e } Q(x, y) = 2xy.$$

**Observação 1 (Holomorfismo e as condições de Cauchy-Riemann)** *Caso a variável  $z - z_0 = h$  seja suficientemente pequena e exista o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

*ele é chamado derivada de  $f(z)$  em  $z_0$ , denotado por  $f'(z_0)$ ,  $f$  é dita holomorfa em  $z_0$  e as condições de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (2.2)$$

*em  $z_0$  são obtidas ao derivarmos ao longo da reta  $y = y_0$ , via*

$$f'(z_0) = P_x(x_0, y_0) + iQ_x(x_0, y_0), \quad (2.3)$$

*e ao longo da reta  $x = x_0$ , via*

$$f'(z_0) = Q_y(x_0, y_0) - iP_y(x_0, y_0). \quad (2.4)$$

*$f$  é holomorfa (em  $D$ ) caso seja holomorfa em cada  $z \in D$ .*

#### Exemplo

<sup>3</sup>Seja

$$f(t) = \begin{cases} t^2/2 & \text{se } t \geq 0; \\ -t^2/2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Assim,  $f'(t) = |t|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Contudo,  $f'$  não é diferenciável em  $t = 0$ .

<sup>4</sup> $P$  e  $Q$  representam funções do cálculo 2.

<sup>5</sup>Caso  $f(z)$  seja uma função complexa arbitrária,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell$  se, e somente se, independentemente do número real  $\varepsilon$  que consideremos, é possível obtermos um número real  $\delta$ , dependente de  $\varepsilon$ , tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Note que  $f'(z_0)$  pode ser calculada por (2.3) ou (2.4) (caso  $f$  seja holomorfa em  $z_0$ ).

**Exemplo** Seja  $f(z) = z^2$  (como no exemplo supracitado). Consequentemente,  $f$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$ , pois existe

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \\ &= 2z_0 \end{aligned}$$

(para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$ ). Por outro lado,  $P_x = 2x = Q_y$ ,  $P_y = -2y = -Q_x$  e

$$\begin{aligned} f'(z) &= P_x + iQ_x \\ &= 2x + 2yi \\ &= 2z. \end{aligned}$$

**Observação 2 (Recíproca da observação 1)** Se  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $Q_x$  e  $Q_y$  existem em cada ponto suficientemente próximo de  $z_0$ , são contínuas em  $z_0$  e satisfazem (2.2) em  $z_0$ , então  $f$  é holomorfa em  $z_0$ .

**Exemplo** A função exponencial

$$z = x + iy \mapsto f(z) = e^z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (2.5)$$

é holomorfa (em  $\mathbb{C}$ ). De fato, como  $P(x, y) = e^x \cos y$  e  $Q(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ , temos

$$P_x = e^x \cos y = Q_y \text{ e } P_y = -e^x \operatorname{sen} y = -Q_x,$$

que são contínuas. Além disso, note que

$$\begin{aligned} f'(z) &= P_x + iQ_x \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

**Observação 3 (Produto de exponenciais)**  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ , onde  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  são números complexos.<sup>6</sup>

**Exemplos** Demonstra-se que somas, diferenças, produtos, quocientes (cujos denominadores não se anulam em  $z_0$ ) e composições de funções holomorfas (quando for possível compô-las) em  $z_0$  também são holomorfas em  $z_0$ . Portanto, as seguintes funções, definidas para cada  $z \in \mathbb{C}$ , são holomorfas (em  $\mathbb{C}$ ):

- $p(z) = z_0 + z_1z + z_2z^2 + \dots + z_nz^n$ , onde  $z_i$  é constante em  $\mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;
- $\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  e  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ .<sup>7</sup>

<sup>6</sup>A demonstração dessa observação é uma consequência direta das fórmulas do seno e do cosseno da soma!

<sup>7</sup>Note que

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z \text{ e } \frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z.$$

## 2.2.1 O Logaritmo complexo

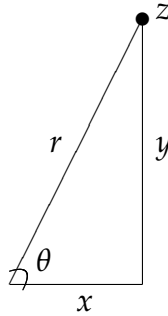
### Representação polar de $z = x + iy$

É dada por

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad (2.6)$$

onde  $(r, \theta)$  é a representação polar de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , conforme ilustrada na figura 2.1.

Figura 2.1: Coordenadas polares de  $(x, y)$ , identificado com  $z = x + iy$



De fato,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . Além disso, note que, por (2.5), (2.6) pode ser escrita como

$$z = r e^{i\theta}. \quad (2.7)$$

#### Exemplo

$e^{i\pi} + 1 = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= 1 \cdot e^{i\pi} \\ &= 1(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\ &= -1. \end{aligned}$$

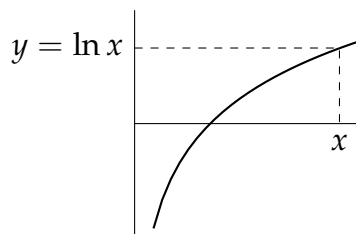
**Definição de  $w = \log z$  via  $z = e^w$**

No caso real, o logaritmo supracitado é a inversa da função exponencial, ou seja,

$$y \in \mathbb{R} \text{ é o logaritmo natural de } x > 0, \text{ isto é, } y = \ln x \iff x = e^y,$$

conforme ilustrada na figura 2.2.

Figura 2.2: Logaritmo natural real



No caso complexo, o domínio da função logarítmica não contém números complexos “negativos” (nem “positivos”), pois,  $\mathbb{C}$  não pode ser ordenado.<sup>8</sup> Além disso, a exponencial

<sup>8</sup>Por exemplo,  $\pm 1$ ,  $\pm i$  e  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$  têm módulo unitário, em outras palavras, representam seis raios vetores da circunferência que tem centro na origem do plano complexo e raio unitário.

complexa é *periódica* de período  $2\pi i$ , pois, para cada número complexo  $z = x + iy$  e cada  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi ij} &= e^{x+i(y+2\pi j)} \\ &= e^x(\cos(y+2\pi j) + i \operatorname{sen}(y+2\pi j)) \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Consequentemente, não é possível obter uma *única* função  $f(z)$  tal que  $e^{f(z)} = z$ , pois, se  $g(z) = f(z) + 2\pi ij$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , então

$$\begin{aligned} e^{g(z)} &= e^{f(z)} e^{2\pi ij} \\ &= e^{f(z)} e^{0+2\pi ij} \\ &= e^{f(z)} e^0 = e^{f(z)}. \end{aligned}$$

Contudo, para  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , definiremos o logaritmo de

$$z = e^w \tag{2.8}$$

por

$$w := \log z \tag{2.9}$$

em domínios  $D \subset \mathbb{C}$  adequados, da seguinte maneira: se

$$w = u + iv, \tag{2.10}$$

então, por (2.7) e (2.8),

$$\begin{aligned} r e^{i\theta} &= e^{u+iv} \\ &= e^u e^{iv}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r = e^u \text{ e } e^{i\theta} = e^{iv},$$

que é equivalente a

$$u = \ln r \text{ e } v = \theta + 2\pi j, j \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Portanto, por (2.9), (2.10) e (2.11),

$$\begin{aligned} \log z &= \ln r + i(\theta + 2\pi j) \\ &= \ln |z| + i \operatorname{arg} z, \end{aligned}$$

onde

$$\operatorname{arg} z \in \{\theta + 2\pi j \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim, para que  $\log z$  seja univocamente determinado, precisamos considerar restrições aos domínios  $D \subset \mathbb{C}$  onde  $\operatorname{arg} z$  seja univocamente determinado. Com esse objetivo, considere, por exemplo, a semirreta fechada a partir da origem

$$L_\phi = \{(t \cos \phi, t \operatorname{sen} \phi) \mid t \leq 0\},$$

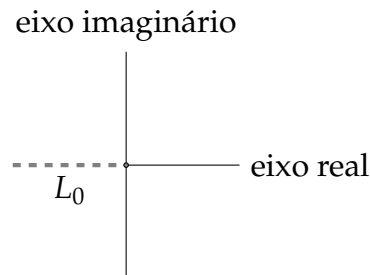
onde  $0 \leq \phi < 2\pi$ , e seja  $D_\phi = \mathbb{C} - L_\phi$ . Logo, para cada  $z \in D_\phi$ , existe um único valor de  $\arg z$ , denotado por  $\arg_\phi z$ , tal que  $\phi < \arg_\phi z < \phi + 2\pi$ .

**Exemplo**  $D_0 = \mathbb{C} - L_0$  representa o plano complexo, ou seja,  $\mathbb{C}$ , menos o semi-eixo real negativo, isto é,

$$L_0 = \{t(1,0) \mid t \leq 0\},$$

conforme a figura 2.3.

Figura 2.3:  $D_0 = \mathbb{C} - L_0$ , com  $L_0$  tracejada



**Observação 4 (Ramos do logaritmo)** *Um ramo do logaritmo é dado pela função*

$$\begin{aligned} f: D_\phi &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = \log z = \ln |z| + i \arg_\phi z \end{aligned}$$

**Exemplo**  $f(z) = \log z$  é holomorfa no domínio  $D_0$  supracitado. De fato, para cada  $z_0 \in D_0$ , temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} \\ &= \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{1}{\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} \\ &= \frac{1}{e^{w_0}} \\ &= \frac{1}{z_0}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, de baixo para cima, utilizamos o exemplo que segue a observação 2.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Cf. p. 9.

## 2.2.2 Funções não holomorfas

### Exemplos

- Pode ser demonstrado que funções holomorfas em  $z_0$  são contínuas em  $z_0$ . Assim, para que uma função não seja holomorfa num dado  $z_0$ , basta que ela não seja contínua em  $z_0$ . Para ilustrarmos essa propriedade, note que, embora o segundo membro de (2.6) seja igual a

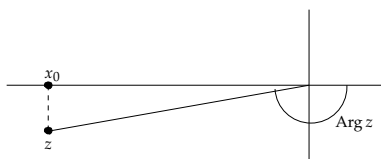
$$r(\cos(\theta + 2\pi j) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi j)), j \in \mathbb{Z},$$

$z$  é unicamente determinado para  $\theta$  no intervalo  $(-\pi, \pi]$ . Esse valor particular de  $\theta$  é dito *valor principal do argumento* (ou simplesmente *argumento*) de  $z$  e é denotado por  $\operatorname{Arg} z$ .

$$z \mapsto \operatorname{Arg} z$$

não é contínua no  $L_0$  supracitado, pois, se  $z_0 = x_0 \in L_0$  é não nulo (como ilustrado na figura 2.4), então, a medida que algum  $z$  pertencente ao terceiro quadrante do plano

Figura 2.4:  $\operatorname{Arg} z$  não é contínua em  $z_0 \in L_0$



aproxima-se de  $z_0$ , no sentido anti-horário, temos  $\operatorname{Arg} z \rightarrow -\pi$ . Contudo, claramente,  $\operatorname{Arg} x_0 = \pi$ .

- $f(z) = \bar{z}$  não é holomorfa (em  $z, \forall z \in \mathbb{C}$ ). De fato, seja  $z \neq z_0$ . Portanto:

$$* y = y_0, \text{ isto é, } z = x + iy_0 \implies \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1;$$

$$* x = x_0, \text{ ou seja, } z = x_0 + iy \implies \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1.$$

Consequentemente,  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  aproxima-se de, no mínimo, dois valores distintos ( $\pm 1$ ) quando  $z \rightarrow z_0$ .

## 2.3 Integração complexa

**Observação 5 (Disco (aberto) positivamente orientado)** Um disco de centro  $z_0 = x_0 + iy_0$  e raio  $r > 0$ , denotado por  $D(z_0, r)$ , é uma representação (em  $\mathbb{C}$ ) do círculo (em  $\mathbb{R}^2$ ) de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ , menos a sua circunferência, isto é,

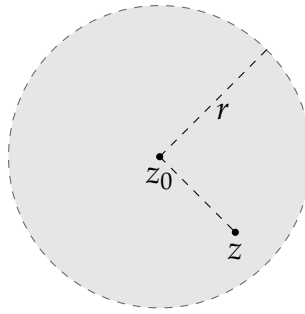
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

conforme a figura 2.5. Se nada for dito em contrário, a circunferência supracitada, dita fronteira do disco e denotada em  $\mathbb{C}$  por

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

será percorrida no sentido anti-horário.

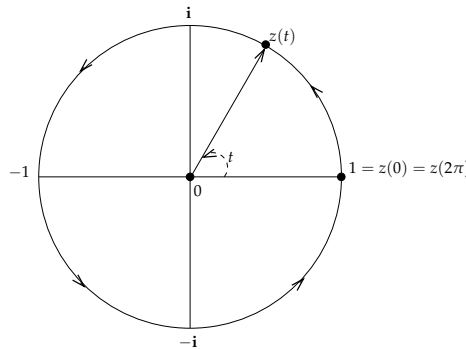
Figura 2.5: Disco aberto



**Observação 6 (Parametrização do disco)**  $z(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é uma parametrização de  $\partial D(z_0, r)$ .<sup>10</sup>

**Exemplo**

Se  $z_0 = 0$  e  $r = 1$ , então  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é uma parametrização de  $\partial D(0, 1)$ , conforme a figura 2.6.

Figura 2.6: Fronteira do disco de centro  $z_0 = 0$  e raio  $r = 1$ , percorrida no sentido anti-horário

**Observação 7 (Integração de curvas parametrizadas)** Seja  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , onde

$$[a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

é uma curva parametrizada integrável. Assim,

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

**Exemplos**

•  $\int_0^1 (t - i)^2 dt = -\frac{2}{3} - i$ . De fato, basta observarmos que, como  $(t - i)^2 = t^2 - 1 - 2ti$ , o primeiro membro da penúltima igualdade é igual a

$$\int_0^1 (t^2 - 1) dt - i \int_0^1 2t dt = \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_0^1 - i \left[ t^2 \right]_0^1.$$

<sup>10</sup> $z(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ ,  $t \in [0, 1]$ , é uma outra parametrização de  $\partial D(z_0, r)$ .

- $\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1)$ . De fato, basta observarmos que o primeiro membro da última igualdade é igual a

$$\int_0^{\pi/2} e^t (\cos t + i \operatorname{sen} t) dt = \int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} e^t \operatorname{sen} t dt$$

e aplicarmos a fórmula da integração por partes do *cálculo 1* em cada parcela da soma do segundo membro da última igualdade.

**Observação 8 (Propriedades das integrais de curvas parametrizadas)** Podem ser demonstradas propriedades análogas às das integrais de funções reais e de curvas parametrizadas em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo:

- $\int_a^b (z_1(t) + z_2(t)) dt = \int_a^b z_1(t) dt + \int_a^b z_2(t) dt$ ;
- $c \in [a, b] \implies \int_a^b z(t) dt = \int_a^c z(t) dt + \int_c^b z(t) dt$ ;
- $\int_a^b (\alpha + i\beta)z(t) dt = (\alpha + i\beta) \int_a^b z(t) dt$ ;
- $\int_a^b z(t) dt = - \int_b^a z(t) dt$ ;
- Para cada  $t \in [a, b]$ , se  $Z(t) = X(t) + iY(t)$  tem derivada  $Z'(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$  contínua, ou seja,  $X'(t) = x(t)$  e  $Y'(t) = y(t)$  são contínuas, então

$$\begin{aligned} \int_a^b z(t) dt &= Z(t) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= X(t) \Big|_{t=a}^{t=b} + iY(t) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= Z(b) - Z(a), \end{aligned}$$

isto é, vale o teorema fundamental do cálculo em  $\mathbb{C}$ .

### Exemplos

- $\int_0^{\pi} e^{it} dt = 2i$ . De fato, considere uma função  $Z(t)$  que satisfaça a expressão  $Z'(t) = e^{it}$ . Por exemplo, considere a primitiva  $Z(t) = \frac{e^{it}}{i}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{it} dt &= \frac{e^{it}}{i} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{i} (e^{i \cdot \pi} - e^{i \cdot 0}) \\ &= -\frac{2}{i}. \end{aligned}$$

- Vamos resolver o exemplo que precede a observação 8, sem integração por partes. Assim, considere uma função  $Z(t)$  que satisfaça a expressão  $Z'(t) = e^{(1+i)t}$ . Por exemplo,

considere a primitiva  $Z(t) = \frac{e^{(1+i)t}}{1+i}$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt &= \frac{e^{(1+i)t}}{1+i} \Big|_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{1}{1+i} (e^{(1+i)\pi/2} - e^{(1+i)0}) \\ &= \frac{1}{2}(1-i)(-1 + ie^{\pi/2}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1). \end{aligned}$$

Note que, dessa integração complexa, podemos calcular, diretamente, duas integrais reais. De fato, por um lado,

$$\int_0^{\pi/2} e^{(1+i)t} dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) + \frac{i}{2}(e^{\pi/2} + 1).$$

Por outro, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{t+it} dt &= \int_0^{\pi/2} e^t e^{it} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt. \end{aligned}$$

Agora, basta compararmos as partes reais e imaginárias dos segundos membros, pois os primeiros membros representam a mesma integral. Logo,

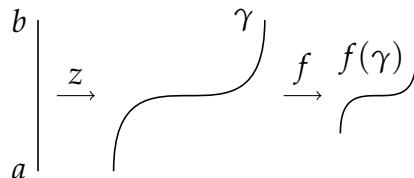
$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1) \text{ e } \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} + 1).$$

**Observação 9 (Integral de linha de uma função complexa)** Caso  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tenha derivada contínua e a função  $f = P + iQ$  (dada em (2.1) da página 8) seja contínua sobre a curva  $\gamma = \{z(t) : t \in [a, b]\}$  (conforme a figura 2.7), temos

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (2.12)$$

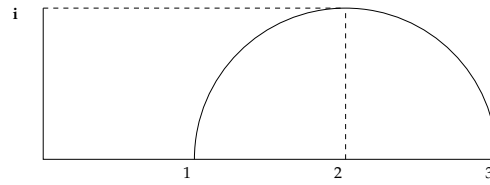
Além disso, pode ser demonstrado que essa integral não depende da parametrização  $z(t)$  de  $\gamma$ .

Figura 2.7:  $f(z(t))$ , onde  $z(t)$  é uma parametrização de  $\gamma$  e  $f$  está restrita a  $\gamma$



### Exemplo

Seja  $\gamma$  a semi-circunferência superior de centro  $z_0 = 2$  e raio  $r = 1$ , conforme a figura ?? . Portanto,  $\int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz = i\pi$ , via parametrizações distintas de  $\gamma$ . Por exemplo, pela

Figura 2.8: Semi-circunferência superior de centro  $z_0 = 2$  e raio  $r = 1$ .

parametrização  $z(t) = 2 + e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + e^{it} - 2} \mathbf{i} e^{it} dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^{\pi} dt \\ &= \mathbf{i}t \Big|_{t=0}^{t=\pi}. \end{aligned}$$

Analogamente, pela parametrização  $z(t) = 2 + e^{i\pi t}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z-2} dz &= \int_0^1 \frac{1}{2 + e^{i\pi t} - 2} \mathbf{i}\pi e^{i\pi t} dt \\ &= \mathbf{i}\pi \int_0^{\pi} dt \\ &= \mathbf{i}\pi t \Big|_{t=0}^{t=1}. \end{aligned}$$

**Observação 10 (Teorema fundamental do cálculo para integral de linha)** *Doravante, assumiremos as mesmas hipóteses da observação 9. Agora, considere:*

- $D$  aberto em  $\mathbb{C}$ ;
- $\gamma \subset D$ ;
- $f = P + \mathbf{i}Q$  holomorfa em  $D$ ;
- $P_x, P_y, Q_x$  e  $Q_y$  contínuas em  $D$ .

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_a^b f'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{z(a)}^{z(b)} f'(u) du \\ &= f(z(b)) - f(z(a)). \end{aligned}$$

### Exemplo

Considere  $f(z) = \log z$ ,  $z \in D_0$ , o ramo do logaritmo (como definido anteriormente) e  $z(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , uma parametrização de  $\partial D(0, 1)$ .<sup>11</sup> Assim, por um lado,

<sup>11</sup>Conforme a observação 6, p. 14.

como  $f'(z) = \frac{1}{z}$  (para cada  $z \in D_0$ ), temos

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(0,1)} f'(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \mathbf{i} e^{it} dt \\ &= \mathbf{i} \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} f(z(2\pi)) - f(z(0)) &= \log e^{i \cdot 2\pi} - \log e^{i \cdot 0} \\ &= 2\pi \mathbf{i} - 0 \\ &= 2\pi \mathbf{i}. \end{aligned}$$

**Observação 11 (Linearidade da integral de linha)** Se  $z_0$  e  $z_1$  são constantes complexas e  $f$  e  $g$  são integráveis como em (2.12), então

$$\int_{\gamma} (z_0 f + z_1 g) = z_0 \int_{\gamma} f + z_1 \int_{\gamma} g.$$

**Exemplo**

$\int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz = \int_{\gamma} z dz + \int_{\gamma} \bar{z} dz$ .<sup>12</sup> De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z + \bar{z}) dz &= \int_a^b [2x(t) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t))] dt \\ &= \int_a^b 2x(t)x'(t) dt + \mathbf{i} \int_a^b 2x(t)y'(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_a^b (x(t) + \mathbf{i}y(t)) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [x(t)x'(t) - y(t)y'(t) + \mathbf{i} (x(t)y'(t) + x'(t)y(t))] dt \\ &= \int_a^b (x(t)x'(t) - y(t)y'(t)) dt + \mathbf{i} \int_a^b (x(t)y'(t) + x'(t)y(t)) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_a^b z (x(t) - \mathbf{i}y(t)) (x'(t) + \mathbf{i}y'(t)) dt \\ &= \int_a^b [x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + \mathbf{i} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))] dt \\ &= \int_a^b (x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) dt + \mathbf{i} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt. \end{aligned}$$

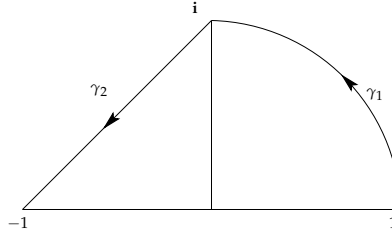
**Observação 12 (Integração sobre curvas contíguas)** Pode ser demonstrado que, caso o ponto final da curva  $\gamma_1$  coincida com o ponto inicial da curva  $\gamma_2$ ,  $\gamma$  denote  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  e possamos integrar como em (2.12), temos

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

<sup>12</sup>Nesse exemplo,  $z_0 = z_1 = 1$ .

**Exemplo** Considere a função identidade  $f(z) = z$  e as curvas  $\gamma_1 = \{z_1(t) = e^{i\frac{\pi}{2}t} : t \in [0, 1]\}$  e  $\gamma_2 = \{z_2(t) = \mathbf{i} + t(-1 - \mathbf{i}) : t \in [0, 1]\}$ , conforme ilustradas na figura 2.9.

Figura 2.9:  $\gamma_2$  é o segmento de reta entre  $z_0 = \mathbf{i}$  e  $z_1 = -1$ , isto é,  $z_2(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;  $\gamma_1$  representa a parte da circunferência de centro 0 e raio 1 no primeiro quadrante



Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} z dz &= \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz \\
 &= \int_0^1 z_1(t) z_1'(t) dt + \int_0^1 z_2(t) z_2'(t) dt \\
 &= \int_0^1 e^{i\frac{\pi}{2}t} \left( \frac{i\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}t} \right) dt + \int_0^1 (-t + \mathbf{i}(1-t))(-1 - \mathbf{i}) dt \\
 &= \frac{i\pi}{2} \int_0^1 e^{i\pi t} dt + \int_0^1 [1 + \mathbf{i}(2t - 1)] dt \\
 &= \frac{i\pi}{2} \left( \frac{e^{i\pi t}}{i\pi} \right) + t + \mathbf{i} (t^2 - t) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(-1 - 1) - 0 \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

**Observação 13 (Estimativa do tamanho da integral)** Se, para todo  $z \in \gamma$ ,  $|f(z)| \leq M$  e  $L$  é o comprimento de  $\gamma$ , então

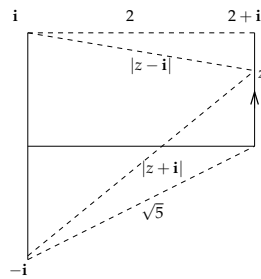
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML.$$

**Exemplo** Para cada  $z \in \gamma$ , seja

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &= \left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \\
 &= \frac{1}{|z + \mathbf{i}|} \cdot \frac{1}{|z - \mathbf{i}|},
 \end{aligned}$$

onde  $\gamma$  representa o segmento de reta entre  $z_0 = 2$  e  $z_1 = 2 + \mathbf{i}$ . Logo, pela geometria da figura 2.10,  $L = 1$  e, para todo  $z \in \gamma$ ,

$$|z + \mathbf{i}| \geq \sqrt{5} \text{ e } |z - \mathbf{i}| \geq 2,$$

Figura 2.10:  $z$  varia em  $\gamma$ 

isto é,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = M.$$

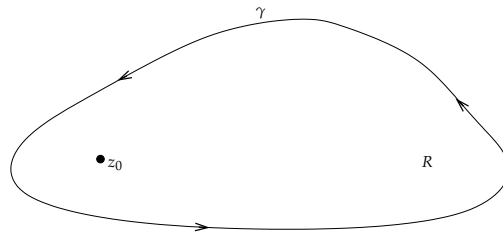
Consequentemente, pela observação 13,

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}.^{13}$$

**Observação 14 (Curvas de Jordan)** *Doravante, caso nada seja dito em contrário,  $\gamma$  representará uma “curva de Jordan”, em outras palavras:*

- $\gamma$  será fechada, ou seja,  $z(a) = z(b)$ ;
- $\gamma$  será simples, isto é, não terá auto-interseção;<sup>14</sup>
- $\gamma$  terá sentido anti-horário;<sup>15</sup>
- $\gamma$  representará a fronteira de uma região  $R$  limitada em  $\mathbb{C}$ , conforme ilustrada na figura 2.11.<sup>16</sup>

Nesse caso, denotaremos  $\int_{\gamma}$  por  $\oint_{\gamma}$ .

Figura 2.11: Região  $R$  limitada por uma curva de Jordan

<sup>13</sup>Em breve, calcularemos essa integral para  $\gamma$  fechada, como definida na observação 14.

<sup>14</sup>Ou seja,  $z$  será injetiva em  $[a, b)$ .

<sup>15</sup>Como convecionamos na observação 5 da página 13.

<sup>16</sup>A limitação de  $R$  significa o seguinte:

$$z_0 \in R \implies \exists r > 0 \text{ tal que } R \subset D(z_0, r) \cup \partial D(z_0, r),$$

conforme a observação 5.

**Observação 15 (Teorema de Cauchy-Goursat)** Se  $f$  é holomorfa em  $\gamma \cup R$ , então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (2.13)$$

### Exemplos

- No lugar da  $f(z)$  de (2.13), podemos considerar qualquer uma das seguintes funções:  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  e  $z^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . De fato, como vimos, essas funções são holomorfas em  $\mathbb{C}$ .
- Caso  $\gamma$  seja a circunferência de centro e raio dados por  $\frac{i}{2}$  e  $\frac{1}{4}$ , respectivamente, a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z(1+z^2)} dz$$

é nula, pois o seu integrando é holomorfo em  $\mathbb{C}$ , exceto nos pontos  $0$  e  $\pm i$ , que não pertencem à  $\gamma \cup R$ .

**Observação 16 (Integração entre curvas de Jordan)** Se  $f$  é holomorfa em  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (R_2 - R_1)$  e  $\gamma_1 \subset R_2$ , conforme a figura 2.12, então

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$

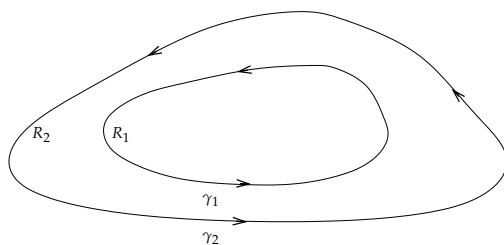


Figura 2.12:  $f(z)$  é holomorfa na região limitada pelas curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$

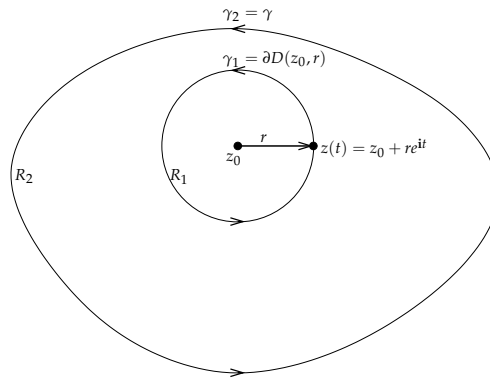
**Observação 17 (Exemplo importante da observação 16)** Sejam  $\gamma_2 = \gamma$ ,  $z_0 \in R_2$  e, para  $r$  suficientemente pequeno,  $\gamma_1 = \partial D(z_0, r)$ , conforme a figura 2.13. Portanto,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i. \quad (2.14)$$

De fato, seja  $z(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , uma parametrização de  $\gamma_1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= it \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Figura 2.13: Agora,  $\gamma_2 = \gamma$  e  $\gamma_1 = \partial D(z_0, r)$ , ao compararmos com a figura 2.12



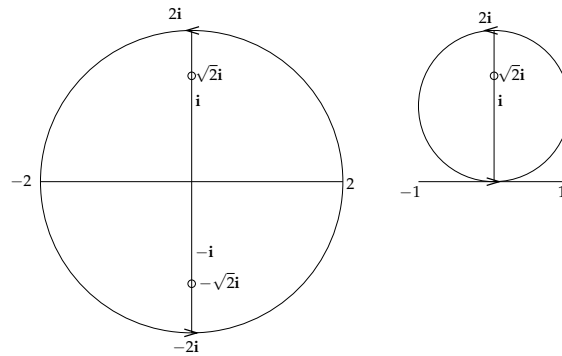
Note que, como

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

não é holomorfa em  $z_0 \in R$ , não podemos aplicar a fórmula (2.13) para a integral (2.14).

### Exemplos

Figura 2.14:  $\partial D(0, 2)$  e  $\partial D(i, 1)$



$$1. \quad \gamma = \partial D(0, 2) \implies \oint_{\gamma} \frac{2z}{z^2+2} dz = 4\pi i;$$

$$2. \quad \gamma = \partial D(i, 1) \implies \oint_{\gamma} \frac{2z}{z^2+2} dz = 2\pi i.$$

De fato, como (pelo método das frações parciais)

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2+2} &= \frac{2z}{(z+i\sqrt{2})(z-i\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{z+i\sqrt{2}} + \frac{1}{z-i\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

temos (veja a figura 2.14),

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D(0,2)} \frac{2z}{z^2+2} dz &= \oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{z+i\sqrt{2}} dz + \oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{z-i\sqrt{2}} dz \\ &= 2\pi i + 2\pi i \\ &= 4\pi i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D(i,1)} \frac{2z}{z^2+2} dz &= \oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{z+i\sqrt{2}} dz + \oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{z-i\sqrt{2}} dz \\ &= 0 + 2\pi i \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

**Observação 18 (Fórmula integral de Cauchy)** Se  $f$  é holomorfa em  $\gamma \cup R$  e  $z_0 \in R$ , então

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Note que, se  $n = 0$ , então, por (2.15),

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (2.16)$$

Além disso, se  $f(z) = 1$  em  $\gamma \cup R$ , então, de (2.16) e (2.15) temos, respectivamente, as fórmulas (2.14) e, para  $m > 1$ ,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z-z_0)^m} dz = 0. \quad (2.17)$$

### Exemplos

1. Queremos calcular  $\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz$ . Assim:

$$\cdot z_0 = 2 \notin \gamma \cup R \text{ e } f(z) = \frac{e^z}{z-2} \xrightarrow{(2.13)} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz = 0;$$

$$\cdot z_0 = 2 \in R \text{ e } f(z) = e^z \xrightarrow{(2.16)} \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2.$$

2. Se  $z_0 = \frac{i}{2} \in R$ , então

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z^3-6}{2z-i} dz &= \oint_{\gamma} \frac{\frac{z^3}{2}-3}{z-z_0} dz \\ &= 2\pi i \left( \frac{z_0^3}{2} - 3 \right), \end{aligned}$$

por (2.16), com  $f(z) = \frac{z^3}{2} - 3$ .

3. Se  $z_0 = i \in R$  e  $f(z) = e^{z^2}$ , temos, por (2.15) (com  $n = 3$ ),

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(z_0) \\ &= \frac{2\pi i}{6} (12i + 8i^3) e^{i^2} \\ &= -\frac{4\pi}{3e}, \end{aligned}$$

onde utilizamos ams  $f'''(z) = (12z + 8z^3) e^{z^2}$ .

4. Exercício 19 da seção 2.6.

### Primeira resolução

Como, via frações parciais,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+2)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} \\ &= \frac{(A+B)z + 2A}{z(z+2)} \end{aligned}$$

acarreta

$$A = \frac{1}{2} \text{ e } B = -\frac{1}{2},$$

temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2z} dz &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-0} dz - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-(-2)} dz \\ &= \frac{1}{2} (2\pi i) - \frac{1}{2} (0) \\ &= \pi i, \end{aligned}$$

onde, na primeira parcela da diferença da primeira igualdade, de cima para baixo, como  $z_0 = 0 \in R$ , utilizamos (2.14) e, na segunda parcela, como  $-2 \notin \gamma \cup R$ , utilizamos (2.13) com  $f(z) = \frac{1}{z+2}$ .

### Segunda resolução

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2z} dz &= \oint_{\gamma} \frac{1}{z(z+2)} dz \\ &= \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{z+2}}{z} dz \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{0+2} \right) \\ &= \pi i, \end{aligned}$$

onde, como  $z_0 = 0 \in R$ , utilizamos (2.16) com  $f(z) = \frac{1}{z+2}$ .

$$5. \gamma = \partial D(0,1) \implies \oint_{\gamma} \frac{e^{i\pi z}}{2z^2 - 5z + 2} dz = \frac{2\pi}{3}.$$

De fato, como

$$\begin{aligned} 2z^2 - 5z + 2 &= 2 \left( z^2 - \frac{5}{2}z + 1 \right) \\ &= 2 \left( z - \frac{1}{2} \right) (z - 2), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{e^{i\pi z}}{2z^2 - 5z + 2} dz &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{\frac{e^{i\pi z}}{z-2}}{z - \frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{i\pi \cdot \frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - 2} \\ &= \pi i \cdot \frac{i}{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, de cima para baixo, como  $z_0 = \frac{1}{2} \in R$ , utilizamos (2.16) com  $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z-2}$ .

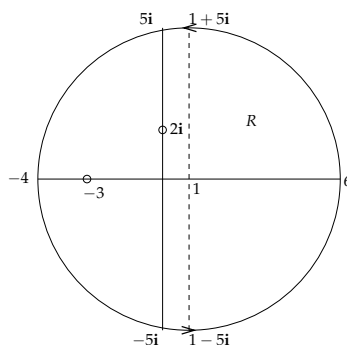
6. Exercício 18 da seção 2.6.

$\gamma = \partial D(1,5)$ , conforme a figura 2.15, e queremos calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta.$$

Portanto, primeiramente, como  $\{2i, -3\} \subset R$ ,<sup>17</sup> note que:

Figura 2.15:  $\gamma = \partial D(1,5)$



$\cdot f(\zeta) = \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} \implies$  (2.13) (com  $\zeta$  no lugar de  $z$ ) não pode ser utilizada, pois  $f(\zeta)$  não é holomorfa nos pontos  $2i$  e  $-3$ ;<sup>18</sup>

<sup>17</sup>De fato,  $|2i - 1| = \sqrt{5} < 5$  e  $|-3 - 1| = 4 < 5$ .

<sup>18</sup>Cf. p. 21.

(2.16) não pode ser utilizada da forma:<sup>19</sup>

$$* \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta+3} d\zeta = 2\pi i f(-3), \text{ onde } f(\zeta) = \frac{\zeta^2+\zeta}{\zeta-2i}, \text{ pois } f \text{ não é holomorfa em } 2i;$$

$$* \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-2i} d\zeta = 2\pi i f(2i), \text{ onde } f(\zeta) = \frac{\zeta^2+\zeta}{\zeta+3}, \text{ pois } f \text{ não é holomorfa em } -3.$$

Consequentemente, pela divisão longa de  $\frac{\zeta^2+\zeta}{(\zeta-2i)(\zeta+3)}$ , como o dividendo  $\zeta^2 + \zeta$  é igual ao divisor  $\zeta^2 + (3 - 2i)\zeta - 6i$ , multiplicado pelo quociente 1, mais o resto  $-2(1 - i)\zeta + 6i$ , temos

$$\frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} = 1 - 2 \cdot \frac{(1 - i)\zeta - 3i}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta &= \oint_{\gamma} d\zeta - 2 \oint_{\gamma} \frac{(1 - i)\zeta - 3i}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta \\ &= -2 \oint_{\gamma} \frac{(1 - i)\zeta - 3i}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta, \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.13) na primeira parcela da diferença das integrais. Agora, para resolvermos a última integral, usaremos a técnica das frações parciais. Assim, como

$$\begin{aligned} \frac{(1 - i)\zeta - 3i}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} &= \frac{A}{\zeta - 2i} + \frac{B}{\zeta + 3} \\ &= \frac{(A + B)\zeta + 3A - 2iB}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} \end{aligned}$$

acarreta

$$\begin{cases} A + B = 1 - i, \\ 3A - 2iB = -3i, \end{cases}$$

podemos multiplicar a primeira equação desse sistema por  $-3$  e somar o produto daí obtido pela segunda equação, para obtermos  $B = \frac{3}{3+2i}$  e  $A = \frac{2-i}{3+2i}$ .<sup>20</sup> Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta &= -\frac{1}{\pi i} \left( \frac{2 - i}{3 + 2i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2i} d\zeta + \frac{3}{3 + 2i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta + 3} d\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{\pi i} \left( \frac{1}{3 + 2i} \right) \left( (2 - i) \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2i} d\zeta + 3 \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta + 3} d\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{\pi i} \left( \frac{1}{3 + 2i} \right) ((2 - i + 3)2\pi i) \\ &= -\left( \frac{1}{3 + 2i} \right) (10 - 2i) \\ &= \frac{-10 + 2i}{3 + 2i}, \end{aligned}$$

onde utilizamos, na terceira igualdade, a fórmula (2.14).<sup>21</sup>

<sup>19</sup>Cf. p. 23.

<sup>20</sup>Podemos obter o valor de  $A$  ao substituirmos o valor  $B$  na primeira equação do sistema.

<sup>21</sup>Cf. p. 21.

**Observação 19 (Demonstração de (2.15))** Via (2.16),<sup>22</sup> podemos demonstrar, por indução sobre  $n$ , a fórmula (2.15).

De fato, o primeiro passo da indução é a demonstração de (2.15) para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz - \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]}{h} \quad (\text{via (2.16)}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{((z - z_0) - ((z - z_0) - h)) f(z)}{(z - (z_0 + h))(z - z_0)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{hf(z)}{(z - (z_0 + h))(z - z_0)} dz \\
 &= \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.
 \end{aligned}$$

Portanto, como a fórmula (2.15) é válida para  $n = 1$ , podemos demonstrá-la para  $n = 2$ . De fato:

$$\begin{aligned}
 f''(z_0) &= (f')'(z_0) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \left[ \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2} dz - \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - z_0)^2} dz \right]}{h} \quad ((2.15) \text{ válida para } n = 1) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{((z - z_0)^2 - ((z - z_0) - h)^2) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{(2(z - z_0)h - h^2) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{1}{h} \cdot \frac{h(2(z - z_0) - h) f'(z)}{(z - (z_0 + h))^2 (z - z_0)^2} dz \\
 &= \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z - z_0) f'(z)}{(z - z_0)^4} dz \\
 &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{(z - z_0)^3} dz.
 \end{aligned}$$

Analogamente, ao supormos que (2.15) é verdadeira para o inteiro positivo  $n$ , podemos demonstrá-la para  $n + 1$ .

## 2.4 Séries de números complexos

Estudaremos, quase que exclusivamente, as *séries de potências* em  $\mathbb{C}$ , que dependem das séries de potências em  $\mathbb{R}$ ,<sup>23</sup> que podem ser revisadas (definição, intervalos de convergência, tes-

<sup>22</sup>Não demonstramos essa fórmula, apenas a enunciamos como caso particular de (2.15) na página 23.

<sup>23</sup>Veremos que, a convergência de séries em  $\mathbb{C}$  depende da convergência de séries em  $\mathbb{R}$  e, em particular, a convergência de séries de potências em  $\mathbb{C}$  depende da convergência absoluta de séries de potências em  $\mathbb{R}$ .

tes/critérios de convergência, etc.) nas minhas notas (de aulas) de *cálculo 3*, disponibilizadas em minha página acadêmica institucional, cujo endereço eletrônico está destacado na capa desse manual.

**Observação 20 (“Definição” de séries de números complexos)** Caso  $n_0$  seja um inteiro não negativo e

$$(z_{n_0}, z_{n_0+1}, z_{n_0+2}, \dots)$$

seja uma sequência em  $\mathbb{C}$ , a expressão

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} z_n &= \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^{n_0+N} z_n \end{aligned} \quad (2.18)$$

representa uma série de números complexos.

### Exemplo

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} + \frac{\mathbf{i}}{n^2} \right) = (1 + \mathbf{i}) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{\mathbf{i}}{9} \right) + \dots$$

**Observação 21 (Parte real e parte imaginária de (2.18))** Demonstra-se que, se  $z_n = x_n + \mathbf{i}y_n$ , onde, para cada  $n \geq n_0$ ,  $x_n$  e  $y_n$  são números reais, então,

$$\sum_{n \geq n_0} z_n < \infty \iff \sum_{n \geq n_0} x_n < \infty \text{ e } \sum_{n \geq n_0} y_n < \infty$$

e, nesse caso,

$$\sum_{n \geq n_0} z_n = \sum_{n \geq n_0} x_n + \mathbf{i} \sum_{n \geq n_0} y_n.$$

### Exemplos

- A série do exemplo anterior é divergente. De fato, embora

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots < \infty,$$

a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

é divergente.<sup>24</sup>

<sup>24</sup>Confira as minhas notas de *cálculo 3* supracitadas.

· Para uma série convergente em  $\mathbb{C}$ , considere

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{\mathbf{i}}{3^n} \right) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} + \mathbf{i} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n} \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) + \mathbf{i} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) \\ &= \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \mathbf{i} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= 2 + \frac{3\mathbf{i}}{2}, \end{aligned}$$

pois, a parte real e a imaginária são séries geométricas, em outras palavras, somas de termos de *progressões geométricas infinitas* com razões no intervalo  $(-1, 1)$ .

**Observação 22 (Séries complexas via séries reais)** *Doravante, para cada inteiro  $n \geq n_0$ , consideraremos apenas a série (2.18) para*

$$z_n = a_n (z - z_0)^n,$$

onde cada coeficiente  $a_n$ , variável  $z$  e constante  $z_0$  pertencem a  $\mathbb{C}$ . Assim, para bem definirmos a série

$$S(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n, \quad (2.19)$$

consideremos a série (de números reais não negativos na variável  $r$ ) associada a (2.19), ou seja,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n| r^n, \quad (2.20)$$

onde  $r = |z - z_0|$ .

**Exemplo** Se  $z_0 = 0$  e, para cada inteiro não negativo,  $a_n = 1$ , (2.19) e (2.20) são dadas, respectivamente, por

$$\sum_{n \geq 0} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (2.21)$$

e

$$\sum_{n \geq 0} r^n = 1 + r + r^2 + \dots, \quad (2.22)$$

onde  $r = |z| \geq 0$ .

**Observação 23 (Intervalo de convergência)** *O intervalo de convergência  $I(S(z))$  da série (2.19) é definido pelo intervalo de convergência da série (2.20), ou seja,*

$$I(S(z)) := \left\{ r \geq 0 : \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty \right\},$$

e é não vazio.<sup>25</sup> Pelas minhas notas de cálculo 3 supracitadas,  $I(S(z))$  é igual a um dos seguintes conjuntos:

---

<sup>25</sup> $0 \in I(S(z))$ .

- (1)  $\{0\}$ ;
- (2)  $[0, r_0)$  ou  $[0, r_0]$ , onde  $r_0$  é positivo;<sup>26</sup>
- (3)  $[0, \infty)$ .

**Exemplo**

Como (2.22) é uma série geométrica de termos não negativos, ela converge para

$$\frac{1}{1-r}$$

em  $[0, 1)$ .<sup>27</sup> Por outro lado, séries geométricas em  $\mathbb{R}$  divergem em  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . Assim, para  $|z| < 1$ , temos que

$$I(S(z)) = [0, 1)$$

é o intervalo de convergência de (2.21). Além disso, assim como para as séries geométricas em  $\mathbb{R}$ , demonstra-se o seguinte resultado para as séries geométricas em  $\mathbb{C}$ :

$$|z| < 1 \implies \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad (2.23)$$

**Observação 24 (Raio de convergência)** O raio de convergência de (2.19), denotado por  $\rho$ , é dado por:

- 0, caso a condição (1) da observação 23 seja válida;
- $r_0$ , caso a condição (2) da observação 23 seja válida;
- $\infty$ , por abuso de notação, caso a condição (3) da observação 23 seja válida.

**Exemplo**

No exemplo anterior,  $\rho = 1$ .

**Observação 25 (Disco de convergência e critérios de convergência)** O disco (aberto)

$$D(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

é o disco de convergência de (2.19), conforme a figura 2.16, sendo vazio para  $\rho = 0$ .

Demonstra-se que:

- A série (2.19):<sup>28</sup>
  - converge absolutamente quando (2.20) converge, isto é,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n| |z - z_0|^n < +\infty$$

para  $|z - z_0| < \rho$ , ou seja,  $z \in D(z_0, \rho)$ ;

<sup>26</sup>Seja  $r_0 > 0$  tal que  $\sum_{n \geq n_0} |a_n| r_0^n < \infty$ . Pelo teste da comparação para séries reais,  $\sum_{n \geq n_0} |a_n| r^n < \infty$  para todo  $r \in [0, r_0]$ .

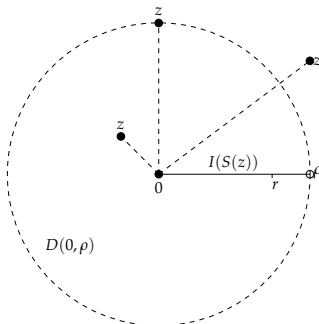
<sup>27</sup>(2.21) é a soma dos termos da progressão geométrica

$$(1, r, r^2, \dots, r^n, \dots)$$

de razão  $r \in [0, 1)$ .

<sup>28</sup>Confira as notas supracitadas.

Figura 2.16: Seja  $z_0 = 0$ .  $S(z)$  converge para  $z \in D(0, \rho)$ ; pode convergir ou divergir para  $z \in \partial D(0, \rho)$ ; diverge para  $z \notin D(0, \rho) \cup \partial D(0, \rho)$



- diverge quando (2.20) diverge, ou seja, quando  $|z - z_0| > \rho$ , isto é,  $z \notin D(z_0, \rho) \cup \partial D(z_0, \rho)$ ;
- pode convergir ou divergir para  $|z - z_0| = \rho$ , ou seja,  $z \in \partial D(z_0, \rho)$ ;

conforme a figura 2.16.

- Na prática, caso todos os coeficientes de (2.19), a partir de um determinado índice  $n$ , sejam não nulos, podemos utilizar o teste da razão para tentarmos obter  $\rho$ , ou seja,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

### Exemplos

Pelo teste da razão supracitado,  $\rho$  é igual a:

- 0 para  $S(z) = \sum_{n \geq 0} n!z^n$ ;
- 1 para  $S(z)$  dada por qualquer uma das séries:  $\sum_{n \geq 0} z^n$ ,  $\sum_{n > 0} \frac{1}{n}z^n$  ou  $\sum_{n > 0} \frac{1}{n^2}z^n$ .<sup>29</sup>

**Observação 26 (Adição e multiplicação de séries)** Sem perda de generalidade, seja  $n_0 = 0$  na série (2.19).<sup>30</sup> Demonstra-se que, se  $\rho$  é o menor entre os raios de convergência de

$$S_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_{1,n} (z - z_0)^n \text{ e } S_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_{2,n} (z - z_0)^n,$$

então, para cada  $z \in D(z_0, \rho)$ ,<sup>31</sup> podemos obter a soma

$$S_1(z) + S_2(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{1,n} + a_{2,n}) (z - z_0)^n$$

e o produto

$$S_1(z) \cdot S_2(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{1,0}a_{2,n} + a_{1,1}a_{2,n-1} + \cdots + a_{1,n-1}a_{2,1} + a_{1,n}a_{2,0}) (z - z_0)^n.$$

<sup>29</sup>Note que, para  $|z| = 1$ , as duas primeiras séries desse item são divergentes, enquanto que a última é convergente.

<sup>30</sup>Cf. p. 29.

<sup>31</sup>Logo,  $|z - z_0| < \rho$ .

**Exemplos**

Para  $|z| < 1$ , temos

$$\sum_{n>0} \frac{n+1}{n^2} z^n = \sum_{n>0} \frac{1}{n} z^n + \sum_{n>0} \frac{1}{n^2} z^n$$

e

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)z^n = \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \sum_{n \geq 0} z^n.$$

**Observação 27 (Derivações sucessivas de (2.19))** Sem perda de generalidade, seja  $n_0 = 0$  em  $S(z)$ .<sup>32</sup> Defina

$$S'(z) := \sum_{n \geq 0} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demonstra-se que as séries  $S(z)$  e  $S'(z)$  têm o mesmo raio de convergência  $\rho$  e, se  $\rho > 0$ , então

$$S'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0},$$

para cada  $z \in D(z_0, \rho)$ . Portanto,  $S(z)$  é holomorfa em  $D(z_0, \rho)$  e, via derivações repetidas, temos  $S(z)$  infinitamente diferenciável e

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Exemplo**

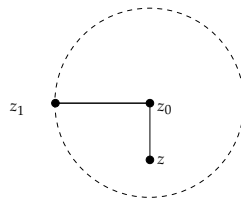
Podemos verificar a validade da observação 27 para o polinômio de grau  $g$  dado por

$$\begin{aligned} S(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_g z^g \\ &= a_0 + a_1 z + \dots + a_g z^g + 0 + 0 + 0 + \dots, \end{aligned}$$

onde  $a_n = 0$  para cada inteiro  $n > g$ .

**Observação 28 (Holomorfismo acarreta analiticidade)** Caso  $f(z)$  seja holomorfa em  $z_0$  e  $z_1$  seja o ponto mais próximo de  $z_0$  onde  $f(z)$  não seja holomorfa, conforme a figura 2.17, temos  $f(z)$  analítica

Figura 2.17:  $D(z_0, |z_1 - z_0|)$



em  $D(z_0, |z_1 - z_0|)$ , isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.24)$$

converge para cada  $z$  tal que  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ .<sup>33</sup>

<sup>32</sup>Cf. (2.19), p. 29.

<sup>33</sup>(2.24) é chamada de série de Taylor.

**Exemplos**

- Para  $f(z) = e^z$  e  $z_0 = 0$ , não existe o  $z_1$  supracitado, pois  $f(z)$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$ . Assim, como  $f^{(n)}(z_0) = 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , temos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

convergente para cada  $z \in \mathbb{C}$ .

- Para  $f(z) = \cos z$  (respectivamente,  $f(z) = \sin z$ ) e  $z_0 = 0$ , não existe o  $z_1$  supracitado, pois  $f(z)$  é holomorfa em  $\mathbb{C}$ . Portanto,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad (\text{respectivamente, } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1})$$

é convergente para cada  $z \in \mathbb{C}$ .

- **[Série binomial]**

Para  $f(z) = (1+z)^m$ ,  $m < 0$  e  $z_0 = 0$ , temos  $z_1 = -1$  e

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{(m-1)m}{2!}z^2 + \dots$$

é convergente para cada  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < 1$ .

**Observação 29 (Holomorfismo e analiticidade são sinônimos)** *Pelas observações 27 e 28, temos uma equivalência entre as funções complexas analíticas e holomorfas.*

**Observação 30 (Séries com índices negativos)** *Doravante, admitiremos a possibilidade do índice  $n$  da série (2.19) (da página 29) assumir valores inteiros negativos. Por exemplo, (2.23) (da página 30) gera outras séries, inclusive algumas com índices como o supracitado.*

**Exemplos**

Para  $|z| < 1$ , temos

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Portanto:

- Para  $|z| > 1$ , ou seja,  $|1/z| < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} z^m; \end{aligned}$$

· Para  $|z| < t_0$ , isto é,  $|z/t_0| < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0 - z} &= \frac{1}{t_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{t_0}} \\ &= \frac{1}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{t_0^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t_0^{-(n+1)} z^n; \end{aligned}$$

· Para  $|z| > t_0 > 0$ , ou seja,  $|t_0/z| < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_0 - z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{t_0}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_0^n}{z^n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} t_0^n z^{-(n+1)} \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} t_0^{-(m+1)} z^m; \end{aligned}$$

· Para  $|z| < 1$ , ou seja,  $|-z| < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-(-z)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \end{aligned}$$

· Para  $|z| > 1$ , ou seja,  $|1/z| < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} (-1)^{-(m+1)} z^m. \end{aligned}$$

**Observação 31 (Série de Laurent (SL) em torno de  $z_0$ )** Para estudarmos os exemplos mais importantes da observação 30, considere duas curvas dadas por

$$\gamma_i = \partial D(z_0, r_i), \quad i = 1, 2,$$

os raios dados por

$$0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty,$$

$f$  analítica na região

$$R = R_2 - (\gamma_1 \cup R_1)$$

e uma curva

$$\gamma \subset R$$

arbitrária, conforme ilustrada na figura 2.18. Assim, para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ , temos a SL

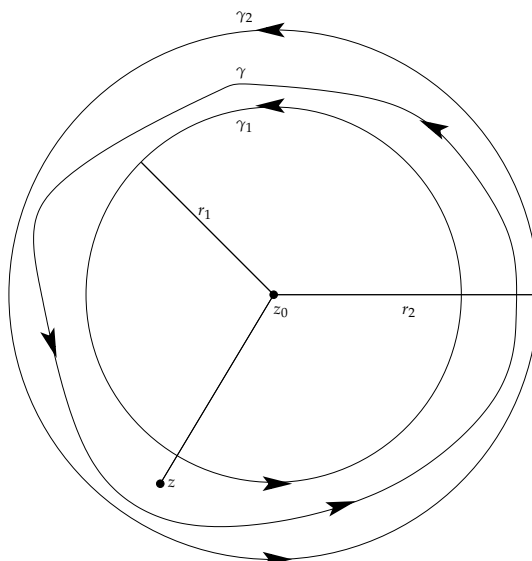
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

para cada inteiro  $n$ .<sup>34</sup>

Figura 2.18:  $R$  é o interior da região  $D(z_0, r_2) - D(z_0, r_1)$



### Exemplos

- Qual a SL de  $f(z) = \frac{1}{(z-1)z}$  em torno de  $z_0 = 0$  para  $0 < |z| < 1$ ?  
Via frações parciais, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} \\ &= -z^{-1} - 1 - z - z^2 - \dots \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)z^n. \end{aligned}$$

<sup>34</sup>Note que, a integral anterior, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , segue de  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  e (2.15), p. 23.

Aqui,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $0 \in R$ ,  $\gamma \subset D(0,1)$  e

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -1, \\ -1 & \text{para } n \geq -1. \end{cases}$$

De fato:

- Se  $n = -2$ , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{-2+2}(w-1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelo teorema de Cauchy-Goursat;<sup>35</sup>

- Se  $-2 \neq n < -1$ , isto é,  $0 \neq n+2 < 1$ , ou seja,  $n+2 < 0$ , então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w^{-(n+2)}}{w-1} dw = 0,$$

pelo teorema supracitado;

- Se  $n \geq -1$ , isto é,  $n+2 \geq 1$ , então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dw}{w^{n+2}(w-1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{w-1}}{w^{n+2}} dw.$$

Para calcularmos o segundo membro da igualdade anterior, consideremos a função  $g(w) = \frac{1}{w-1}$ . Assim,

$$g^{(n+1)}(w) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(w-1)^{n+2}}$$

e, por (2.15),<sup>36</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\frac{1}{w-1}}{w^{n+2}} dw &= \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

**Pergunta:** Qual a SL de  $f(z)$  para  $|z| > 1$ ?

<sup>35</sup>Cf. p. 21.

<sup>36</sup>Cf. p. 23.

- Via frações parciais, temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{2+z-z^2} \\ &= \frac{3}{(1+z)(2-z)} \\ &= \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z}. \end{aligned}$$

Logo, pela série geométrica (2.23),<sup>37</sup> temos três casos:

**I.** Seja  $|z| < 1$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui,  $z_0 = 0$ ,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$  e

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1)^n + 2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

**II.** Seja  $1 < |z| < 2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui,  $z_0 = 0$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$  e

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{-(n+1)} & \text{para } n \leq -1, \\ 2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

**III.** Seja  $|z| > 2$ . Assim,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-(n+1)} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-2^{-(n+1)}) z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \end{aligned}$$

Aqui,  $z_0 = 0$ ,  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = \infty$  e

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{-(n+1)} - 2^{-(n+1)} & \text{para } n \leq -1, \\ 0 & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

---

<sup>37</sup>Cf. p. 30.

- Qual a SL de  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)(z-5)}$  em torno de  $z_0 = 1$ ?<sup>38</sup>

Via frações parciais, temos

$$f(z) = \frac{1}{8} \frac{1}{z-1} + \left(-\frac{3}{4}\right) \frac{1}{z-3} + \frac{5}{8} \frac{1}{z-5}.$$

Vamos analisar cada uma das parcelas dessa soma:

**I parcela:**  $\frac{1}{z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,1}(z-1)^n$ , para  $z \neq 1$ , e

$$a_{n,1} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -1, \\ 1 & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

**II parcela:**

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} \underbrace{\frac{t=z-1}{z-1-2}}_{\equiv} - \frac{1}{2-t} \underbrace{\frac{|t| < 2}{z-1-2}}_{\equiv} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) 2^{-(n+1)} (z-1)^n,$$

para  $|z-1| < 2$ . Assim,

$$\frac{1}{z-3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,3}(z-1)^n,$$

onde

$$a_{n,3} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1) 2^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

**III parcela:**

$$\frac{1}{z-5} = \frac{1}{z-1-4} \underbrace{\frac{t=z-1}{z-1-4}}_{\equiv} - \frac{1}{4-t} \underbrace{\frac{|t| < 4}{z-1-4}}_{\equiv} - \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-(n+1)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) 4^{-(n+1)} (z-1)^n,$$

para  $|z-1| < 4$ . Portanto,

$$\frac{1}{z-5} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,5}(z-1)^n,$$

onde

$$a_{n,5} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \leq -1, \\ (-1) 4^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

Consequentemente, para  $0 < |z-1| < 2$ , temos:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n,$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -1, \\ 1/8 & \text{para } n = -1, \\ (3/4) 2^{-(n+1)} + (-5/8) 4^{-(n+1)} & \text{para } n > -1. \end{cases}$$

**Pergunta:** Qual a SL de  $f(z)$  para  $|z-1| > 2$ ?

<sup>38</sup>Exercício 25.(c) da seção 2.6.

- Como a função

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

é analítica em  $\mathbb{C}$ , exceto nos pontos  $0$  e  $\pm i$ , temos uma SL em torno de  $z_0 = 0$  para  $0 < |z| < 1$  e outra para  $1 < |z| < \infty$ . Para o domínio  $0 < |z| < 1$ ,<sup>39</sup> temos, pela série geométrica (2.23),<sup>40</sup>

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+z^2} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-(-z^2)} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}. \end{aligned}$$

Para o domínio  $1 < |z| < \infty$ ,<sup>41</sup> temos, pela série geométrica,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \\ &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+3}}. \end{aligned}$$

- Qual a SL de  $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3}$  em torno de  $z_0 = -1$ ?<sup>42</sup>

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)^3} = \frac{z+1-1}{(z+1)^3} \\ &= -\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - (-1))^n, \\ a_n &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -3, -2, \\ -1 & \text{para } n = -3, \\ 1 & \text{para } n = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>39</sup>Portanto, para  $0 < |-z^2| < 1$ .

<sup>40</sup>Cf. p. 30.

<sup>41</sup>Portanto, para  $\left|-\frac{1}{z^2}\right| < 1$ .

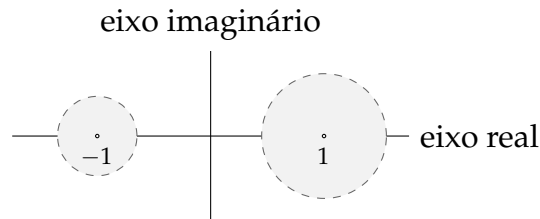
<sup>42</sup>Exercício 25.(b) da seção 2.6.

Note que  $r_1 = 0$  e  $r_2 = \infty$ , isto é, a SL é válida para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z + 1| > 0$ .<sup>43</sup>

**Observação 32 (Singularidade isolada)** Diremos que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada) de  $f(z)$  caso seja o centro de algum disco (aberto) onde  $f(z)$  seja analítica, exceto em  $z_0$ .

**Exemplo**  $z_0 \in \{-1, 1\}$  é uma singularidade isolada de  $f(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)}$ , conforme a figura 2.19.

Figura 2.19: Singularidades isoladas de  $f(z)$



**Observação 33 (Polo de ordem  $k$ )** Diremos que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um polo de ordem  $k$  da SL da observação 31 quando  $a_{-k} \neq 0$  e

$$\dots = a_{-k-2} = a_{-k-1} = 0,$$

isto é,

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

é o primeiro termo não nulo da SL. Nesse caso,  $z_0$  é um polo simples quando  $k = 1$ , isto é, caso

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0}$$

seja o primeiro termo não nulo da SL.

**Exemplo**  $z_0 = 0$  é um polo simples de  $\frac{1}{(z-1)z} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n z^n$ .<sup>44</sup>

**Observação 34 (Critério para que  $z_0$  seja polo)** Caso  $z_0$  seja uma singularidade isolada de  $f(z)$ , demonstra-se que  $z_0$  é um polo de ordem  $k$  de  $f(z)$  se, e somente se, existe  $\varphi(z)$  analítica em  $z = z_0$  tal que  $\varphi(z_0) \neq 0$  e

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}.$$

**Exemplo**

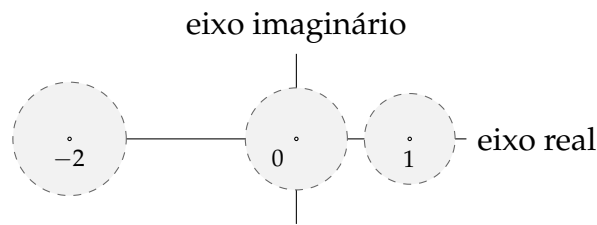
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} \\ &= \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)} \end{aligned}$$

tem três polos, conforme a figura 2.20.

De fato:

<sup>43</sup>Para a SL em torno de  $z_0 = 0$ , utilize a série binomial em  $-\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^2}$ .

<sup>44</sup>Confira o primeiro exemplo dado após a observação 31.

Figura 2.20: Polos de  $f(z)$ 

- $z_0 = 0$  é um polo de ordem 2 de

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)},^{45}$$

- $z_1 = 1$  é um polo simples de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)},^{46}$$

- $z_2 = -2$  é um polo simples de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.^{47}$$

**Observação 35 (Comentários sobre a função seno)**  $\operatorname{sen} z$  é nula apenas em múltiplos inteiros de  $\pi$ . Em particular, embora  $\operatorname{sen} z$  seja nula na origem, podemos escrever

$$\operatorname{sen} z = z \cdot g(z),$$

com  $g(z)$  analítica e  $g(0) \neq 0$ .

De fato:

- Seja  $z = x + iy$ . Assim, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = 0 &\implies e^{-y+ix} - e^{y-ix} = 0 \\ &\implies |e^{-y+ix}| = |e^{y-ix}| \\ &\implies e^{-y}|e^{ix}| = e^y|e^{-ix}| \\ &\implies \frac{1}{e^y} = e^y \\ &\implies e^{2y} = 1 \\ &\implies y = 0. \end{aligned}$$

<sup>45</sup>Aqui,  $\varphi(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ .

<sup>46</sup>Aqui,  $\varphi(z) = \frac{1}{z^2(z+2)}$ .

<sup>47</sup>Aqui,  $\varphi(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ .

Nesse caso,  $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$ , que é nula apenas em múltiplos de  $\pi$ . Portanto,

$$\operatorname{sen} z = 0 \iff z = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Pelo segundo exemplo dado após a observação 28,

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

é analítica e, claramente,  $g(0) \neq 0$ .

### Exemplos

- Calcule os cinco primeiros termos da SL, em torno de  $z_0 = 0$ , para  $f(z) = \cot z$ .

#### Resolução

Como  $f(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$  tem um polo simples na origem,<sup>48</sup> a sua SL é dada por

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Para obtermos cada coeficiente  $a_n$ , consideremos  $(\operatorname{sen} z)f(z) = \cos z$ . Assim, por um lado, temos

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} z)f(z) &= \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left( \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots \right) \\ &= a_{-1} + a_0z + \left( a_1 - \frac{a_{-1}}{3!} \right) z^2 + \left( a_2 - \frac{a_0}{3!} \right) z^3 + \left( a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} \right) z^4 + \dots \end{aligned}$$

Por outro,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Logo, igualando-se os cinco primeiros coeficientes de mesma potência de  $z$ , temos

$$a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 - \frac{a_{-1}}{3!} = -\frac{1}{2}, a_2 - \frac{a_0}{3!} = 0 \text{ e } a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!} = \frac{1}{4!},$$

ou seja,

$$a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 0 \text{ e } a_3 = -\frac{1}{45}.$$

Portanto,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \dots, \quad 0 < |z| < \pi. \quad (2.25)$$

- Caso  $\gamma$  seja o retângulo de vértices  $\frac{3+i}{2}$  e  $\frac{1+i}{2}$ , percorrido no sentido anti-horário, temos

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z^2+9)\operatorname{sen} z} = 0,$$

pelo teorema de Cauchy-Goursat,<sup>49</sup> pois o integrando é holomorfo na região delimitada pelo retângulo supracitado.<sup>50</sup>

<sup>48</sup>De fato, pela observação 35,

$$f(z) = \frac{\cos z/g(z)}{z},$$

onde  $\varphi(z) = \cos z/g(z)$  é analítica (e não nula) em  $z = 0$ . Agora, basta considerarmos as observações 33 e 34.

<sup>49</sup>Cf. p. 21.

<sup>50</sup>Note que as singularidades isoladas do integrando não pertencem à região supracitada.

**Observação 36 (Resíduo)** Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ . O resíduo de  $f(z)$  em  $z_0$  é dado por

$$\operatorname{res}_f(z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,^{51}$$

onde  $\gamma = \partial D(z_0, |z - z_0|)$ .

### Exemplos

· Seja

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \\ &= \cdots + 0 + \frac{1}{z} + 0 + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - 0)^n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq -1, \\ 1 & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

Por um lado,  $\operatorname{res}_f(0) = a_{-1} = 1$ . Por outro,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \\ &= 1, \end{aligned}$$

onde utilizamos a equação (2.14) da observação 17.<sup>52</sup>

· Calcularemos  $\operatorname{res}_f(0)$  para

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z - 2)(z + 1)}.^{53}$$

Note que podemos escrever  $f(z)$  como um produto de dois fatores do seguinte modo:

$$f(z) = \left( \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} \right) \left( \frac{1}{(z + 1)(z - 2)} \right). \quad (2.26)$$

Logo, por um lado, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n + 1)!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \end{aligned}$$

<sup>51</sup>Confira a observação 31.

<sup>52</sup>Cf. p. 21.

<sup>53</sup>Exercício 27.(g) da seção 2.6.

podemos escrever o primeiro fator de (2.26) como

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = z^{-2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

Por outro, pelos exemplos que seguem a observação 30,<sup>54</sup> o segundo fator de (2.26) é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-2)} &= -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left( \underbrace{(1-z+z^2-\dots)}_{|z|<1} + \underbrace{(2^{-1}+2^{-2}z+2^{-3}z^2+\dots)}_{|z|<2} \right) \\ &= -\frac{1}{3} ((1+2^{-1}) + (-1+2^{-2})z + (1+2^{-3})z^2 + \dots) \end{aligned}$$

(para  $|z| < 1$ ). Assim, multiplicando-se os dois fatores supracitados, temos

$$f(z) = (-1/3)(1+2^{-1})z^{-2} + (-1/3)(-1+2^{-2})z^{-1} + \dots$$

(para  $|z| < 1$ ). Consequentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= a_{-1} \\ &= (-1/3)(-1+2^{-2}) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Observação 37 (Cálculo dos resíduos em polos)** Caso  $z_0$  seja um polo de ordem  $k$  de  $f(z)$ , demonstra-se que

$$\operatorname{res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} ((z-z_0)^k f(z)).$$

### Exemplos

- Consideremos o último exemplo dado. Note que, pela observação 35,

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2(z-2)(z+1)}.$$

Portanto, 0 é um polo de ordem 2 de  $f(z)$ . Consequentemente, pela observação 37,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{(2-1)} \left( z^2 \left( \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}{z^2(z^2-z-2)} \right) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}{z^2 - z - 2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left( -\frac{2}{3!}z + \frac{4}{5!}z^3 - \dots \right) (z^2 - z - 2) - \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) (2z - 1)}{(z^2 - z - 2)^2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

<sup>54</sup>Cf. p. 33.

· Calcularemos a parte principal de

$$f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z},^{55}$$

onde  $z$  varia em  $D = \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$ .<sup>56</sup> Note que  $f(z)$  tem um polo simples na origem.<sup>57</sup> Logo,  $a_{-1}z^{-1}$  é a sua parte principal. Calcularemos

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{(-1+1)} \left( \frac{(z-0) \cdot e^z}{\operatorname{sen} z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot e^z}{\operatorname{sen} z} \end{aligned}$$

de três modos distintos:

1.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(1+z+\dots)}{z(1-z^2/3!+\dots)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

pelo desenvolvimento em séries de  $e^z$  e de  $\operatorname{sen} z$ ;

2.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{\frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow 0} e^z}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= 1; \end{aligned}$$

3. Como o limite a ser calculado é da forma  $0/0$ , temos, por L'hôpital,

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + z \cdot e^z}{\cos z} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Observação 38 (Integrais via resíduos)** Pela observação 36, temos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i a_{-1} \\ &= 2\pi i \operatorname{res}_f(z_0). \end{aligned}$$

**Exemplo**

$\oint_{\gamma} e^{2/z} dz = 4\pi i$ , onde  $\gamma = \partial D(0, 1)$ . De fato,  $f(z) = e^{2/z}$  é analítica em  $\mathbb{C} - \{0\}$  e

$$\begin{aligned} e^{2/z} &= \sum_0^{\infty} \frac{(2/z)^n}{n!} \\ &= \dots + \frac{2^2}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{2}{1!} \frac{1}{z} + 1 \end{aligned}$$

<sup>55</sup> $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$  é a parte principal da SL  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ .

<sup>56</sup>Esse é o exercício 24 da seção 2.6.

<sup>57</sup>De fato,  $f(z) = \frac{e^z/g(z)}{z}$ , onde  $g(z)$  é a função dada na observação 35.

é a SL de  $f(z)$  em torno de  $z_0 = 0$ .<sup>58</sup> Consequentemente,  $\text{res}_f(0) = 2$  e a integral anterior é válida.

**Observação 39 (Teorema dos resíduos)** *Em relação à observação 38, vale o seguinte resultado mais geral:*

*Caso  $\gamma$  seja uma curva de Jordan que delimita uma região  $R$  (como na observação 14 da página 20) e  $f(z)$  seja analítica em  $\gamma \cup R$ , exceto em  $z_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n$ , temos*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res}_f(z_i).$$

### Exemplos

•  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^4 + z^3 - 2z^2} dz = 0$ , onde  $\gamma = \partial D(0, 3)$ .

De fato, no exemplo dado após a observação 34, vimos que a origem é um polo de ordem 2 e  $z_0 \in \{1, -2\}$  é um polo simples de  $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)(z-1)}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \text{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2 + z + 2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{-2z - 1}{(z^2 + z + 2)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res}_f(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} ((z - 1)f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{1}{z^2(z + 2)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{res}_f(-2) &= \lim_{z \rightarrow -2} ((z - (-2))f(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \left( \frac{1}{z^2(z - 1)} \right) \\ &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) \\ &= 2\pi i \cdot 0. \end{aligned}$$

<sup>58</sup>Aqui,  $r_1 = 0$  e  $r_2 = \infty$ .

· Exercício 28.(b) da seção 2.6.

Como  $z_1 = -1$  e  $z_2 = 0$  são os polos simples de

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)\operatorname{sen} z} \quad 59$$

interiores ao disco  $D(0,2)$ , temos

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} \\ &= -\frac{1}{e \operatorname{sen} 1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_2) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{e^z}{(z+1)\operatorname{sen} z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z+1) \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{z}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,2)} f(z) dz = -\frac{1}{e \operatorname{sen} 1} + 1.$$

## 2.5 Cálculo de integrais reais pelo teorema dos resíduos

**2.5.1 Integrais de tipo  $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$ , onde  $F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$  é uma função real, racional (em  $\cos \theta$  e  $\operatorname{sen} \theta$ ) e finita em  $[0, 2\pi]$**

Pela mudança de variáveis

$$e^{i\theta} = z,$$

temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \quad = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \\ \quad = \frac{z^2+1}{2z}, \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ \quad = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \\ \quad = \frac{z^2-1}{2iz}, \\ \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}, \text{ ou seja, } d\theta = \frac{1}{iz} dz, \end{array} \right.$$

$F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$  escrita como uma função complexa  $f(z)$  racional (em  $z$ ) e

$$I = \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz,$$

---

<sup>59</sup>Para  $z_1$ , note que  $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$ . Para  $z_2$ , note que  $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)g(z)}$ , com  $g(z)$  dada na observação 35.

onde  $\gamma = \partial D(0,1)$ .

### Exemplos

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos\theta}} = 2\pi.$$

De fato, via  $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$  e  $d\theta = dz/iz$ , temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z \left[ \sqrt{2} - \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]} dz \\ &= -\frac{2}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} dz \\ &= -\frac{2}{i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\left[ z - (\sqrt{2} + 1) \right] \left[ z - (\sqrt{2} - 1) \right]} dz, \end{aligned}$$

cujos integrandos têm polos simples em  $\sqrt{2} + 1$  (fora do disco unitário) e  $\sqrt{2} - 1$  (interior ao disco unitário). Consequentemente, como

$$\begin{aligned} \text{res}_f(\sqrt{2} - 1) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{2} - 1} \frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$I = (-2/i)2\pi i(-1/2).$$

· Se  $a > b > 0$ , então

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.^{60}$$

De fato, via  $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$  e  $d\theta = dz/iz$ , temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z \left[ a + \frac{b}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{\frac{b}{2}z^2 + az + \frac{b}{2}} \\ &= \frac{2}{bi} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + \frac{2a}{b}z + 1} \end{aligned}$$

cujos integrandos têm polos simples em  $z_{\pm} = -(a/b) \pm \sqrt{(a/b)^2 - 1}$  (fora do disco

<sup>60</sup>Esse é o exercício 29.(a) da seção 2.6.

unitário) e  $z_+ = -(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1}$  (interior ao disco unitário).<sup>61</sup> Assim, como

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{z - z_-} \\ &= \frac{1}{z_+ - z_-} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(a/b)^2 - 1}}, \end{aligned}$$

temos

$$I = \frac{2}{b\mathbf{i}} \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

· Se  $a > b > 0$ , então

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = \frac{2a\pi}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \quad ^{62}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \theta)^2} d\theta &= \frac{1}{\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{1}{z \left( a + b \left( \frac{z^2+1}{2z} \right) \right)^2} dz \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{1}{\frac{(bz^2+2az+b)^2}{4z}} dz \\ &= \frac{4}{b^2\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{z}{\left( z^2 + \frac{2a}{b}z + 1 \right)^2} dz \\ &= \frac{4}{b^2\mathbf{i}} \oint_{\gamma} \frac{z}{(z - z_-)^2 (z - z_+)^2} dz \\ &= \frac{4}{b^2\mathbf{i}} \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{res}_f(z_+), \end{aligned}$$

<sup>61</sup>De fato, como  $a/b > 1$ , temos  $z_- < -1$  (trivial!) e  $-1 < z_+ < 0$ , pois:

$$\cdot -(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1} \geq 0 \implies (a/b)^2 - 1 \geq (a/b)^2 \implies -1 \geq 0!$$

$$\cdot -(a/b) + \sqrt{(a/b)^2 - 1} \leq -1 \implies \sqrt{(a/b)^2 - 1} \leq (a/b) - 1 \implies (a/b)^2 - 1 \leq (a/b)^2 - 2(a/b) + 1 \implies a \leq b!$$

<sup>62</sup>Esse é o exercício 29.(b) da seção 2.6.

onde  $z_{\pm}$  são dados como no exemplo anterior, e

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z - z_-)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{(z - z_-)^2 - 2z(z - z_-)}{(z - z_-)^4} \\ &= \frac{(z_+ - z_-)^2 - 2z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\ &= -\frac{(z_+ + z_-)}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= \frac{ab^2}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

· Para  $0 < a < 1$ ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z \left( 1 + a \left( \frac{z^2 - 1}{2iz} \right) \right)} dz \\ &= 2 \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{az^2 + 2iz - a} dz \\ &= \frac{2}{a} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z^2 + \frac{2i}{a}z - 1} dz. \end{aligned}$$

Os zeros do denominador do integrando da última igualdade, de cima para baixo, são obtidos via

$$\begin{aligned} z_{\pm} &= \frac{-\frac{2i}{a} \pm \sqrt{-4 \left( \frac{1}{a^2} - 1 \right)}}{2} \\ &= \frac{\frac{2i}{a} \left( -1 \pm \sqrt{1 - a^2} \right)}{2} \\ &= \frac{i \left( -1 \pm \sqrt{1 - a^2} \right)}{a}. \end{aligned}$$

Note que, como  $0 < a < 1$ ,<sup>63</sup> temos

$$|z_-| = \left| \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right|$$

<sup>63</sup>Portanto,  $\frac{1}{a} > 1$ .

maior que 1. Assim, como  $z_- z_+ = -1$ ,<sup>64</sup> temos

$$|z_+| = \frac{1}{|z_-|}$$

menor que 1. Consequentemente, temos um único polo simples ( $z_+$ ) interior ao disco  $\partial D(0, 1)$  e, para

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_-)(z - z_+)} dz,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{a} \oint_{\partial D(0,1)} f(z) dz \\ &= \left(\frac{2}{a}\right) (2\pi i \operatorname{res}_f(z_+)) \\ &= \frac{4\pi i}{a} \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{z - z_-} \\ &= \left(\frac{4\pi i}{a}\right) \left(\frac{1}{z_+ - z_-}\right) \\ &= \left(\frac{4\pi}{a}\right) \left(\frac{1}{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}}\right). \end{aligned}$$

## 2.5.2 Integrais reais impróprias de funções $f(x)$ racionais

Pelo cálculo de funções  $f(x)$  reais de uma variável  $x$  real,<sup>65</sup> temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx, \end{aligned}$$

caso esses limites existam.<sup>66</sup>

**Primeiro tipo:  $f(x)$  não tem polos reais e tem denominador não nulo e de grau no mínimo duas unidades maior do que o grau do numerador**

Caso  $f(x)$  seja a restrição da função complexa  $f(z)$  em  $[-R, R]$ , considere a integral complexa

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

tal que  $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, R]$ , onde  $\gamma_1$  é a semicircunferência superior de centro na origem e raio  $R$ , conforme a figura 2.21. Por ser racional,  $f(z)$  tem  $n$  polos, digamos,  $z_1, \dots, z_n$ , no semi-plano superior. Assim, caso  $R$  seja suficientemente grande,  $\gamma$  é a fronteira de uma região

<sup>64</sup>De fato,

$$z^2 + \frac{2i}{a} - 1 = (z - z_-)(z - z_+).$$

<sup>65</sup>Cálculo 1 na UFPR.

<sup>66</sup>Nessa subseção,  $R$  denota uma variável real.

Figura 2.21:  $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, R]$ 

que contêm todos esses polos. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx &= \oint_{\gamma} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res}_f(z_i). \end{aligned}$$

Demonstra-se que a integral ao longo de  $\gamma_1$  é zero para  $R \rightarrow \infty$ .<sup>67</sup> Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{res}_f(z_i).$$

### Exemplos

- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .<sup>68</sup>  
De fato:

- $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  tem 4 polos simples em  $z_1 = e^{\pi i/4}$ ,  $z_2 = e^{3\pi i/4}$ ,  $z_3 = e^{-3\pi i/4}$  e  $z_4 = e^{-\pi i/4}$ .<sup>69</sup>
- $z_i$  está no  $i$ -ésimo quadrante,  $i = 1, 2, 3, 4$ , na interseção da bissetriz (desse quadrante) com a circunferência de centro na origem e raio 1;
- Como  $\text{res}_f(z_1) = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4}$  e  $\text{res}_f(z_2) = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2\pi i \left( \frac{-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

- Finalmente, note que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

<sup>67</sup>Como  $|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}$ , onde  $c$  é uma constante positiva, basta aplicarmos a observação 12 para  $|z| = R \rightarrow \infty$ .

<sup>68</sup>Exercício 30.(a) da seção 2.6.

<sup>69</sup> $re^{i\theta} \neq 0$  tem  $n$  raízes  $n$ -ésimas distintas dadas por  $r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27}$ .<sup>70</sup>

De fato:

- $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$  tem dois polos de ordem dois em  $z_{\pm} = -2 \pm 3i$ ;
- Apenas  $z_+$  está no semi-plano superior;
- Como

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z - z_-)^2} \right) \\ &= \frac{(z_+ - z_-)^2 - 2z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\ &= \frac{z_+ - z_- - 2z_+}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{z_+ + z_-}{(z_+ - z_-)^3} \\ &= -\frac{4}{6^3 i} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx &= 2\pi i \left( -\frac{2^2}{2^3 3^3 i} \right) \\ &= -\frac{\pi}{27}. \end{aligned}$$

- A integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 6} dx \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{z^4 + 5z^2 + 6} \\ &= \frac{z^2}{(z^2 + 2)(z^2 + 3)} \\ &= \frac{z^2}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{3})(z - i\sqrt{3})} \end{aligned}$$

tem quatro singularidades isoladas ( $\pm i\sqrt{2}$  e  $\pm i\sqrt{3}$ ), mas somente as negativas são po-

<sup>70</sup>Exercício 30.(b) da seção 2.6.

los simples localizados acima do eixo real. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_f(i\sqrt{2}) + \operatorname{res}_f(i\sqrt{3}) \right) \\
 &= 2\pi i \left( \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} \left( (z - i\sqrt{2}) f(z) \right) + \lim_{z \rightarrow i\sqrt{3}} \left( (z - i\sqrt{3}) f(z) \right) \right) \\
 &= 2\pi i \left( \frac{(i\sqrt{2})^2}{2i\sqrt{2}} - \frac{(i\sqrt{3})^2}{2i\sqrt{3}} \right) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})\pi.
 \end{aligned}$$

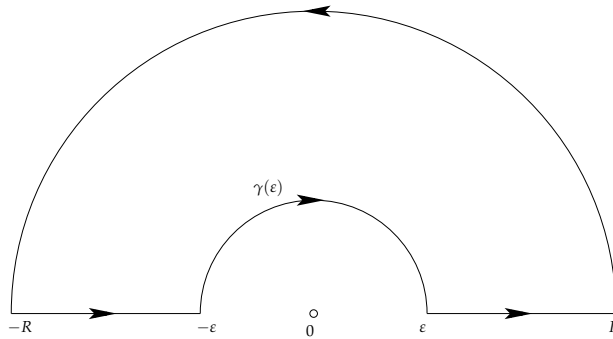
**Segundo tipo: A origem é um polo simples e o único polo de  $f(x)$**

Caso a origem seja um polo simples de uma função  $g(z)$ , obtida de  $f(x)$  como no caso do exemplo vindouro, demonstra-se que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z) dz \\
 &= \pi i \operatorname{res}_g(0),
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde  $\gamma(\varepsilon)$  é a semicircunferência superior de raio (suficientemente pequeno)  $\varepsilon$  e centro na origem, percorrida na direção do argumento crescente, conforme a figura 2.22.

Figura 2.22: A integral ao longo dessa curva fechada é zero, por Cauchy-Goursat. Além disso, como no primeiro tipo supracitado, a integral ao longo da semicircunferência de raio  $R$  é zero



**Exemplo**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi, \text{ pois, como } \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{e^{ix} - \cos x}{ix} \text{ e, para } 0 < \varepsilon < R, \frac{\cos x}{x} \text{ é uma função}$$

ímpar no intervalo  $[-R, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, R]$ ,<sup>71</sup> temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \frac{1}{i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \right) \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (\text{Cf. a legenda da fig. 2.22}) \\ &= \pi \operatorname{res}_{e^{iz}/z}(0) \quad (\text{via (2.27)}) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

### Observação importante

Caso  $f(x)$  tenha um único polo simples e esse polo seja um real não nulo, a técnica que acabamos de empregar para a origem também é a válida para esse polo. Além disso, caso  $f(x)$  tenha apenas  $n$  polo simples, todos reais, aplica-se uma técnica similar à supracitada, contudo, agora, a integral é obtida da multiplicação de  $\pi$  pela soma dos resíduos da função  $g(z)$  supracitada.

---

<sup>71</sup>Como  $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$  é ímpar no intervalo supracitado, ou seja,

$$\varphi(x) = -\varphi(-x)$$

para cada  $x \neq 0$  pertencente ao intervalo  $[-R, R]$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx &= - \int_R^{\varepsilon} \varphi(-u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \quad (\text{pela mudança de variáveis } x = -u) \\ &= \int_{\varepsilon}^R \varphi(-u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\varepsilon}^R \varphi(u) du + \int_{\varepsilon}^R \varphi(x) dx \quad (\varphi \text{ é ímpar}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 2.6 Exercícios e algumas resoluções/sugestões

### 2.6.1 Operações elementares dos números complexos

1. Escreva cada um dos seguintes números complexos na forma cartesiana  $x + iy$ :

$$(a) \frac{1}{i}$$

$$(e) i^{4n+3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \frac{4+i}{6-3i}$$

$$(f) \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^6$$

$$(c) \left( \frac{i-1}{2i+6} \right)^3$$

$$(g) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^8$$

$$(d) (2i-4)^2$$

Sugestão para (a), (b) e (c):

$$\begin{aligned} \frac{x+iy}{u+iw} &= \frac{x+iy}{u+iw} \cdot 1 \\ &= \frac{x+iy}{u+iw} \cdot \frac{u-iw}{u-iw} \\ &= \frac{xu+yw+i(yu-xw)}{u^2+w^2}. \end{aligned}$$

Sugestão para (f) e (g):

A  $n$ -ésima potência de  $z = re^{i\theta}$  é dada por  $z^n = r^n e^{in\theta}$ .<sup>72</sup>

2. Obtenha a parte real e a parte imaginária de:

$$(a) z = (i+1)^2(i-1)$$

$$(d) w = \frac{z}{z^2+1};$$

$$(b) z = \frac{i+1}{i-1}$$

$$(e) w = \frac{z^2}{z-1};$$

$$(c) z = \frac{i^2}{i^3-4i+6}$$

$$(f) w = z^4 + 2z + 6.$$

#### Resolução

(a)

$$\begin{aligned} z &= (i+1)(i+1)(i-1) \\ &= (i+1)(i^2-1) \\ &= -2(1+i) \end{aligned}$$

↓

$$\Re(z) = \Im(z) = -2;$$

<sup>72</sup>Cf. p. 10.

(b)

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{i+1}{i-1} \cdot \frac{i+1}{i-1} \\
 &= \frac{(i+1)^2}{2} \\
 &= -\frac{i^2 + 2i + 1}{2} = -i \\
 &\quad \Downarrow \\
 \Re(z) &= 0 \text{ e } \Im(z) = -1;
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{-i - 4i + 6} &= -\frac{1}{-5i + 6} \\
 &= -\frac{1}{6 - 5i} \cdot \frac{6 + 5i}{6 + 5i} \\
 &= -\frac{6 + 5i}{61} \\
 &\quad \Downarrow \\
 \Re(z) &= -\frac{6}{61} \text{ e } \Im(z) = -\frac{5}{61};
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z}{z^2 + 1} \cdot \frac{\overline{z^2 + 1}}{z^2 + 1} \\
 &= \frac{z(\bar{z}^2 + 1)}{|z^2 + 1|^2} \\
 &= \frac{(|z|^2 \bar{z} + z)}{|z^2 + 1|^2} \\
 &\quad \Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\Re(w) = \frac{(|z|^2 \Re(\bar{z}) + \Re(z))}{|z^2 + 1|^2} \underbrace{\Re(z) = \Re(\bar{z})}_{=} \frac{|z|^2 + 1}{|z^2 + 1|^2} \Re(z)$$

e

$$\Im(w) = \frac{(|z|^2 \Im(\bar{z}) + \Im(z))}{|z^2 + 1|^2} \underbrace{\Im(z) = -\Im(\bar{z})}_{=} -\frac{|z|^2 - 1}{|z^2 + 1|^2} \Im(z);$$

(e) Ao utilizarmos a técnica de *completamento de quadrados* no numerador, temos

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{z^2 - 2z + 1 + 2z - 1}{z - 1} \\
 &= \frac{(z - 1)^2}{z - 1} + \frac{2z}{z - 1} - \frac{1}{z - 1} \\
 &= z - 1 + 2 \cdot \frac{z}{z - 1} \cdot \frac{\overline{z - 1}}{z - 1} - \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{\overline{z - 1}}{z - 1} \\
 &= z - 1 + 2 \cdot \frac{|z|^2 - z}{|z - 1|^2} - \frac{\bar{z} - 1}{|z - 1|^2}
 \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}\Re(w) &= \Re(z) - 1 + \frac{2|z|^2}{|z-1|^2} - \frac{2\Re(z)}{|z-1|^2} - \frac{\Re(\bar{z})}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-1|^2} \\ &= -1 + \frac{2|z|^2 + 1}{|z-1|^2} + \left(1 - \frac{3}{|z-1|^2}\right) \Re(z)\end{aligned}$$

e

$$\Im(w) = \left(1 - \frac{1}{|z-1|^2}\right) \Im(z).$$

(f) Claramente,

$$\Re(w) = \Re(z^4) + 2\Re(z) + 6 \text{ e } \Im(w) = \Im(z^4) + 2\Im(z).$$

3. Determine o módulo de:

$$\begin{aligned}\text{(a)} & (2 - \mathbf{i})^2 \cdot (4 + 6\mathbf{i}) & \text{(d)} & \frac{\mathbf{i} + 2}{\mathbf{i} - 2} \\ \text{(b)} & \frac{3 - \mathbf{i}}{(6 + 2\mathbf{i})^3} & \text{(e)} & (\mathbf{i} + 1) \cdot (\mathbf{i} + 2) \cdot (\mathbf{i} + 3) \\ \text{(c)} & (\sqrt{3} + \mathbf{i}) \cdot (\sqrt{3} - \mathbf{i})\end{aligned}$$

Sugestão:

Lembre-se que o módulo do produto é igual ao produto dos módulos!

4. Para  $z, w \in \mathbb{C}$  arbitrários, verifique que:

$$\begin{aligned}\text{(a)} & \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}; \\ \text{(b)} & \Re(z\bar{w}) = \Re(\bar{z}w); \\ \text{(c)} & z\bar{w} + \bar{z}w = 2\Re(z\bar{w}); \\ \text{(d)} & |1 \pm z|^2 = 1 \pm 2\Re(z) + |z|^2; \\ \text{(e)} & |z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2; \\ \text{(f)} & 1 - \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{z}w|^2}.\end{aligned}$$

**Resolução**Para (a), multiplique  $(z/w)^{-1}$  em ambos os membros da igualdade resultante de

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \left|\frac{z}{w}\right|^2 \\ &= \frac{|z|^2}{|w|^2} \\ &= \frac{z \cdot \bar{z}}{w \cdot \bar{w}} \\ &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{w}};\end{aligned}$$

(b) e (c) seguem de

$$\begin{aligned}\Re(z\bar{w}) &= \frac{z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}}{2} \\ &= \frac{\bar{z}w + \overline{\bar{z}w}}{2} \\ &= \Re(\bar{z}w);\end{aligned}$$

(d) e (e) seguem de

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) \quad \text{e} \quad |z - w|^2 = (z - w)(\overline{z - w}),^{73}$$

juntamente com o item (c) desse exercício;

(f) segue de

$$\begin{aligned}1 - \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^2 &= 1 - \frac{|z - w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= 1 - \frac{|z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2}{1 - 2\Re(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 - 2\Re(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 - |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) - |w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 + |z|^2|\bar{w}|^2 - |z|^2 - |w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2} \\ &= \frac{1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2}{|1 - z\bar{w}|^2},\end{aligned}$$

onde aplicamos os itens (d) e (e) (desse exercício) na segunda igualdade, de cima para baixo.

5. Obtenha todas as raízes, na forma polar,<sup>74</sup> dos seguintes polinômios complexos:

(a)  $z^2 + z + 1 = 0$ ;

(b)  $w^2 + 2w + \mathbf{i} = 0$ ;

(c)  $z^2 - 1 = 0$  (isto é, achar as duas raízes quadradas de 1);

(d)  $w^4 + 1 = 0$  (isto é, achar as quatro raízes quartas de  $-1$ ).

### Resolução

Note que, pelo *teorema fundamental da álgebra*, qualquer polinômio (não constante) de grau  $n$  têm  $n$  raízes complexas. Assim, os polinômios dos itens (a), (b) e (c) têm duas raízes e o do item (d) tem quatro. Aqui, resolveremos (apenas) os itens (a) e (b).<sup>75</sup>

<sup>73</sup>Inclusive para  $w = 1$ !

<sup>74</sup>Cf. (2.7), p. 10.

<sup>75</sup>As resoluções dos itens (c) e (d) ficam a cargo do leitor.

(a) Pela fórmula de Bhaskara,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= e^{\pm \frac{2\pi i}{3}}, \end{aligned}$$

por (2.7).<sup>76</sup>

(b) Como a equação pode ser reescrita na forma

$$w^2 + 2w(1) + 1 = -i + 1,$$

ou seja,

$$(w + 1)^2 = 1 - i,$$

se  $z = w + 1$ , temos

$$z^2 = 1 - i.$$

Consequentemente, pela segunda sugestão do primeiro exercício dessa seção, temos

$$r^2 e^{2\theta i} = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Assim,

$$r^2 = 2^{1/2} \text{ e } 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 0, 1,$$

isto é,

$$r = 2^{1/4} \text{ e } \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k = 0, 1.$$

Portanto,

$$w \in \left\{ -1 + 2^{1/4} e^{-\frac{\pi i}{8}}, -1 + 2^{1/4} e^{\frac{7\pi i}{8}} \right\}.$$

6. Escreva, em notação real, ou seja, na forma

$$u(x, y) + iv(x, y),$$

os polinômios complexos (nas variáveis  $z$  e  $\bar{z}$ ) dos itens seguintes:

(a)  $F(z, \bar{z}) = z^3 - \bar{z}^2;$

(b)  $F(z, \bar{z}) = \bar{z}^4;$

(c)  $F(z, \bar{z}) = z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2.$

Sugestão: Considere  $(z + \bar{z})^2$ .

---

<sup>76</sup>Cf. p. 10.

7. Escreva os seguintes polinômios (dados em notação real) como polinômios em  $z$  e  $\bar{z}$ :<sup>77</sup>

(a)  $F(x, y) = (x - y^2) + \mathbf{i}(y^2 + x)$ ;

(b)  $F(x, y) = (x^2 - y^2) + \mathbf{i}(2xy)$ ;

Resposta:  $z^2$ .

(c)  $F(x, y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathbf{i}(-3x^2y + y^3)$ .

Resposta:  $\bar{z}^3$ .

Sugestão: Para  $z = x + \mathbf{i}y$ , temos  $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ ,  $z + \bar{z} = 2x$  e  $z - \bar{z} = 2\mathbf{i}y$ , em outras palavras,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}. \quad (2.28)$$

Contudo, nos itens (b) e (c), ao invés de substituirmos (2.28) nos polinômios (dados em notação real) e fazermos “um monte de conta”, podemos identificar o *binômio de Newton*, ou seja, as expressões

$$(x + \mathbf{i}y)^2 = x^2 + 2x(\mathbf{i}y) + (\mathbf{i}y)^2$$

e

$$\begin{aligned} (x - \mathbf{i}y)^3 &= (x + (-\mathbf{i}y))^3 \\ &= x^3 + 3x^2(-\mathbf{i}y) + 3x(-\mathbf{i}y)^2 + (-\mathbf{i}y)^3, \end{aligned}$$

nos polinômios supracitados.

## 2.6.2 Derivadas

8. Caso a parte real  $P(x, y)$  e a parte imaginária  $Q(x, y)$  de  $f(z)$ , dada em (2.1),<sup>78</sup> sejam diferenciáveis, podemos definir a *diferencial total*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.29)$$

Em particular,  $z = x + \mathbf{i}y$  e  $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$  acarretam

$$dz = dx + \mathbf{i}dy \quad \text{e} \quad d\bar{z} = dx - \mathbf{i}dy. \quad (2.30)$$

Conseqüentemente,

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad \text{e} \quad dy = \frac{1}{2\mathbf{i}}(dz - d\bar{z}). \quad (2.31)$$

Assim, ao substituirmos (2.31) em (2.29), temos

$$df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \quad (2.32)$$

<sup>77</sup>Os termos de polinômios nas variáveis  $z$  e  $\bar{z}$  são escritos da forma

$$az^m \bar{z}^n,$$

onde o coeficiente  $a$  é complexo e os índices  $m$  e  $n$  são inteiros não negativos.

<sup>78</sup>Cf. p. 8.

Portanto, podemos utilizar as notações

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

para representarmos (2.32) por

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (2.34)$$

Pelas notações supracitadas, verifique a validade das seguintes identidades:

- (a)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) = \bar{z}$  e  $\frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) = z$ ;
- (b)  $\frac{\partial}{\partial z}(4\bar{z}^2 - z^3) = -3z^2$ ;
- (c)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}^2 + z^2\bar{z}^3) = 2\bar{z} + 3z^2\bar{z}^2$ ;
- (d)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 - y) = x + \frac{\mathbf{i}}{2}$ ;
- (e)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x + y) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i})$ .

### Resolução

Aqui,  $z = x + \mathbf{i}y$ , ou seja,  $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ . Além disso, resolveremos apenas os itens 1 e 2, pois os cálculos a serem utilizados podem ser aplicados aos demais itens.

- (a) Verificaremos apenas a primeira identidade, pois a verificação da segunda é análoga. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(z\bar{z}) &= \frac{\partial}{\partial z}(|z|^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{1}{2}(2x - 2y\mathbf{i}) \\ &= x - \mathbf{i}y \\ &= \bar{z}. \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(4\bar{z}^2 - z^3) &= \frac{\partial}{\partial z}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y}(4(x - \mathbf{i}y)^2 - (x + \mathbf{i}y)^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (8(x - \mathbf{i}y)(1) - 3(x + \mathbf{i}y)^2(1)) - \mathbf{i}(8(x - \mathbf{i}y)(-\mathbf{i}) - 3(x + \mathbf{i}y)^2(\mathbf{i})) \right) \\ &= \frac{1}{2}(8(x - \mathbf{i}y) - 3(x + \mathbf{i}y)^2 - 8(x - \mathbf{i}y) - 3(x + \mathbf{i}y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(0 - 6(x + \mathbf{i}y)^2) \\ &= -3z^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos a *regra da cadeia* na terceira igualdade, de cima para baixo.

9. Para  $f(z) = \mathbf{i}Q(x, y)$ ,<sup>79</sup> obtenha  $\frac{\partial}{\partial z}f(z)$ ,  $\overline{\frac{\partial}{\partial z}f(z)}$  e  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z)$ . Conclua que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(z) = \overline{\frac{\partial}{\partial z}f(z)}.$$

10. Demonstre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \Delta, \end{aligned}$$

onde

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.35)$$

é o operador laplaciano.

11. Demonstra-se que  $f(z)$  é holomorfa em  $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$  se, e somente se,  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  e, nesse caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

em  $z_0$ ,<sup>80</sup> ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

em  $z_0$ , por (2.33). Portanto, uma condição necessária e suficiente para que  $f(z)$  seja holomorfa é a seguinte: o coeficiente de  $d\bar{z}$  deve nulo em (2.34), isto é,  $df$  deve ser proporcional a  $dz$ , onde  $f'(z)$  é o coeficiente de proporcionalidade.

Como exercício, determine que condições as constantes reais  $a, b, c$  e  $d$  devem satisfazer para que a função

$$f(z) = ax + by + \mathbf{i}(cx + dy)$$

seja holomorfa.

12. Caso  $f(z) = P(x, y) + \mathbf{i}Q(x, y)$  seja uma função holomorfa e  $P(x, y)$  seja constante, mostre que  $f(z)$  é constante.

Sugestão: Use as condições de Cauchy-Riemann supracitadas.

13. Determine uma função  $f(z)$  tal que  $\Re(f(z)) = x^2 + 2x - y^2 + 1$ .

### Resolução

$P(x, y) = x^2 + 2x - y^2 + 1$  é harmônica.<sup>81</sup> Agora, suponha que existe  $Q(x, y)$  tal que

<sup>79</sup>Note que  $\overline{f(z)} = -\mathbf{i}Q(x, y)$ .

<sup>80</sup>Essa condição é equivalente às condições de Cauchy-Riemann, isto é, (2.2) da página 8.

<sup>81</sup>Uma função é harmônica quando o seu operador laplaciano é nulo, ou seja,  $\Delta = 0$ , conforme definido em (2.35). Demonstra-se que, se uma função é holomorfa, então ela é harmônica, pelas condições de Cauchy-Riemann supracitadas.

$f = P + iQ$  seja holomorfa em todo  $\mathbb{C}$ . Assim, pelas condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 2y.$$

Portanto,

$$Q(x, y) = 2xy + h(y).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y} &= 2x + h'(y) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \\ &= 2x + 2. \end{aligned}$$

Logo, como  $h'(y) = 2$ , temos  $h(y) = 2y$ . Assim,

$$Q(x, y) = 2xy + 2y.$$

Portanto,

$$f(z) = P + iQ = x^2 + 2x - y^2 + 1 + i(2xy + 2y).$$

14. Encontre a função  $f$  tal que  $\Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2$  (ou explique porque essa função não existe).

### 2.6.3 Integrais

15. Seja  $\gamma$  a circunferência unitária parametrizada por  $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ , onde  $t \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Por (2.16),<sup>82</sup> calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz;$$

- (b) Por (2.12) (da observação 9) e pelo item (a) supracitado, deduza que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} (\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)) dt = 2\pi.$$

- (c) Por que podemos concluir que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0?$$

16. Calcule as seguintes integrais complexas:

- (a)  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ , onde  $\gamma$  é a circunferência unitária centrada em  $(0, 0)$  com orientação anti-horária

Resposta:  $2\pi i$ ,<sup>83</sup>

<sup>82</sup>Cf. p. 23.

<sup>83</sup>Cf. (2.14), p. 21.

- (b)  $\oint_{\gamma} \bar{z} + z^2 \bar{z} dz$ , onde  $\gamma$  é o quadrado unitário centrado em  $(0,0)$  com orientação anti-horária;<sup>84</sup>
- (c)  $\oint_{\gamma} \frac{\bar{z}}{8+z} dz$ , onde  $\gamma$  é o retângulo com vértices  $\pm 3 \pm i$  com orientação anti-horária;<sup>85</sup>
- (d)  $\oint_{\gamma} \frac{\xi^2}{\xi-1} d\xi$ , onde  $\gamma$  é a circunferência centrada em  $(0,0)$  e raio 3 com orientação anti-horária  
Resposta:  $2\pi i$ ;<sup>86</sup>
- (e)  $\oint_{\gamma} \frac{\xi(\xi-3)}{(\xi+i)(\xi-8)} d\xi$ , onde  $\gamma$  é a circunferência centrada em  $2+i$  e raio 3, com orientação anti-horária  
Resposta:  $2\pi i \left( \frac{-1+3i}{-8-i} \right)$ ;<sup>87</sup>
- (f)  $\oint_{\gamma} \xi(\xi+4) d\xi$ , onde  $\gamma$  é a circunferência centrada em 0 e raio 2, com orientação anti-horária;  
Resposta: 0;<sup>88</sup>
- (g)  $\oint_{\gamma} \bar{\xi} d\xi$ , onde  $\gamma$  é a circunferência unitária centrada em 0, com orientação anti-horária  
Resposta:  $2\pi i$ .<sup>89</sup>

Sugestão para os itens (b), (c) e (g): A função  $f(z) = \bar{z}$  não é holomorfa (em  $z, \forall z \in \mathbb{C}$ ), conforme o segundo exemplo da subseção 2.2.2.

<sup>84</sup>Sugestão: Pela sugestão dada no final desse exercício, resta calcularmos essa integral de linha pela definição (2.12), página 16. Assim, considere uma decomposição do quadrado  $\gamma$  pelos seus lados, ou seja,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4, \quad (2.36)$$

parametrizados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : z_1(t) &= t - i, \\ \gamma_2 : z_2(t) &= 1 + ti, \\ \gamma_3 : z_3(t) &= -t + i, \\ \gamma_4 : z_4(t) &= -1 - ti, \end{aligned}$$

onde  $t$  varia em  $[-1, 1]$ . Para cada  $z \in \gamma$ , considere

$$f(z) = (1 + z^2) \bar{z}.$$

<sup>85</sup>Resolução análoga a do item (b) desse exercício. Nesse caso, o retângulo supracitado é decomposto como em (2.36), onde seus lados são parametrizados por:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : z_1(t) &= 3t - i, \\ \gamma_2 : z_2(t) &= 3 + ti, \\ \gamma_3 : z_3(t) &= -3t + i, \\ \gamma_4 : z_4(t) &= -3 - ti, \end{aligned}$$

para cada  $t \in [-1, 1]$ .

<sup>86</sup>Cf. (2.16), p. 23.

<sup>87</sup>Idem.

<sup>88</sup>Cf. (2.13), p. 21.

<sup>89</sup>Pela sugestão que acompanha essa questão, resta calcularmos essa integral de linha pela definição (2.12), página 16. Aqui, para cada  $\xi$  pertencente à circunferência supracitada, parametrizada por

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \xi(t) = e^{it},$$

considere  $f(\xi) = \bar{\xi}$ .

17. Calcule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} d\zeta,$$

onde  $\gamma = \partial D(0, 4)$ .

### Resolução

Como 1 e  $2i$  são pontos interiores à região delimitada por  $\gamma$ , não podemos utilizar o teorema de Cauchy-Goursat,<sup>90</sup> nem a fórmula integral de Cauchy.<sup>91</sup> Por outro lado, via frações parciais, temos

$$\frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} = \frac{1}{1 - 2i} \left( \frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta - 2i} \right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2i)} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{1 - 2i} \left( \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 1} d\zeta - \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - 2i} d\zeta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{1 - 2i} (2\pi i - 2\pi i) \right], \end{aligned}$$

pela fórmula integral de Cauchy (supracitada). Portanto, a integral do enunciado desse exercício é nula.

18. Calcule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\zeta^2 + \zeta}{(\zeta - 2i)(\zeta + 3)} d\zeta,$$

onde  $\gamma = \partial D(1, 5)$ .<sup>92</sup>

19. Caso  $\gamma$  seja a poligonal fechada da figura 2.23, com orientação anti-horária, calcule a integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 2z} dz.$$
<sup>93</sup>

20. Considere  $D \subset \mathbb{C}$  aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e que  $\gamma$  é uma curva fechada (percorrida no sentido anti-horário) contida em  $D$ . Caso  $z_0$  seja um ponto interior da região  $R$  limitada por  $\gamma$  (que está orientada positivamente em relação a  $R$ ), demonstre a igualdade

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \oint_{\gamma} \frac{f^{(n)}(z)}{z - z_0} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Utilize a equação (2.15) no primeiro membro dessa igualdade.<sup>94</sup> No segundo membro dela, considere  $g(z) = f^{(n)}(z)$  e utilize (2.16).<sup>95</sup>

<sup>90</sup>Cf. (2.13), p. 21.

<sup>91</sup>Cf. (2.16), p. 23.

<sup>92</sup>Uma resolução é dada no sexto exemplo que segue a observação 18.

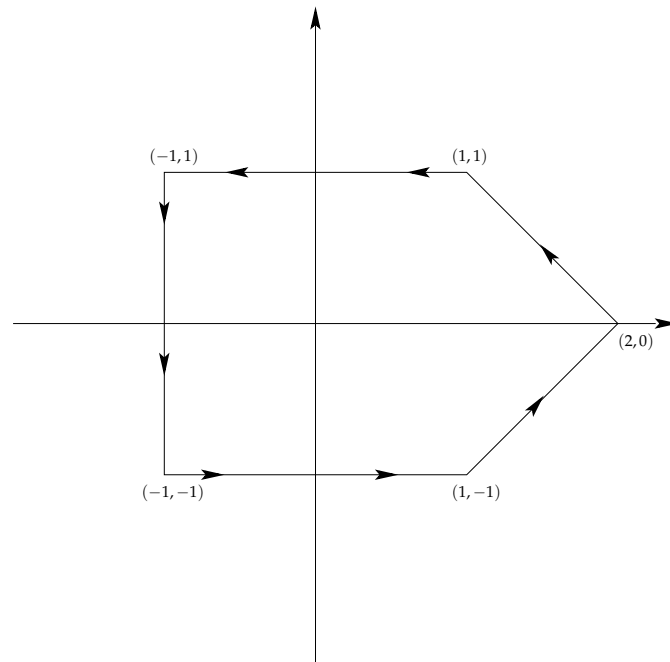
<sup>93</sup>Note que  $z^2 + 2z = z(z + 2)$ .

Para duas resoluções distintas, confira o quarto exemplo que segue a observação 18.

<sup>94</sup>Cf. p. 23.

<sup>95</sup>Idem.

Figura 2.23: A curva é dada por uma poligonal fechada



21. Seja  $\gamma = \partial D(0,1)$ .

(a) Via (2.15),<sup>96</sup> calcule

$$\oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}, \quad n \in \mathbb{N};$$

(b) Pelo item (a) dessa questão e pela observação 9,<sup>97</sup> deduzo o valor da integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sen^{2n} t dt;$$

(c) Obtenha os valores de

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t dt \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sen^{2n+1} t dt.$$

### Resolução

Por um lado,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \oint_{\gamma} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(2n)!} f^{(2n)}(0), \end{aligned}$$

<sup>96</sup>Cf. p. 23.

<sup>97</sup>Cf. p. 16.

onde  $f(z) = (z^2 + 1)^{2n}$ . Por outro,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^{2n} e^{-it} i e^{it} dt \\ &= 2^{2n} i \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi}{((2n)!) 2^{2n-1}} f^{(2n)}(0).$$

Analogamente, por um lado,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \oint_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz \\ &= \frac{2\pi i}{(2n)!} g^{(2n)}(0), \end{aligned}$$

onde  $g(z) = (z^2 - 1)^{2n}$ . Por outro,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} (e^{it} - e^{-it})^{2n} e^{-it} i e^{it} dt \\ &= 2^{2n} i^{2n} i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2n} t dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2n} t dt = \frac{(-1)^n \pi}{((2n)!) 2^{2n-1}} g^{(2n)}(0).$$

O item (c) segue de modo análogo, trocando-se  $2n$  por  $2n + 1$ .

## 2.6.4 Séries de Taylor, séries de Laurent e resíduos

22. Determine o raio de convergência ( $\rho$ ) de cada uma das seguintes séries:

- (a)  $\sum_{k=3}^{\infty} k z^k$ ;
- (b)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} (z + 1)^k$ ;
- (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) z^k$ , onde  $p(k)$  é um polinômio;
- (d)  $\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k} z^k$ .

23. Para cada uma das seguintes funções, obtenha a respectiva série de potências, com o ponto dado como centro, e o respectivo raio de convergência ( $\rho$ ):

- (a)  $e^{-z}$ , 0;

Resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$ ,  $\rho = \infty$ .<sup>98</sup>

<sup>98</sup>Sugestão: Confira o primeiro exemplo que segue a observação 28. Considere  $-z$  no lugar de  $z$ .

(b)  $\cos z, -\pi/2;$

Resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(z + \frac{\pi}{2}\right)^{2n}, \rho = \infty.$ <sup>99</sup>

(c)  $\cos^2 z, 0;$

Resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \rho = \infty.$ <sup>100</sup>

24. Seja  $f(z) = e^z/\operatorname{sen} z$ , com  $z \in D = \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}$ . Calcule a parte principal de  $f(z)$ . Resposta:  $1/z.$ <sup>101</sup>

25. Calcule, no mínimo, os primeiros quatro termos da expansão de Laurent das funções dadas em torno dos pontos dados. Em cada caso, especifique o anel de convergência da expansão.

(a)  $f(z) = \operatorname{csc} z$  em torno de  $z_0 = 0;$  Resposta:  $a_{-1} = 1, a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = \frac{7}{360}, a_4 = 0$  e  $a_5 = \frac{31}{15120}; 0 < |z| < \pi$  (convergência).

(b)  $f(z) = z/(z+1)^3$  em torno de  $z_0 = -1;$ <sup>102</sup>

(c)  $f(z) = z/[(z-1)(z-3)(z-5)]$  em torno de  $z_0 = 1;$ <sup>103</sup>

(d)  $f(z) = z/[(z-1)(z-3)(z-5)]$  em torno de  $z_0 = 5;$ <sup>104</sup>

(e)  $f(z) = \operatorname{csc} z$  em torno de  $z_0 = \pi;$  Resposta:  $a_{-1} = -1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{7}{360}, a_4 = 0$  e  $a_5 = -\frac{31}{15120}; \pi < |z| < 2\pi$  (convergência).

(f)  $f(z) = \operatorname{sec} z$  em torno de  $z_0 = \pi/2.$  Resposta:  $a_{-1} = -1, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{7}{360}, a_4 = 0$  e  $a_5 = -\frac{31}{15120}; \frac{\pi}{2} < |z| < \frac{3\pi}{2}$  (convergência).

(g)  $f(z) = e^z/z^3$  em torno de  $z_0 = 0.$  Resposta:  $f(z) = \sum_{m=-3}^{\infty} \frac{z^m}{(m+3)!}$  para cada  $z \in \mathbb{C}$  não nulo.

Sugestão para os itens (a) e (e): Como, pela observação 35,<sup>105</sup> temos

$$\begin{aligned} \operatorname{csc} z &= \frac{1}{\operatorname{sen} z} \\ &= \frac{1/g(z)}{z}, \end{aligned}$$

<sup>99</sup>Sugestão: Considere

$$w = z + \frac{\pi}{2}. \quad (2.37)$$

Escreva a expansão de Taylor para

$$\cos w$$

em torno de  $w_0 = 0$ , como no segundo exemplo que segue a observação 28. Reescreva a expansão supracitada na variável  $z$  via (2.37).

<sup>100</sup>Sugestão: Verifique que

$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos(2z)}{2},$$

pelo segundo exemplo que segue a observação 3. Calcule a série de

$$\cos(2z)$$

pelo segundo exemplo que segue a observação 28, com  $2z$  no lugar de  $z$ .

<sup>101</sup>Exercício resolvido no segundo exemplo que segue a observação 37, p. 44.

<sup>102</sup>Uma resolução é apresentada no quarto exemplo que segue a observação 31.

<sup>103</sup>Uma resolução é apresentada no terceiro exemplo que segue a observação 31.

<sup>104</sup>Sugestão: Confira a nota de rodapé do item (c) desse exercício e faça as adaptações devidas!

<sup>105</sup>Cf. p. 41.

$z_0 = 0$  é um polo simples de  $\csc z$ .<sup>106</sup> Consequentemente, como

$$(\operatorname{sen} z)(\csc z) = 1$$

é equivalente à identidade

$$\left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \left( \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \right) = 1,<sup>107</sup>$$

temos a resposta supracitada e

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \frac{31z^5}{15120} + \dots$$

é a série de Laurent de  $\csc z$  em torno de  $z = 0$ . Agora, se  $\zeta = z - \pi$ , então

$$\begin{aligned} \csc z &= -\csc(z - \pi) \\ &= -\csc \zeta \\ &= -\left( \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{6} + \frac{7\zeta^3}{360} + \frac{31\zeta^5}{15120} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{z - \pi} - \frac{z - \pi}{6} - \frac{7(z - \pi)^3}{360} - \frac{31(z - \pi)^5}{15120} - \dots \end{aligned}$$

é a série de Laurent em torno de  $z = \pi$ .

Sugestão para o item (f): Utilize a expressão

$$\begin{aligned} \sec z &= \frac{1}{\cos z} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= -\csc\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\csc \zeta, \end{aligned}$$

onde  $\zeta = z - \frac{\pi}{2}$ , e faça como no item (e) desse exercício.

Sugestão para o item (g): Pelo primeiro exemplo dado após a observação 28,<sup>108</sup> temos, para cada  $z \in \mathbb{C}$  não nulo,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!}.$$

26. A expansão de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

<sup>106</sup>Cf. obs. 34, p. 40.

<sup>107</sup>Confira o exemplo sobre a  $\cot z$ , dado logo após a observação 35.

<sup>108</sup>Essa observação encontra-se na página 32.

em torno de  $z_0 = 0$  é da forma

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} z^k,$$

onde cada  $B_k \in \mathbb{R}$  e é chamado *número de Bernoulli*. Calcule os primeiros três números de Bernoulli.

Sugestão: Como

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= z \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right), \end{aligned}$$

$z = 0$  é um polo simples de

$$f(z) = \frac{1/\varepsilon(z)}{z},$$

onde

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}.$$

Consequentemente, por

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) f(z) = 1,$$

onde

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

temos

$$a_{-1} = 1, a_0 = -\frac{1}{2} e,$$

após obtermos  $a_1, a_2$  e  $a_3$ , obtemos os três números de Bernoulli supracitados, isto é,

$$B_1 = 2!a_1,$$

$$B_2 = -4!a_2 \text{ e}$$

$$B_3 = 6!a_3,$$

27. Calcule cada um dos seguintes resíduos:

(a)  $\text{res}_f(2i), f(z) = \frac{z^2}{(z-2i)(z+3)}$ .

Resposta:  $-\frac{4}{3+2i}$ .

(b)  $\text{res}_f(-3), f(z) = \frac{z^2+1}{(z+3)^2 z}$ .

Resposta:  $\frac{8}{9}$ .

(c)  $\text{res}_f(i+1), f(z) = \frac{e^z}{(z-i-1)^3}$ .

Resposta:  $\frac{e^{1+i}}{2}$ .

(d)  $\text{res}_f(2), f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$ .

Resposta:  $\frac{2}{3}$ .

(e)  $\operatorname{res}_f(-i), f(z) = \frac{\cot z}{z^2(z+i)^2}$ . Resposta:  $-\csc^2(-i) + 2i \cot(-i)$ .

(f)  $\operatorname{res}_f(0), f(z) = \frac{\cot z}{z(z+1)}$ . Resposta:  $-1$ .

Sugestão:  $\cot z = z^{-1}h(z)$  com  $h(z) = 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + \dots$ ; <sup>109</sup>  $f(z) = \frac{h(z)}{z^2}$ .

(g)  $\operatorname{res}_f(0), f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z-2)(z+1)}$ . <sup>110</sup> Resposta:  $1/4$ .

(h)  $\operatorname{res}_f(\pi), f(z) = \frac{\cot z}{z^2(z+1)}$ . Resposta:  $\frac{1}{\pi^2(\pi+1)}$ .

Sugestão: Primeiramente, note que, como

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

$z = \pi$  é uma singularidade isolada de  $f(z)$ . Portanto, podemos resolver (esse item) determinando o coeficiente de índice  $-1$  da série de Laurent em torno de  $z = \pi$  ou utilizando a fórmula da observação 37, <sup>111</sup> pois, para  $\zeta = z - \pi$ , temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cot(\zeta + \pi)}{(\zeta + \pi)^2((\zeta + \pi) + 1)} \\ &= \frac{\cot(\zeta)}{(\zeta + \pi)^2(\zeta + \pi + 1)} \\ &= \frac{h(\zeta)}{\zeta(\zeta + \pi)^2(\zeta + \pi + 1)} \\ &= \varphi(\zeta), \end{aligned}$$

onde  $h$  é dada na sugestão do item (f) desse exercício. Assim,

$$z \rightarrow \pi \iff \zeta \rightarrow 0$$

e

$$\operatorname{res}_f(\pi) = \operatorname{res}_\varphi(0).$$

28. Utilize resíduos para calcular cada uma das integrais seguintes:

(a)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,5)} f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$ . Resposta:  $\frac{1}{1-2i} + \frac{2i}{1+2i}$ .

(b)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,2)} f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)\operatorname{sen} z}$ . Resposta:  $1 - 1/(e \operatorname{sen} 1)$ . <sup>112</sup>

(c)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,8)} f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{\cot z}{(z-6i)^2-64}$ . Resposta:  $\sum_{n=-2}^2 \frac{1}{(n\pi-6i)^2-64}$ .

(d)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}$  e  $\gamma$  é o triângulo com vértices  $1 \pm i$  e  $-3$ , orientado no sentido anti-horário. Resposta:  $\frac{e^2-2e+1}{2e^2}$ . <sup>113</sup>

<sup>109</sup>Cf. pp. 41–42, da obs. 35 até a eq. (2.25).

<sup>110</sup>Para duas resoluções, confira o segundo exemplo dado após a observação 36 e o primeiro exemplo dado após a observação 37.

<sup>111</sup>Cf. p. 44.

<sup>112</sup>Pela observação 35 (p. 41),  $f(z) = \frac{e^z/g(z)}{z(z+1)}$ .

<sup>113</sup>0,  $-1$  e  $-2$  são polos simples de  $f(z)$ , pertencentes ao interior do triângulo supracitado.

(e)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{e^z}{(z+3i)^2(z+3)^2(z+4)}$  e  $\gamma$  é o retângulo com vértices  $2 \pm i$ ,  $-8 \pm i$ , orientado no sentido anti-horário. Resposta:  $-\frac{2}{(-3+3i)^3 e^3} + \frac{1}{(-4+3i)^2 e^4}$ .<sup>114</sup>

(f)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $f(z) = \frac{e^{iz}}{(\operatorname{sen} z)(\operatorname{cos} z)}$  e  $\gamma$  é o quadrilátero com vértices  $\pm 5i$ ,  $\pm 10$ , orientado no sentido anti-horário.  
Resposta incompleta:<sup>115</sup>

$$\sum_{m=-3}^2 \operatorname{res}_f \left( \frac{(2m+1)\pi}{2} \right) + \sum_{n=-3}^3 \operatorname{res}_f(n\pi).$$

Sugestão para o item (c): Primeiramente, note que, como

$$\begin{aligned} (z - 6i)^2 - 64 &= (z - 6i)^2 - 8^2 \\ &= (z - 6i + 8)(z - 6i - 8) \\ &= (z - (-8 + 6i))(z - (8 + 6i)), \end{aligned}$$

$z = \pm 8 + 6i$  são singularidades isoladas de  $f(z)$ . Contudo, como  $|\pm 8 + 6i| = 10$ , essas singularidades não pertencem ao interior da região delimitada por  $\partial D(0, 8)$ . Por outro lado, as outras singularidades isoladas de  $f(z)$  (pertencentes ao interior da região supracitada) são dadas por

$$z = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2,$$

pois

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}.$$

Como, para  $\zeta = z - n\pi$ , temos, por (2.25),<sup>116</sup>

$$\begin{aligned} \cot z &= \cot(z - n\pi) \\ &= \cot \zeta \\ &= \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3}\zeta - \frac{1}{45}\zeta^3 - \dots \\ &= \frac{1}{\zeta} \left( 1 - \frac{1}{3}\zeta^2 - \frac{1}{45}\zeta^4 - \dots \right) \\ &= \frac{1}{z - n\pi} \left( 1 - \frac{1}{3}(z - n\pi)^2 - \frac{1}{45}(z - n\pi)^4 - \dots \right), \end{aligned}$$

essas outras singularidades são polos simples de  $f(z)$ .

Sugestão para o item (f): Como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2e^{iz}}{2 \operatorname{sen} z \operatorname{cos} z} \\ &= \frac{2e^{iz}}{\operatorname{sen}(2z)}, \end{aligned}$$

<sup>114</sup>Das singularidades isoladas de  $f(z)$ ,  $3i$  é a única que não pertence ao interior do retângulo supracitado, enquanto que  $-3$  é um polo de ordem dois e  $-4$  é um polo simples.

<sup>115</sup>Os resíduos dos somatórios (dados na resposta) devem ser calculados. Por exemplo, na sugestão desse item, que logo apresentaremos, é determinado que  $\operatorname{res}_f(0) = 1$ .

<sup>116</sup>Cf. p. 42.

as suas singularidades isoladas (pertencentes ao interior da região delimitada pelo quadrilátero supracitado) são determinadas via

$$2z \in \{0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \pm5\pi, \pm6\pi\},$$

ou seja,

$$z \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm2\pi, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm3\pi\right\}.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2z) &= 2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \dots \\ &= 2z \left(1 - \frac{4z^2}{3!} + \frac{16z^4}{5!} - \dots\right), \end{aligned}$$

temos, caso denotemos por  $\phi(z)$  a série entre parênteses da última igualdade (de cima para baixo),

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

e, portanto, 0 é um polo simples de  $f(z)$  e

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{\phi(z)} \\ &= \frac{e^0}{\phi(0)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Analogamente, todas as outras doze singularidades são polos simples de  $f(z)$  e, assim, seus outros resíduos podem ser calculados, como fizemos na sugestão do item (c) desse exercício.

29. Calcule as seguintes integrais trigonométricas:

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)},$  com  $a > b > 0.$  Resposta:  $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$ <sup>117</sup>

(b)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2},$  com  $a > b > 0.$  Resposta:  $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$ <sup>118</sup>

(c)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos^2 \theta)^2},$  com  $a > b > 0.$  Resposta:  $\frac{(2a+b)\pi a}{[a(a+b)]^{3/2}}.$

(d)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2},$  com  $a \in \mathbb{C}, a \neq \pm 1.$  Resposta:  $\frac{2\pi}{1-a^2}$  se  $|a| < 1.$   $\frac{2\pi}{a^2-1}$  se  $|a| > 1.$

(e)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2},$  com  $a$  complexo,  $a \neq \pm 1.$  Resposta:  $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$  se  $|a| > 1.$   $\frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$  se  $|a| < 1.$

<sup>117</sup>Confira o segundo exemplo da subseção 2.5.1.

<sup>118</sup>Confira o terceiro exemplo da subseção 2.5.1.

Sugestão para o item (c): Pelas fórmulas do início da subseção 2.5.1,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b \cos^2 \theta)^2} &= \frac{1}{i} \oint_{\partial(0,1)} \frac{1}{z \left[ a + b \left( \frac{z^2+1}{2z} \right)^2 \right]^2} dz \\
 &= \frac{1}{i} \oint_{\partial(0,1)} \frac{z}{\left[ z \left( a + b \left( \frac{z^2+1}{2z} \right)^2 \right) \right]^2} dz \\
 &= \frac{1}{i} \oint_{\partial(0,1)} \frac{z}{\left( \frac{z(4az^2 + b(z^2+1)^2)}{4z^2} \right)^2} dz \\
 &= \frac{16}{i} \oint_{\partial(0,1)} \frac{z^3}{(bz^4 + (4a + 2b)z^2 + b)^2} dz \\
 &= \frac{16}{b^2 i} \oint_{\partial(0,1)} \frac{z^3}{\left( z^4 + \frac{(4a+2b)}{b} z^2 + 1 \right)^2} dz.
 \end{aligned}$$

Agora, ao igualarmos o polinômio de grau quatro do denominador do integrando da última igualdade, de cima para baixo, ao produto de dois polinômios mônicos de segundo grau, temos

$$z^4 + \frac{(4a + 2b)}{b} z^2 + 1 = (z^2 + cz + d) (z^2 + mz + n). \quad (2.38)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 c + m &= 0, \\
 d + cm + n &= \frac{4a + b}{b}, \\
 dm + cn &= 0 \text{ e} \\
 dn &= 1.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, para  $d = n = 1$ , como  $m = -c$ , temos

$$\begin{aligned}
 c^2 &= 2 - \frac{4a + b}{b} \\
 &= \frac{b - 4a}{b},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$c = \pm i \sqrt{\frac{4a - b}{2}},$$

pois  $a > b > 0$ , por hipótese. Assim, (2.38) pode ser escrita na forma

$$z^4 + \frac{(4a + 2b)}{b} z^2 + 1 = \left( z^2 + i \sqrt{\frac{4a - b}{2}} z + 1 \right) \left( z^2 - i \sqrt{\frac{4a - b}{2}} z + 1 \right).$$

Sugestão para o item (d): Pelas fórmulas do início da subseção 2.5.1,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} &= \frac{1}{i} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z \left( 1 - 2a \left( \frac{z^2+1}{2z} \right) + a^2 \right)} dz \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{-a(z^2+1) + (a^2+1)z} dz \\ &= -\frac{1}{ai} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z^2 - \frac{a^2+1}{a}z + 1} dz \\ &= -\frac{1}{ai} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{(z-a) \left( z - \frac{1}{a} \right)} dz. \end{aligned}$$

Sugestão para o item (e): Utilize a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \frac{e^{i(3\theta)} + e^{i(-3\theta)}}{2} \\ &= \frac{(e^{i\theta})^3 + (e^{i\theta})^{-3}}{2} \\ &= \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2} \\ &= \frac{z^6 + 1}{2z^3}, \end{aligned}$$

onde  $z = e^{i\theta}$ .

30. Utilize resíduos para calcular as seguintes integrais reais:

(a)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx.$

Resposta:  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$ <sup>119</sup>

(b)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx.$

Resposta:  $-\pi/27.$ <sup>120</sup>

(c)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx, a > 0.$

Resposta:  $\pi/(4a).$

(d)  $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n} dx, n \in \mathbb{N}.$

Resposta:  $\frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2}.$

(e)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, a > 0, b > 0.$

Resposta:  $\frac{\pi}{ab(a+b)}.$

(f)  $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

Resposta:  $\pi\sqrt{2}/2.$

(g) 1.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+1} dx.$

Resposta:  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\pi/4}.$

2.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx.$

Resposta:  $\pi.$

3.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^4}{1+x^{10}} dx.$

(h)  $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} dx.$

Resposta:  $\frac{\pi}{2e}.$

(i)  $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos.}$

Resposta:  $\frac{\pi e^{-ab}}{2b}.$

<sup>119</sup>Confira o primeiro exemplo da subseção 2.5.2.

<sup>120</sup>Confira o segundo exemplo da subseção 2.5.2.

(j)  $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + b^2} dx$ , com  $a$  e  $b$  positivos.

Resposta:  $\frac{\pi}{2} e^{-ab}$ .

(k)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$ .

Resposta:  $\frac{\pi}{3e^3} (\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1)$ .

(l)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 10} dx$ .

Resposta:  $\frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 + \operatorname{sen} 1)$ .

Sugestão para o item (c): Note que, como

$$\begin{aligned} (z^2 + a^2)^2 &= (z^2 - (ai)^2)^2 \\ &= (z + ai)^2(z - ai)^2, \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2}$$

tem uma singularidade isolada localizada abaixo do eixo real ( $-ai$ ) e um polo de ordem dois localizado acima do eixo real ( $ai$ ). Além disso, como o integrando é uma função par em  $(-\infty, \infty)$ , a integral pode ser calculada por

$$\pi i \operatorname{res}_f(ai).$$

Sugestão para o item (d): Note que, como

$$(z^2 + 1)^n = (z + i)^n(z - i)^n,$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$$

tem uma singularidade isolada localizada abaixo do eixo real ( $-i$ ) e um polo de ordem  $n$  ( $i$ ) localizado acima do eixo real. Além disso, como o integrando é uma função par em  $(-\infty, \infty)$ , a integral pode ser calculada por

$$\pi i \operatorname{res}_f(i).^{121}$$

Sugestão para o item (e): Note que, como

$$(z^2 + a^2)(z^2 + b^2) = (z + ai)(z - ai)(z + bi)(z - bi),$$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}$$

tem duas singularidades isoladas localizadas abaixo do eixo real ( $-ai$  e  $-bi$ ) e dois polos simples localizados acima do eixo real ( $ai$  e  $bi$ ). Portanto a integral é calculada por

$$2\pi i (\operatorname{res}_f(ai) + \operatorname{res}_f(bi)).$$

Sugestão para o item (f): Como o integrando é uma função par em  $(-\infty, \infty)$ , a integral é igual à sua metade, variando, agora, em  $(-\infty, \infty)$ . Além disso, as quatro raízes de  $z^4 + 1 = 0$  foram determinadas no primeiro exemplo da subseção 2.5.2.

<sup>121</sup>A resposta é obtida por indução em  $n$ .

Sugestão para o item 1 (do item (g)): Como

$$\frac{\cos x}{x^4 + 1} = \frac{e^{ix} - i \operatorname{sen} x}{x^4 + 1},$$

e

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^4 + 1}$$

é ímpar em  $(-\infty, \infty)$ , basta utilizarmos a técnica do último exemplo da subseção 2.5.2. Contudo, nesse caso,

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 + 1},$$

onde  $z^4 + 1 = 0$  teve as suas raízes calculadas no primeiro exemplo da subseção 2.5.2, e o teorema dos resíduos deve ser aplicado apenas nos polos localizados acima do eixo real. Além disso, não precisamos considerar a semicircunferência  $\gamma(\varepsilon)$  da figura 2.22 (da página 54), pois  $g(z)$  não tem polos reais.

### **Resolução do item 2 (do item (g))**

Considere  $a \geq 0$  e a integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(ax)}{x^2} dx.$$

Assim, para  $a > 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{da} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \quad (u = 2ax) \\ &= \pi, \end{aligned}$$

pelo último exemplo da subseção 2.5.2. Portanto,

$$\begin{aligned} I(a) &= \pi a + \text{constante} \\ &= \pi a, \end{aligned}$$

pois  $I(0) = 0$ . Para concluirmos a resolução, basta considerarmos  $a = 1$ .

Sugestão para o item (h): Como o integrando é uma função par em  $(-\infty, \infty)$ , a integral é igual à sua metade, variando, agora, em  $(-\infty, \infty)$ . Além disso, como

$$\frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} = \frac{1}{i} \left( \frac{x e^{ix} - x \cos x}{x^2 + 1} \right)$$

e

$$\frac{x \cos x}{x^2 + 1}$$

é ímpar, basta utilizarmos a técnica do último exemplo da subseção 2.5.2, onde, aqui,

$$g(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}$$

e, como  $\pm i$  são os zeros de  $z^2 + 1 = 0$ , o teorema dos resíduos deve ser aplicado apenas no polo localizado acima do eixo real. Note que, nesse caso, não precisamos considerar a semicircunferência  $\gamma(\varepsilon)$  da figura 2.22 (da página 54), pois  $g(z)$  não tem polos reais.

Sugestão para os itens (i), (j), (k) e (l): Confira as sugestões para os itens (g) (item 1) e (h).

31. Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx, t > 0.$  Resposta:  $\pi i.$

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(x)^3} dx$ , onde  $p(x) = x^2 + 1.$  Resposta:  $\frac{3\pi}{8}.$

(c)  $\int_0^{\pi} \frac{2dt}{3\sin(2t)+5}.$  Resposta:  $\frac{\pi}{2}.$

(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t)}{3t} dt.$  Resposta:  $\frac{\pi}{3}.$

(e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t^2} dt.$  Resposta:  $\pi.$

(f)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx.$  Resposta:  $\pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3).$

(g)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)} dx.$  Resposta:  $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - \frac{1}{e^2}).$

### **Resolução do item (a)**

Para  $u = tx$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx &= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu}}{\frac{u}{t}} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu}}{u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \\ &= 0 + i\pi, \end{aligned}$$

pois  $\cos u/u$  é ímpar em  $(-\infty, \infty)$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi,$$

pelo último exemplo da seção 2.5.

### **Resolução do item (b)**

Como  $\pm i$  são polos (de ordem três) do integrando, mas ape-

nas um deles está localizado acima do eixo real,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{(z + i)^3} \right) \right) \\
 &= (-3)\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(z + i)^4} \right) \\
 &= (-3)(-4)\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{1}{(z + i)^5} \right) \\
 &= 12\pi i \left( \frac{1}{(2i)^5} \right) \\
 &= \frac{3\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

### Resolução do item (c)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{2dt}{3 \operatorname{sen}(2t) + 5} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 \operatorname{sen}\theta + 5} \quad (\theta = 2t) \\
 &= \oint_{\partial D(0,1)} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{3(z^2-1)+10iz}{2iz}} \\
 &= \frac{2}{3} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 + \frac{10i}{3}z - 1} \\
 &= \frac{2}{3} \oint_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{\left(z + \frac{i}{3}\right)(z + 3i)} \\
 &= \frac{2}{3} \left( 2\pi i \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{3}} \frac{1}{z + 3i} \right) \\
 &= \frac{4\pi i}{3} \left( \frac{3}{8i} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

### Resolução do item (d)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2t)}{3t} dt &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{u}{2}} \frac{du}{2} \quad (u = 2t) \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \\
 &= \frac{\pi}{3},
 \end{aligned}$$

pelo último exemplo da subseção 2.5.2.

**Resolução do item (e)**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)}{2t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin^2 t}{2t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \\ &= \pi,\end{aligned}$$

pele item 2 (do item (g)) da questão anterior.



# Capítulo 3

## Parte II - Séries e transformadas de Fourier

### 3.1 Série(s) de Fourier (SF)

Para uma revisão dos espaços vetoriais cujos vetores são funções e, em particular, dos produtos internos desses espaços, confira o capítulo 6 do meu livro de *álgebra linear*, na minha página acadêmica institucional.<sup>1</sup>

**Observação 40 (Funções periódicas)** Uma função  $f$   $2L$ -periódica é definida, para cada  $x$  pertencente a um intervalo real (ou uma união de intervalos reais) que contenha  $x + 2L$ , por

$$f(x + 2L) = f(x).$$

#### Exemplo

Para cada inteiro  $n$ , as funções  $\cos \frac{\pi nx}{L}$ ,  $\sin \frac{\pi nx}{L}$  e  $e^{i\pi nx/L}$  são  $2L$ -periódicas.

#### Aviso importante

Caso nada seja dito em contrário, função, nesse capítulo, significa função  $2L$ -periódica.

**Observação 41 (Produto interno)** O produto interno das funções  $f_1$  e  $f_2$  é dado por

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

#### Exemplo

Para  $L = \pi$ ,  $f_1(x) = \sin x$  e  $f_2(x) = \cos x$ , temos

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0.^2$$

**Observação 42 (Propriedades do produto interno)** Para o produto da observação 41, demonstre que:

1.  $\overline{\langle f_1, f_2 \rangle} = \langle f_2, f_1 \rangle$ ;
2.  $\langle \text{cte}_1 f_1 + \text{cte}_2 f_2, f \rangle = \text{cte}_1 \langle f_1, f \rangle + \text{cte}_2 \langle f_2, f \rangle$ ;<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Cf. o endereço eletrônico na capa desse manual.

<sup>2</sup>Considere integração por partes.

<sup>3</sup>cte denota uma constante.

$$3. \langle f, \text{cte}_1 f_1 + \text{cte}_2 f_2 \rangle = \overline{\text{cte}_1} \langle f, f_1 \rangle + \overline{\text{cte}_2} \langle f, f_2 \rangle.$$

**Observação 43 (Ortogonalidade)** As funções  $f_1$  e  $f_2$  são ortogonais (entre si) quando

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

### Exemplos

1.

$$\begin{aligned} \langle e^{i\pi m x/L}, e^{i\pi n x/L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\pi(m-n)x/L} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2L} \left. \frac{L e^{i\pi(m-n)x/L}}{i\pi(m-n)} \right|_{-L}^L &= 0 \text{ se } m \neq n, \\ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 dx &= 1 \text{ se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Como  $\text{sen } A \cos B = \frac{1}{2}[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)]$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \text{sen} \frac{\pi m x}{L}, \cos \frac{\pi n x}{L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{\pi n x}{L} dx \\ &= \frac{1}{4L} \left[ \int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi(m+n)x}{L} dx + \int_{-L}^L \text{sen} \frac{\pi(m-n)x}{L} dx \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4L} \left[ \frac{L}{\pi(m+n)} \int_{-\pi(m+n)}^{\pi(m+n)} \text{sen } u du + \frac{L}{\pi(m-n)} \int_{-\pi(m-n)}^{\pi(m-n)} \text{sen } v dv \right] \\ \quad \text{se } m \neq n, \\ \frac{1}{4L} \left[ \int_{-L}^L \text{sen} \frac{2\pi m x}{L} dx + \int_{-L}^L \text{sen } 0 dx \right] \\ \quad \text{se } m = n \end{cases} \\ &= \frac{1}{4L} (0 + 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois a função seno é ímpar no intervalo  $[-L, L]$ .<sup>4</sup>

**Observação 44 (SF 2L-periódica)** A SF 2L-periódica é dada por

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L}, \quad (3.1)$$

onde  $c_m \in \mathbb{C}$ , para cada inteiro  $m$ . Caso essa série convirja para a função  $f(x)$ , isto é,

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L},$$

temos

$$\begin{aligned} \langle f(x), e^{i\pi n x/L} \rangle &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\pi m x/L} \right) e^{-i\pi n x/L} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \langle e^{i\pi m x/L}, e^{i\pi n x/L} \rangle. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Cf. o último exemplo da seção 2.5.

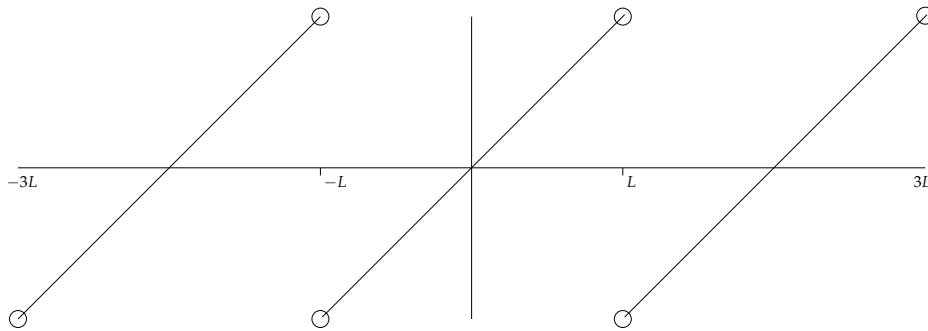
Consequentemente, para cada inteiro  $n$ , temos

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi nx/L} dx, \quad (3.2)$$

pelo exemplo 1 supracitado.

**Exemplo** Caso  $\psi$  seja  $2L$ -periódica e, para cada  $x \in (-L, L)$ ,  $\psi(x) = x$ , conforme a figura 3.1, temos

Figura 3.1: função  $\psi$



$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx = 0$$

e, para  $n \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-i\pi nx/L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \left( x \frac{-L}{i\pi n} e^{-i\pi nx/L} \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{-L}{i\pi n} e^{-i\pi nx/L} dx \right) \\ &= \frac{-L}{i2\pi n} (-1)^n - \frac{L}{i2\pi n} (-1)^n - \frac{1}{2L} \left( \frac{L}{i\pi n} \right)^2 \int_{i\pi n}^{-i\pi n} e^u du \\ &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n} - 0 \\ &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n}. \end{aligned}$$

**Observação 45 (De Laurent para Fourier)** Caso  $F(z)$  seja holomorfa em  $D(0, \rho)$  e  $0 \leq r < \rho$  esteja fixado, temos, pela observação 31 sobre a  $SL$ ,<sup>5</sup>

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

que, para

$$z = r e^{i\theta},$$

<sup>5</sup>Cf. p. 34.

pode ser reescrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta},$$

com  $n$ -ésimo coeficiente dado por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= r^{-n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right). \end{aligned}$$

Assim, caso  $\theta$  seja uma variável real,  $x = \theta - \pi$ ,  $f(x) = F(re^{i(x+\pi)})$  e  $c_n = (-1)^n a_n r^n$ , temos uma SF  $2\pi$ -periódica.<sup>6</sup>

**Observação 46 (Teorema (de convergência) de Fourier)** Em cada ponto  $x$ , a SF de uma função  $f$ , caso  $f$  seja diferenciável por partes,<sup>7</sup> converge para a média  $(f(x^+) + f(x^-))/2$  dos limites laterais de  $f$  e, assim, converge para  $f(x)$ , caso  $f$  seja contínua em  $x$ .<sup>8</sup>

### Exemplo

Para a função  $\psi$  do exemplo anterior, a SF é dada por

$$\psi(x) = \frac{iL}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{i\pi n x/L}.$$

Por um lado, essa série tem soma zero em  $x \in \{0, L\}$ , pois, nesse caso, seu termo de índice  $n$  é cancelado com o de índice  $-n$ .<sup>9</sup> Por outro lado,  $\psi$  é contínua em  $x = 0$ , com  $\psi(0) = 0$ , e descontínua em  $x = L$ , com limites  $\psi(L^+) = -L$  e  $\psi(L^-) = L$ . Logo, esses valores estão em concordância com o estabelecido na observação 46.

Ainda nesse exemplo, note que, se  $x = L/2$ , então o termo de índice  $n$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n} e^{i\pi n/2} &= \frac{(-1)^n}{n} (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))^n \\ &= \frac{(-1)^n i^n}{n} \\ &= \frac{(-i)^n}{n}, \end{aligned}$$

cancela o termo de índice  $-n$ , caso  $n \neq 0$  seja par, e iguala o termo de índice  $-n$ , caso  $n$  seja ímpar. Além disso, a soma dos termos de índices  $n$  e  $-n$  alterna o sinal para  $n = 2k + 1$ ,

<sup>6</sup>Cf. a observação 44, p. 84.

<sup>7</sup>Isto é, diferenciável em  $[-L, L]$ , exceto talvez num número finito de pontos.

<sup>8</sup>No lugar do sinal  $=$ , alguns matemáticos usam  $\sim$  entre  $f(x)$  e a sua SF, pois o valor da SF de  $f(x)$  num extremo (direito ou esquerdo) é dado pela média aritmética dos valores de  $f(x)$  nos extremos (direito e esquerdo).

<sup>9</sup>De fato, a série em  $x = 0$  é dada por  $\sum_{n \neq 0} (-1)^n/n$  e, em  $x = L$ , devido à  $e^{i\pi n} = \cos(\pi n) = (-1)^n$ , por  $\sum_{n \neq 0} 1/n$ .

onde  $k$  representa um inteiro não negativo arbitrário. Portanto, como a SF em  $x = L/2$  é dada por

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

e, de acordo com a observação 46, converge para  $\psi(L/2) = L/2$ , temos a série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

**Observação 47 (SF reais)** Caso  $f$  seja uma função real, isto é,  $\bar{f} = f$ , temos  $c_{-n} = \bar{c}_n$ .<sup>10</sup> Portanto, como podemos escrever  $c_n = (a_n - ib_n)/2$  (para  $n$  inteiro), temos

$$\begin{aligned} \bar{c}_0 = c_0 &\implies c_0 \in \mathbb{R} \\ &\implies b_0 = 0 \end{aligned}$$

e, como  $e^{-i\pi nx/L} = \cos \frac{\pi nx}{L} - i \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}$ , temos

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi nx}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$
<sup>11</sup>

Por outro lado, por (3.1),<sup>12</sup> temos a soma dos termos de índices  $n$  e  $-n$  (da SF) dada por

$$\begin{aligned} c_n e^{i\pi nx/L} + c_{-n} e^{-i\pi nx/L} &= a_n \frac{e^{i\pi nx/L} + e^{-i\pi nx/L}}{2} + b_n \frac{e^{i\pi nx/L} - e^{-i\pi nx/L}}{2i} \\ &= a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}. \end{aligned}$$

Logo, uma função  $f$  diferenciável por partes pode ser representada por sua SF real

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}.$$

**Observação 48 (Funções pares e ímpares)** Além das funções ímpares supracitadas, temos as funções  $y = f(x)$  pares, onde  $f(-x) = f(x)$  para cada  $x \in \operatorname{Dom}(f)$ . Portanto, os gráficos das funções pares são simétricos em relação ao eixo  $y$  e os das ímpares são simétricos em relação a origem. Além disso, de modo análogo ao que foi verificado para as funções ímpares, a paridade de  $f(x)$  resulta na expressão

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

### Exemplo

As funções  $\cos \frac{\pi nx}{L}$  são pares, enquanto que  $\operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}$  são ímpares.

<sup>10</sup>De fato, veja (3.2), p. 85.

<sup>11</sup>Idem.

<sup>12</sup>Cf. p. 84.

**Observação 49 (SF dos cossenos e senos)** Considere as mesmas notações da observação 47. Assim, caso  $f$  seja par,  $b_n = 0$ . De fato,

$$b_n = \frac{1}{L} \left[ \int_{-L}^0 f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx + \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx \right],$$

onde a primeira integral é dada por

$$- \int_0^{-L} f(-x) \left( - \operatorname{sen} \frac{\pi n(-x)}{L} \right) dx = - \int_0^L f(u) \operatorname{sen} \frac{\pi nu}{L} du.$$

Logo, apenas termos pares da SF real “sobrevivem”. Assim, temos a SF dos cossenos, que representa funções pares diferenciáveis por partes, dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{\pi nx}{L} dx.$$

Analogamente, funções ímpares diferenciáveis por partes podem ser representadas pela SF dos senos dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx.$$

### Exemplos

- A função  $\psi$  do exemplo anterior é real e ímpar. Assim, ao combinarmos os termos simétricos de sua SF complexa, temos, para  $n > 0$ ,

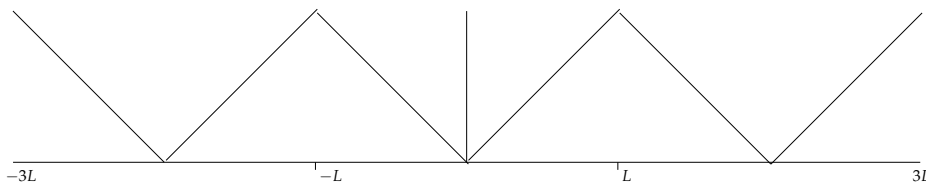
$$\begin{aligned} \frac{iL(-1)^n}{\pi n} \left( e^{i\pi nx/L} - e^{-i\pi nx/L} \right) &= \frac{iL(-1)^n}{\pi n} \left( 2i \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2L}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}, \end{aligned}$$

acarretando

$$\psi(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L}.$$

- Seja  $\phi$  a função ( $2L$ -periódica) definida por  $\phi(x) = |x|$  para todo  $x \in [-L, L]$ , conforme a figura 3.2.  $\phi$  é real, par, diferenciável por partes, não tem descontinuidades e,

Figura 3.2: Função  $\phi$



portanto, igual à soma de sua SF dos cossenos. Conseqüentemente, temos

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x dx = L$$

e, para  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos \frac{\pi nx}{L} dx \\ &= \frac{2x}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} \Big|_0^L - \frac{2}{\pi n} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{L} dx \\ &= 0 - 0 + \frac{2L}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi nx}{L} \Big|_0^L \\ &= \frac{2L}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Assim,

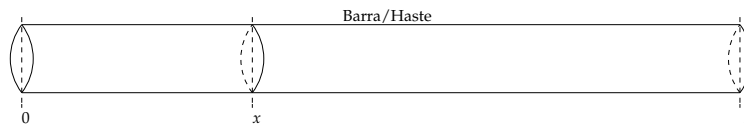
$$\phi(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{\pi(2k-1)x}{L}.$$

Em particular, para  $x = 0$ , temos, pela observação 46,<sup>13</sup> a série

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

### Solução da equação do calor 1D via separação de variáveis

Figura 3.3: Barra



Considere uma barra/haste como a da figura 3.3. Queremos resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = \kappa^2 u_{xx} & (\text{edp}), \\ u(0, t) = 0 \text{ e } u(L, t) = 0 & (\text{condições de fronteira/contorno}), \\ u(x, 0) = f(x) & (\text{condição inicial}), \end{cases} \quad (3.3)$$

onde:

- $u(x, t)$  é a temperatura  $u$  (da barra) em função da posição  $x$  e do tempo  $t$ ;
- $\kappa^2$  é a constante de difusão térmica e depende da condutividade térmica, da densidade e do calor específico do material constituinte da barra, conforme ilustramos na tabela dada a seguir;<sup>14</sup>
- Assim como *edo* significa *equação diferencial ordinária*, *edp* significa *equação diferencial parcial*.<sup>15</sup>

#### Resolução

<sup>13</sup>Teorema de Fourier, p. 86.

<sup>14</sup> $\kappa^2$  é medida em unidades de (comprimento)<sup>2</sup>/tempo.

<sup>15</sup>*edos* e *edps* representam o plural das frases (em itálico) supracitadas.

material	$\kappa^2$
prata	1,71
cobre	1,14
alumínio	0,80
ferro	0,12
granito	0,011
tijolo	0,0038

- **Separação de variáveis**

Seja  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Assim, por  $u_t = \kappa^2 u_{xx}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= \frac{1}{\kappa^2 T} \frac{dT}{dt} \\ &= \text{cte}, \end{aligned}$$

pois uma função apenas de  $x$  iguala uma função apenas de  $t$  (para quaisquer  $x$  e  $t$  admissíveis) apenas quando ambas representam a mesma função constante. Consequentemente,

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \text{cte} \kappa^2 T \implies T(t) = T_0 e^{\text{cte} \kappa^2 t}, \\ \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cte} X. \end{cases}$$

Caso não exista fonte externa de calor,  $T$  é decrescente e, portanto, para

$$\text{cte} = -p^2,^{16}$$

temos

$$T(t) = T_0 e^{-p^2 \kappa^2 t}$$

e

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -p^2 X \implies X(x) = \text{cte}_1 \cos px + \text{cte}_2 \sin px.$$

- **Condições de fronteira**

· Como

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \implies X(0) = 0,$$

temos  $\text{cte}_1 = 0$ , ou seja,

$$X(x) = \text{cte}_2 \sin px.$$

· Como

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \implies X(L) = 0,$$

temos

$$\sin pL = 0,$$

acarretando

$$pL = n\pi, \text{ ou seja, } p = \frac{n\pi}{L}, \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (3.4)$$

---

<sup>16</sup>Note que cte é negativa.

Assim,

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \text{ com } c_n \text{ real, } n = 1, 2, \dots^{17}$$

Portanto,

$$u_n(x, t) = b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2\pi^2\kappa^2 t/L^2}, \quad b_n = T_0 c_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consequentemente, como combinações lineares de soluções são soluções, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n^2\pi^2\kappa^2 t/L^2}.$$

• **Condição Inicial**

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

é uma SF dos senos, com

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

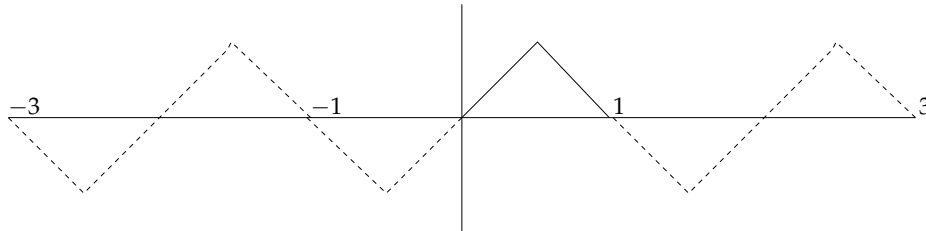
Note que, como cada termo da solução tem uma exponencial negativa, a temperatura deve decrescer no tempo e, no final, convergir para  $u = 0$ .

**Exemplo**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0; \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{se } 1/2 < x < 1, \end{cases} \end{cases}$$

onde  $f(x)$  está representada na figura 3.4.

Figura 3.4:  $f(x)$  é representada pela linha contínua



Aqui, como  $\kappa^2 = L = 1$  e  $b_n = 2 \left( \int_0^{1/2} x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (1-x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \right)$ , temos

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1, \text{ ímpar}} \frac{(-4)(-1)^n}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

<sup>17</sup> $X_0$  não pode ser calculado, pois, por (3.4),  $n \neq 0$ . Além disso, não consideramos índices negativos, pois  $X_{-n} = -X_n$ .

### 3.2 Transformada de Fourier (TF)

Para compararmos com a transformada supracitada e revisarmos algumas notações e funções especiais, precisamos do capítulo 4 (*Transformada de Laplace (TL) e edo*) do meu livro sobre *edps*, disponibilizado na minha página acadêmica, cujo endereço eletrônico encontra-se na capa desse manual.

Como ilustração do uso da TL ( $\mathcal{L}$ ) para resolvermos *edps*, de modo similar ao método (para resolver *edps*) do capítulo 4 supracitado, considere o seguinte:

#### Exemplo

##### Solução da equação da onda via TL

Seja  $u(x, t)$  a solução da *edp* do telégrafo, ou seja,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{k^2}{c^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

Primeiramente, vamos obter a *edp* satisfeita por  $\phi = ue^{-kt/2}$ . Em seguida, usaremos  $\mathcal{L}$  (numa função apenas de  $t$ ) para obtermos a solução dessa *edp* com condições de fronteira dadas por

$$u(x, 0) = \cos(mx), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = e^{kt/2}.$$

Assim, note que, ao substituirmos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x, t)e^{kt/2}, \\ u_t &= \phi_t e^{kt/2} + \frac{k}{2} \phi e^{kt/2}, \\ u_{tt} &= \phi_{tt} e^{kt/2} + k\phi_t e^{kt/2} + (k/2)^2 \phi e^{kt/2} \text{ e} \\ u_{xx} &= \phi_{xx} e^{kt/2} \end{aligned}$$

em (3.5), temos a *equação de onda*

$$\frac{1}{c^2} \phi_{tt} = \phi_{xx} \quad (3.6)$$

e, ao considerarmos

$$\mathcal{L} \{ \phi(x, t) \} = \Phi(x, s),$$

a propriedade

$$\mathcal{L} \{ f''(t) \} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

e as condições iniciais (em  $t = 0$ ) para  $u$  e  $u_t$ ,<sup>18</sup> temos a *edo*

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Phi = -\frac{s - \frac{k}{2}}{c^2} \cos(mx). \quad (3.7)$$

Caso  $\Phi = \Phi_H + \Phi_P$  seja a soma da solução do problema homogêneo e de uma solução particular do problema não-homogêneo associados à essa *edo*, temos, por

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Phi = 0,$$

<sup>18</sup>Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

$r^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0$ , isto é,  $r = \pm \frac{s}{c}$ . Portanto,

$$\Phi_H = \text{cte}_1 e^{\frac{s}{c}x} + \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x}.$$

Por outro lado, ao substituirmos  $\Phi_P = \text{cte} \cos(mx)$  e  $\frac{d^2\Phi_P}{dx^2} = -m^2 \text{cte} \cos(mx)$  em (3.7), temos

$$c^2 m^2 \text{cte} + s^2 \text{cte} = s - \frac{k}{2},$$

acarretando  $\text{cte} = \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2}$ . Consequentemente,

$$\Phi(x, s) = \text{cte}_1 e^{\frac{s}{c}x} + \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

Logo, para  $m = 0$ , temos  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, s) = \frac{s-k/2}{s^2}$  se  $\text{cte}_1 = 0$ .

Que condição de fronteira sobre  $\phi(x, t)$  acarreta esse resultado?

Pela tabela e pela propriedade de linearidade dadas no capítulo 4 supracitado, temos

$$\mathcal{L}^{-1} \{1/s\} = 1 \text{ e } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-k/2}{s^2} \right\} = -\frac{k}{2}t.$$

Portanto,

$$\mathcal{L} \left\{ 1 - \frac{k}{2}t \right\} = \frac{1}{s} - \frac{k/2}{s^2} = \frac{s-k/2}{s^2}.$$

Logo, ao consideremos  $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t) = 1 - \frac{k}{2}t$  para  $m = 0$ ,<sup>19</sup> temos

$$\Phi(x, s) = \text{cte}_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

Então, pela condição de fronteira para  $x = 0$ , temos  $\phi(0, t) = e^{-kt/2}u(0, t) = 1$ , acarretando

$$\begin{aligned} \Phi(0, s) &= \mathcal{L} \{ \phi(0, t) \} \\ &= \mathcal{L} \{ 1 \} \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Logo,  $\text{cte}_2 = \frac{1}{s} - \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2}$  e, assim,

$$\Phi(x, s) = \left( \frac{1}{s} - \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \right) e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s-k/2}{s^2+c^2m^2} \cos(mx).$$

<sup>19</sup>De fato, pela definição da TL (confira o capítulo 4 do livro supracitado),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \phi(x, t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{k}{2}t \right) e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L} \left\{ 1 - \frac{k}{2}t \right\} \\ &= \frac{s-k/2}{s^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, como, pela tabela supracitada,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_0}F(s)\} &= H(t-t_0)f(t-t_0), \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} &= \cos(at) \text{ e} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s+a^2}\right\} &= \text{sen}(at),\end{aligned}$$

temos

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(cm\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \frac{k}{2cm} \text{sen}\left(cm\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) + \\ \left(\cos(cmt) - \frac{k}{2cm} \text{sen}(cmt)\right) \cos(mx) & \text{se } t > x/c, \\ \left(\cos(cmt) - \frac{k}{2cm} \text{sen}(cmt)\right) \cos(mx) & \text{se } 0 < t < x/c, \end{cases}$$

restando agora, considerarmos  $u = \phi e^{kt/2}$  para resolvermos (3.5).

**Observação 50 (Definição da TF)** A TF de uma função  $f(t)$  adequada é definida pela integral

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= F(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt,\end{aligned}\tag{3.8}$$

caso essa integral exista.<sup>20</sup>

### Exemplo

$$f(t) = e^{-cte^2 t^2} \implies F(\omega) = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}.$$

De fato, por (3.8), temos

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2 + i\omega t} dt.\end{aligned}$$

Agora, completando quadrados do expoente do integrando, ou seja,

$$\begin{aligned}-cte^2 t^2 + i\omega t &= -cte^2 \left( t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{i\omega}{2cte^2} \right) \\ &= -cte^2 \left( t^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{i\omega}{2cte^2} - \frac{\omega^2}{4cte^4} \right) - \frac{\omega^2}{4cte^2} \\ &= -cte^2 \left( t - \frac{i\omega}{2cte^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4cte^2},\end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$u = t - \frac{i\omega}{2cte^2},$$

<sup>20</sup>A integral existirá caso  $f(t)$  satisfaça três hipóteses que apresentaremos na observação 53. Se nada for dito em contrário, o operador  $\mathcal{F}$  será aplicado apenas em funções que satisfaçam essas hipóteses!

temos

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4cte^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 u^2} du.$$

Finalmente, pela mudança de variáveis  $r = cte \cdot u$ , obtemos

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{cte\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4cte^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4cte^2}, \end{aligned}$$

pois, no exemplo da observação sobre a *convolução* para a TL, dado no capítulo 4 do livro supracitado, temos  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

onde usamos  $u = -x$  na segunda igualdade, de cima para baixo.

**Observação 51 (Linearidade)** Como a  $\mathcal{L}$ , a  $\mathcal{F}$  é linear.

De fato, sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) e^{i\omega t} dt \\ &= c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{i\omega t} dt + c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{i\omega t} dt \\ &= c_1 \mathcal{F} \{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{F} \{f_2(t)\}. \end{aligned}$$

**Observação 52 (Desenvolvimento da integral de Fourier (IF))** Caso  $f(t)$  seja uma função  $2L$ -periódica e diferenciável por partes,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

temos, pela observação 47,<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sen \frac{\pi n x}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{\pi n t}{L} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n (t-x)}{L} dt. \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Cf. p. 87.

Consequentemente, se  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$ ,  $\frac{\pi n}{L} = \omega$  e  $\frac{\pi}{L} = \Delta\omega$ , então

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

Portanto, temos a IF dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

A rigor, esse desenvolvimento formal (para a obtenção da IF) não é propriamente uma demonstração. Contudo, com as hipóteses da observação 53, uma demonstração similar a tal desenvolvimento pode ser encontrada em alguns livros (matematicamente mais rigorosos) da área.

**Observação 53 (Hipóteses para existência da IF)** *A IF existe se:*

1.  $f$  é diferenciável por partes;
2.  $f'$  é contínua por partes;
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$ .<sup>22</sup>

Note que  $f$  não precisa ser  $2L$ -periódica para que a IF seja válida.

**Observação 54 (Forma exponencial da IF: transformada de Fourier inversa (TFI))** *Devido a  $\cos(\omega(t-x))$  ser par como função de  $\omega$ , temos*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(t-x))dt.$$

*Devido a  $\sin(\omega(t-x))$  ser ímpar como função de  $\omega$ , temos*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega(t-x))dt = 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega(t-x)) + i \sin(\omega(t-x)))dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Consequentemente, para  $x = t$ , temos a TFI dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \{F(\omega)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

<sup>22</sup>Assim, como  $|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt| < \infty$ , temos  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$ .

**Exemplo**

Considere  $f(t) = \delta(t)$ , a função *delta de Dirac*.<sup>23</sup> Logo, como

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega \cdot 0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

temos

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Assim, não só obtivemos que a função  $\delta(t)$  e a função constante  $1/\sqrt{2\pi}$  são transformadas uma da outra por  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$ , mas também um novo modo de representar a função  $\delta(t)$ .<sup>24</sup>

**Observação 55 (“Escolha” das definições (das transformadas) dadas)** Poderíamos ter trocado  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  por  $\frac{1}{2\pi}$  em uma das transformadas, eliminado  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  na outra e/ou trocado os sinais dos expoentes nas duas, sem grandes perdas na teoria.

**Exemplo**

Caso

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= F(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} &= f(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

sejam utilizadas como as fórmulas para a TF e a TFI, respectivamente, resolva os seguintes exercícios:

1. Para a função de Heaviside  $H(t)$ , dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad 25$$

obtenha a TF de  $f(t) = H(t)e^{-at}$ , com  $a > 0$ .

2. Determine o valor de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

<sup>23</sup>Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

<sup>24</sup>Em alguns livros,  $\delta(t)$  é definida por essa integral!

<sup>25</sup>Confira o capítulo 4 do livro supracitado.

3. Utilize a TF para obter uma solução  $y(t)$  de

$$y(t)'' + 3y(t)' + 2y(t) = \delta(t).$$

### Resolução

1. Note que

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F} \{ H(t)e^{-at} \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Na última igualdade, de cima para baixo, usamos o seguinte fato:

*É nulo o limite do produto de uma função limitada por uma que converge para 0.*

Assim,

$$L \rightarrow \infty \implies e^{-aL} (\cos(\omega L) + i \operatorname{sen}(\omega L)) \rightarrow 0.$$

Caso as transformadas do enunciado desse exercício sejam trocadas pelas transformadas (3.8) e (3.9),<sup>26</sup> temos a seguinte resolução: Como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ e^{-at} & \text{se } t \geq 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a-i\omega)t} dt \\ &= -\frac{e^{-(a-i\omega)t}}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)} \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(a-i\omega)t}| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-at}| |e^{i\omega t}| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-at}| \\ &= 0, \end{aligned}$$

temos

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-i\omega)}.$$

<sup>26</sup>Confira as páginas 94 e 96.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{2i\omega} \mathcal{F} \left\{ H(t) e^{-5t} \right\} \right\} \\ &= H(t + 2) e^{-5(t+2)}, \end{aligned}$$

onde usamos o (resultado obtido no) item 1 (desse exemplo) na segunda igualdade e, na última igualdade, a vindoura observação 56, adaptada a definição das transformadas adotada nesse exemplo, isto é,

$$\mathcal{F} \{f(t - a)\} = e^{-i\omega a} \mathcal{F} \{f(t)\}.$$

3. Seja  $\mathcal{F} \{y(t)\} = Y(\omega)$ . Considerando a vindoura observação 57, adaptada a definição da TF dada nesse exemplo, isto é,

$$\mathcal{F} \{y'(t)\} = i\omega Y(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \{y''(t)\} = -\omega^2 Y(\omega),$$

além da TF de  $\delta(t)$  (obtida anteriormente), adaptada a definição da TF dada nesse exemplo, isto é,  $\mathcal{F} \{\delta(t)\} = 1$ , temos

$$Y(\omega)(\omega^2 - 3i\omega - 2) = -1 \implies Y(\omega) = \frac{-i}{\omega - i} + \frac{i}{\omega - 2i} = \frac{1}{i\omega + 1} - \frac{1}{i\omega + 2}.$$

Consequentemente, pelo item 1 desse exemplo, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{Y(\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{i\omega + 1} - \frac{1}{i\omega + 2} \right\} \\ &= (e^{-t} - e^{-2t}) H(t). \end{aligned}$$

### Observação 56 (Deslocamento)

$$\mathcal{F} \{f(t - a)\} = e^{i\omega a} F(\omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} \{e^{iat} f(t)\} = F(\omega + a).$$

#### Demonstração

Para a segunda igualdade, é fácil ver que

$$\mathcal{F} \{e^{iat} f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(\omega+a)t} dt.$$

Para a primeira, pela mudança de variáveis  $t - a = u$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{f(t - a)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega(u+a)} du \\ &= e^{i\omega a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du. \end{aligned}$$

**Observação 57 (Derivadas das funções  $f(t)$  e  $F(\omega)$ )**

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right\} = (-i\omega)^k F(\omega) \text{ e } \mathcal{F} \{ t^k f(t) \} = (-i)^k \frac{d^k}{d\omega^k} F(\omega).$$

**Demonstração**

Seja  $k = 1$ . Para a primeira igualdade, integrando-se por partes, temos

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = -i\omega F(\omega).^{27} \quad (3.10)$$

Para a segunda, ao passarmos a derivação em relação a  $\omega$  para dentro do sinal de integração, temos

$$\mathcal{F} \{ t f(t) \} = -i \frac{d}{d\omega} F(\omega). \quad (3.11)$$

As fórmulas para  $k > 1$  seguem (indutivamente) de (3.10) e (3.11)

**Exemplo**

Provaremos, de um modo diferente do que fizemos no primeiro exemplo dado após a definição de TF,<sup>28</sup> que

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-cte^2 t^2} \right\} = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}.$$

De fato,  $f(t) = e^{-cte^2 t^2}$  satisfaz a *edo*

$$\frac{d}{dt} f(t) + 2cte^2 t f(t) = 0.$$

Portanto, aplicando-se a observação 57 para  $k = 1$ , temos

$$i\omega F(\omega) + 2cte^2 i \frac{d}{d\omega} F(\omega) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) + \frac{\omega}{2cte^2} F(\omega) = 0.$$

Assim, temos

$$F(\omega) = CTE e^{-\omega^2/4cte^2},$$

onde

$$\begin{aligned} CTE &= F(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cte^2 t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{cte} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \quad (r = cte t) \\ &= \frac{1}{cte\sqrt{2}}. \quad (\text{Cf. exemplo supracitado}) \end{aligned}$$

<sup>27</sup>Pode ser provado que, se  $f(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , então existe a TF de  $f(t)$ .

<sup>28</sup>Cf. obs. 50, p. 94.

**Exemplo****Solução da equação de onda via TF**

Essa equação é dada por (3.6) e já foi resolvida via TL.<sup>29</sup> Para resolvê-la por TF, considere que a amplitude  $\phi(x, t)$  de pequenas vibrações satisfaz a equação supracitada, ou seja,

$$\phi_{xx} = \frac{1}{c^2} \phi_{tt}, \quad (3.12)$$

e a condição inicial

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad (3.13)$$

onde  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , pois, nesse caso, a onda ainda não se propagou, já que a propagação, além de espacial, também é temporal.<sup>30</sup> Logo, aplicando-se a TF em (3.12) (como função apenas de  $x$ ) e sendo  $\Phi(\omega, t) = \mathcal{F}\{\phi(x, t)\}$ , temos a equação

$$(-i\omega)^2 \Phi(\omega, t) = \frac{1}{c^2} \Phi_{tt}(\omega, t). \quad (3.14)$$

Como essa equação é uma *edo* em  $t$  e, ao aplicarmos a TF à (3.13), temos a condição inicial  $\Phi(\omega, 0) = F(\omega)$ , a solução de (3.14) é dada pela expressão

$$\Phi(\omega, t) = F(\omega) e^{\pm i\omega ct}.$$

Agora, aplicando-se a TFI nessa expressão, temos, pela observação 56,

$$\phi(x, t) = f(x \mp ct),$$

que corresponde a propagação de ondas nas direções positiva e negativa do eixo  $x$ , respectivamente.

**Exemplo****Solução da equação de calor unidimensional via TF**

Essa equação, no sistema (3.3),<sup>31</sup> já foi resolvida via SF. Para resolvê-la por TF, caso  $u(x, t)$  seja a temperatura (em função do tempo e do espaço) satisfazendo a *edp*

$$u_t = \kappa^2 u_{xx},$$

podemos aplicar a TF nessa equação como função apenas de  $x$  e, denotando-se

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\},$$

temos, pela observação 57 (na derivada em relação a  $x$ ), temos a seguinte *edo* em  $t$

$$U_t(\omega, t) = -\kappa^2 \omega^2 U(\omega, t),$$

cuja solução é dada por

$$U(\omega, t) = \text{cte} \cdot e^{-\kappa^2 \omega^2 t},$$

<sup>29</sup>Cf. p. 92.

<sup>30</sup>Essa condição sobre  $f(x)$  assegura o uso da fórmula da TF para a derivada de  $f(x)$ .

<sup>31</sup>Cf. p. 89.

onde  $\text{cte}$  depende de  $\omega$  e é determinada pelas condições iniciais. De fato,  $\text{cte} = U(\omega, 0)$  é a distribuição espacial inicial de  $U$ , que é dada pela TF aplicada a distribuição espacial inicial de  $u$ , isto é,  $u(x, 0)$ . Então,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cte}(\omega) e^{-\kappa^2 \omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega.$$

Portanto, por exemplo, caso tenhamos  $u(x, 0) = \delta(x)$  (e, assim,  $\text{cte}(\omega) = \text{cte}$ ), podemos completar quadrados em  $\omega$  para  $-\kappa^2 \omega^2 t - i\omega x$  e, por uma mudança de variáveis adequada, obtermos

$$u(x, t) = \frac{\text{cte}}{\kappa\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}.$$

De fato, basta considerarmos

$$-\left[ (\kappa\sqrt{t})^2 \omega^2 + i\omega x \right] = -(\kappa\sqrt{t})^2 \left( \omega + \frac{i x}{2(\kappa\sqrt{t})^2} \right)^2 - \frac{x^2}{4(\kappa\sqrt{t})^2}$$

e

$$u = \omega + \frac{i x}{2\kappa^2 t}.$$

**Observação 58 (Convolução)** Se  $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$ , então

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega).$$

### Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) e^{i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{i\omega t} dt \right) g(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\omega\tau} F(\omega) \right) g(\tau)d\tau \\ &= \sqrt{2\pi}F(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau, \end{aligned}$$

onde usamos a observação 56 na segunda igualdade, de cima para baixo.

### Exemplo

#### Oscilador harmônico amortecido

Considere a *edo*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t),$$

onde  $k$  e  $\omega_0^2$  são constantes tais que  $\omega_0^2 > k^2/4$ . Assim, se

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) \text{ e } \mathcal{F}\{g(t)\} = G(\omega),$$

então, aplicando-se a TF em ambos os membros da *edo* supracitada e usando a observação 57 em  $y(t)$ , temos

$$Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - ik\omega}.$$

Agora, se  $F(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - ik\omega}$ , então, pela observação 58, temos

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

onde

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - ik\omega + \omega_0^2} d\omega \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\left(\omega - \left(\frac{-ik + \sqrt{4\omega_0^2 - k^2}}{2}\right)\right)\left(\omega - \left(\frac{-ik - \sqrt{4\omega_0^2 - k^2}}{2}\right)\right)} d\omega, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{-kt/2}}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2/4}} \text{sen}(\sqrt{\omega_0^2 - k^2/4}t) & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

pelo método da subseção 2.5.2, segundo tipo.

**Observação 59 (TF e TFI do cosseno e do seno)** *Essas transformadas são definidas da seguinte maneira:*

1. TFC e TFCI

Caso  $f_c(t)$  seja par, como  $\cos(\omega t)$  é par, temos

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)(\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_c(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

2. TFS e TFSI

Analogamente, caso  $f_s(t)$  seja ímpar, temos

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad e \quad f_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \text{sen}(\omega t) d\omega.$$

**Exemplo**

Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1, \\ 0 & \text{se } |t| > 1, \end{cases}$$

$f(t)$  é dita função de passo unitário finita simétrica.

1. Determine  $F_c(\omega)$ , ou seja, a TFC de  $f(t)$ ;
2. Pela TFCl, mostre que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

3. Pelo item 1 desse exemplo, verifique que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1, \\ \pi/4 & \text{se } |t| = 1, \\ \pi/2 & \text{se } |t| < 1. \end{cases}$$

**Resolução**

Caso  $f(t) = f_c(t)$ , temos:

- 1.

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(\omega t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \Big|_0^1 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{sen } \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega, \end{aligned}$$

pelo item 1 desse exemplo.

3. Pela definição de  $f(t)$  e pelo item 2 desse exemplo, a verificação é trivial para  $t \neq \pm 1$ . Agora, para  $t = \pm 1$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos \omega}{\omega} d\omega &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx \quad (x = 2\omega) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

onde  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$  foi calculada no último exemplo da subseção 2.5.2.

**Observação 60 (Mudança de variável)** Se  $\text{cte} \neq 0$ , então

$$\mathcal{F} \{f(\text{cte } t)\} = \frac{1}{|\text{cte}|} F\left(\frac{\omega}{\text{cte}}\right).$$

**Demonstração**

- Para  $\text{cte} > 0$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\text{cte } t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\text{cte } t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u/\text{cte}} \frac{1}{\text{cte}} du \quad (u = \text{cte } t) \\ &= \frac{1}{\text{cte}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{\text{cte}} u} du \\ &= \frac{1}{|\text{cte}|} F\left(\frac{\omega}{\text{cte}}\right); \end{aligned}$$

- Para  $\text{cte} < 0$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\text{cte } t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\text{cte } t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{i\omega u/\text{cte}} \frac{1}{\text{cte}} du \quad (u = \text{cte } t) \\ &= -\frac{1}{\text{cte}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\frac{\omega}{\text{cte}} u} du \\ &= \frac{1}{|\text{cte}|} F\left(\frac{\omega}{\text{cte}}\right). \end{aligned}$$

**Exemplos**

- Como  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\omega)$ , temos

$f(t)$  par (respectivamente, ímpar)

Portanto,

$F(\omega)$  é par (respectivamente, ímpar).

- Se  $a$  e  $b$  são constantes positivas, então

$$\int_0^{\infty} e^{-a\omega} \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega} d\omega = \arctan \frac{b}{a}.$$

De fato, a função

$$f_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < b, \\ 0 & \text{se } |t| > b, \end{cases}$$

como no exemplo da função de passo unitário supracitada, tem TF

$$\mathcal{F}\{f_b(t)\} = \frac{2 \text{sen}(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}.$$

Portanto, por linearidade, temos

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} f_b(t) \right\} = \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega}.$$

Por outro lado, resolvendo-se de modo análogo a um exemplo dado anteriormente,<sup>32</sup> só que dessa vez também considerando a integral para  $t \in (-\infty, 0)$  (além da integral em  $(0, \infty)$  já obtida), temos

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-a|t|} \right\} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + \omega^2)}.$$

Analogamente, mas agora, aplicando a TFI, temos

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2 + t^2)} \right\} = e^{-a|\omega|}.$$

Agora, pela observação 58, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{2} f_b(t) \right) * \left( \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^2 + t^2} \right) \right\} &= \frac{\text{sen}(b\omega)}{\omega} e^{-a|\omega|} \\ &= F(\omega). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \frac{1}{a^2 + (t - \tau)^2} d\tau \\ &= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{t+b}^{t-b} \frac{1}{a^2 + u^2} du, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \arctan \frac{t+b}{a} - \arctan \frac{t-b}{a} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

onde, na primeira igualdade, de cima para baixo, usamos a integral  $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$ . Portanto, como  $\arctan$  é ímpar, basta considerarmos  $t = 0$  para obtermos o resultado desejado.

---

<sup>32</sup>Qual?

### 3.3 Exercícios

1. Determine a SF da função  $f(t)$  1-periódica, dita *onda quadrada*, onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{2}; \\ -1 & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

#### Resolução

Como a função é ímpar,<sup>33</sup> determinaremos a sua SF dos senos.<sup>34</sup> Portanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} f(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n t}{1/2} dt \\ &= 4 \int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi n t) dt \\ &= 4 \left[ -\frac{\cos(2\pi n t)}{\pi n} \right]_{t=0}^{t=1/2} \\ &= \frac{4}{\pi n} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par,} \\ \frac{8}{\pi n} & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a SF supracitada é dada por

$$\frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi(2m-1)t)}{2m-1}.$$

2. Esboce o gráfico de

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi; \\ \pi - t & \text{para } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Além disso, caso  $f(t)$  seja  $2\pi$ -periódica, determine a sua SF.

3. Determine a SF para a função

$$f(x) = \begin{cases} H(x) \text{ (função de Heaviside)} & \text{se } x \in [-\pi, \pi]; \\ f(x + 2\pi) \text{ (} f \text{ } 2\pi\text{-periódica)} & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Além disso, pela SF supracitada, obtenha o valor da série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

4. Obtenha a SF para

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ -\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) & \text{se } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$$

onde  $f(x) = f(x + 2\pi)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>33</sup>Esboce o gráfico de  $f(t)$  com  $t$  variando de  $-\frac{1}{2}$  até  $\frac{1}{2}$ .

<sup>34</sup>Cf. obs. 49, p. 88.

5. Determine a SF para

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \in [-\pi, \pi], \\ f(x + 2\pi) & \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sugira valores possíveis de  $f(x)$  em  $x = \pi$ .

6. Determine a SF para

7. Verifique que a SF da função  $2\pi$ -periódica  $f(x)$ , onde  $f(x) = e^{ax}$  no intervalo  $(-\pi, \pi)$  (com  $a$  real), é dada por

$$\frac{\sinh(\pi a)}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos(nx) - n \sin(nx)) \right).$$

Além disso, pela SF supracitada, obtenha os valores das seguintes quatro séries reais:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

### Resolução

Como vimos, os coeficientes da SF real são calculados via

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

e, para qualquer inteiro positivo  $n$ ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (3.15)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{ax}}{a} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a} \right) \\ &= \frac{2}{a\pi} \left( \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2} \right) \\ &= \frac{2 \sinh(a\pi)}{a\pi}. \end{aligned}$$

Agora, para evitarmos o cálculo das duas integrais (3.15) via integração por partes,

consideremos a seguinte técnica (já utilizada na seção 2.3):

$$\begin{aligned}
 a_n + \mathbf{i}b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{\mathbf{i}nx} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{(a+\mathbf{i}n)x}}{a + \mathbf{i}n} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^{(a+\mathbf{i}n)\pi} - e^{-(a+\mathbf{i}n)\pi}}{a + \mathbf{i}n} \right) \\
 &= \frac{2}{(a + \mathbf{i}n)\pi} \left( \frac{e^{a\pi} e^{\mathbf{i}n\pi} - e^{-a\pi} e^{-\mathbf{i}n\pi}}{2} \right) \\
 &= \frac{2(-1)^n}{(a + \mathbf{i}n)\pi} \left( \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2} \right) \\
 &= \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}(a\pi)}{(a + \mathbf{i}n)\pi},
 \end{aligned}$$

pois  $e^{\pm \mathbf{i}n\pi} = (-1)^n$ . Assim, ao multiplicarmos o segundo membro da última igualdade, de cima para baixo, por

$$\frac{a - \mathbf{i}n}{a - \mathbf{i}n'}$$

temos a expressão

$$a_n + \mathbf{i}b_n = \frac{2(-1)^n \operatorname{senh}(a\pi)}{(a^2 + n^2)\pi} (a - \mathbf{i}n)$$

e, portanto, ao compararmos as partes reais e imaginárias dessa expressão, temos

$$a_n = \frac{2a(-1)^n \operatorname{senh}(a\pi)}{(a^2 + n^2)\pi} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2n(-1)^n \operatorname{senh}(a\pi)}{(a^2 + n^2)\pi}.$$

Consequentemente, tendo calculado os coeficientes supracitados, podemos obter a SF requerida no enunciado desse exercício.

Para obtermos as séries reais citadas no enunciado desse exercício, consideremos, primeiramente,  $x = 0$  na SF supracitada. Logo, pelo teorema de convergência de Fourier, como  $f(x)$  é contínua em  $x = 0$ , ou seja,  $f(0) = 1$ , temos

$$\frac{\operatorname{senh}(\pi a)}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \right) = 1,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = \frac{\pi \operatorname{csch}(\pi a) - \frac{1}{a}}{2a}.$$

Além disso, note que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} + \frac{1}{a^2}.$$

Para finalizarmos a resolução, consideremos, agora,  $x = \pi$  na SF supracitada. Logo, pelo teorema de convergência de Fourier, como  $f(x)$  é descontínua no extremo direito

do intervalo  $(-\pi, \pi)$ , a SF converge para a média dos limites laterais de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow \pi^\pm$ , ou seja,

$$\frac{\sinh(\pi a)}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{a^2 + n^2} \right) = \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{2} \\ = \cosh(\pi a),$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi \coth(\pi a) - \frac{1}{a}}{2a}.$$

Além disso, note que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} + \frac{1}{a^2}.$$

8. Se

$$f(t) = \begin{cases} -t + e^t & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ t + e^t & \text{se } 0 \leq t < \pi, \\ f(t + 2\pi) & \text{se } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

esboce o gráfico de  $f(t)$  para  $-4\pi \leq t \leq 4\pi$  e obtenha a SF para  $f(t)$ .

9. Encontre a SF da função

$$f(t) = \begin{cases} \pi^2 & \text{se } -\pi < t < 0; \\ (t - \pi)^2 & \text{se } 0 \leq t < \pi; \\ f(t + 2\pi) & \text{se } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Em seguida, determine o valor das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

10. Determine a SF de meio período para a função do exercício anterior e esboce os gráficos das funções obtidas, para  $t \in [-2\pi, 2\pi]$ .<sup>35</sup>

### Resolução

Pelo exercício 7 supracitado, podemos considerar duas funções de meio período  $\pi$ , dadas por

$$f_1(x) = \pi^2 \quad \text{e} \quad f_2(x) = (x - \pi)^2,$$

e tentar extendê-las para funções  $2\pi$ -periódicas que poderão ser escritas pela SF

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

<sup>35</sup>A SF supracitada é uma forma de representar uma função definida num intervalo de extremos 0 e  $L$ , extendendo-a a uma função  $2L$ -periódica par ou ímpar.

- Caso  $f_1(x)$  seja par, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi^2 dx \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

e (para  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos(nx) dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_{x=-\pi}^{x=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, como  $f_1(x)$  é par,

$$b_n = 0.$$

- Caso  $f_1(x)$  seja ímpar, temos (para  $n = 0, 1, \dots$ )

$$a_n = 0$$

e (para  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi^2 \text{sen}(nx) dx \\ &= 2\pi \left[ -\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{x=-\pi}^0 \\ &= \frac{2\pi((-1)^n - 1)}{n}. \end{aligned}$$

- Caso  $f_2(x)$  seja par, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi)^2 dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{(x - \pi)^3}{3} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

e (para  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi)^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \pi \left[ \int_0^\pi x^2 \frac{\cos(nx)}{n} dx - 2\pi \int_0^\pi x \frac{\cos(nx)}{n} dx + \pi^2 \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

(onde a última igualdade, de cima para baixo, é consequência de integração por partes (em duas integrais) e de uma integração imediata) e, como  $f_2(x)$  é par,

$$b_n = 0.$$

· Caso  $f_2(x)$  seja ímpar, temos (para  $n = 0, 1, \dots$ )

$$a_n = 0$$

e (para  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi)^2 \text{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \pi \left[ \int_0^\pi x^2 \frac{\text{sen}(nx)}{n} dx - 2\pi \int_0^\pi x \frac{\text{sen}(nx)}{n} dx + \pi^2 \int_0^\pi \frac{\text{sen}(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

onde a última igualdade, de cima para baixo, é consequência de integração por partes (em duas integrais) e de uma integração imediata.

11. Dada a SF de meio período

$$t(\pi - t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)t)}{(2n-1)^3}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

utilize a *identidade de Parseval (IP)*

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (3.16)$$

– que é válida para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2L$ -periódica, com  $f$ ,  $|f|$  e  $|f|^2$  integráveis – para deduzir o valor da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}.$$

Em seguida, obtenha o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6},$$

decompondo-a em duas séries, onde uma delas é a série supracitada.

12. Verifique que a SF para a função  $f(x) = x^4$ ,  $-\pi < x < \pi$ , é dada por

$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{n^4} (\pi^2 n^2 - 6) \cos(nx)$$

e explique porque essa série não contém termos com senos. Além disso, use essa série para obter o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4},$$

considerando-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

13. Dada a SF

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(nx), \quad -\pi < x < \pi,$$

integre termo a termo para obter a SF para  $x^2$ , calculando a constante de integração, integrando ambos os membros para  $x \in [-\pi, \pi]$ . Use a mesma técnica da SF para  $x^4$  dada no exercício anterior para obter a SF para  $x^5$  em  $-\pi < x < \pi$ .

14. Num circuito elétrico, a voltagem é dada por

$$V(t) = \begin{cases} 40 & \text{se } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{se } 2 < t < 5. \end{cases}$$

Obtenha os 5 primeiros termos da SF complexa para  $V(t)$ .

15. (a) Seja  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n x/L}$  uma SF complexa. Dessa série, obtenha a IP

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

(b) Aplique a IP para a função  $2L$ -periódica  $\psi(x) = x$ ,  $x \in [-L, L]$ , obtendo

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

16. Usando separação de variáveis, resolva o PVC

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \\ u(x, 0) = x(\frac{\pi}{4} - x) & \text{no instante } t = 0, \\ u(0, t) = u(\frac{\pi}{4}, t) = 0 & \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

escrevendo a SF para a função  $x(\frac{\pi}{4} - x)$ .

17. Use TL para resolver novamente o PVC da questão anterior mas, dessa vez, obtenha

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -x^2 + \frac{\pi}{4}x - 2\kappa t \\ & + 2\kappa \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{senh}(\frac{\pi}{4} - x) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}}{s^2 \text{senh}(\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\} \\ & + 2\kappa \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\text{senh}(x \sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{s^2 \text{senh}(\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{s}{\kappa}}} \right\}. \end{aligned}$$

Use TL para inverter a expressão anterior. Explique quaisquer diferenças entre essa solução e a resposta do exercício anterior.

18. A função  $u(x, t)$  satisfaz o PVC

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{para } x > 0, a > 0, b > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{para todo } x, \\ u(0, t) = 1 & \text{para todo } t, \\ u \rightarrow 0 & \text{quando } x \rightarrow \infty, \text{ para todo } t > 0. \end{cases}$$

Determine  $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$ . (**Aviso:** Não inverta  $U$ ).

19. Resolva o PVC

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ u(x, 0) = 0 \text{ para todo } x, \\ u(0, y) = 1 \text{ para todo } y > 0, \\ u(x, y) \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Sugestão: Use a questão anterior!

20. Suponha que  $u(x, t)$  satisfaça a *edp* do telégrafo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{k^2}{c^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Determine a *edp* satisfeita por  $\phi = ue^{-kt/2}$ ; Em seguida, use TL (em  $t$ ) para obter a solução com condições de fronteira

$$u(x, 0) = \cos(mx), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = e^{kt/2}.$$

21. A função  $u(x, t)$  satisfaz o PVC

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0; \quad x > 0, t > 0; \quad u(0, t) = f(t); \quad u(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0,$$

onde  $f(t)$  é contínua por partes e de ordem exponencial. Obtenha a solução para esse PVC via TL e convolução (para TL). Determine a solução explícita para  $f(t) = \delta(t)$ , onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac.

22. Um sólido semi-infinito ocupando a região  $x \geq 0$  tem temperatura inicial nula. Um fluxo de calor constante é aplicado a face em  $x = 0$ , tal que  $T_x(0, t) = -\alpha$ , onde  $T$  é a temperatura do campo e  $\alpha$  é uma constante. Supondo condução de calor linear, encontre a temperatura para qualquer ponto  $x > 0$  da barra e mostre que a temperatura da face no instante  $t$  é dada por

$$\alpha \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

onde  $\kappa$  é a condutividade térmica da barra.

23. Use

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

como fórmulas para a TF e a TFI, respectivamente, para resolver esse e os próximos dois exercícios.

A função de Heaviside  $H(t)$  é dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } t < 0, \\ 1 & \text{para todo } t \geq 0. \end{cases}$$

Obtenha a TF de  $f(t) = H(t)e^{-at}$ , onde  $a > 0$ .

Soluções possíveis:  $F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$ ;  $F(\omega) = \frac{1}{a+\omega}$ ;  $F(\omega) = \frac{1}{\omega+ia}$ .

24. Determine o valor de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\omega}}{5 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$

Soluções possíveis:  $H(t+2)e^{-5(t+2)}$ ;  $H(t)e^{2it}$ ;  $H(e^{-5(t+2)})$ .

25. Use TF para obter uma solução  $y(t)$  de

$$y(t)'' + 3y(t)' + 2y(t) = \delta(t).$$

Soluções possíveis:

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} - e^{-2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} e^t - e^{2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} e^t + e^{2t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

26. Resolva os 3 exercícios anteriores, agora usando

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

27. Verifique que  $\mathcal{F} \left\{ e^{-cte^2 t^2} \right\} = \frac{1}{cte\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4cte^2}}$ .

28. Resolva  $\phi_{xx} = \frac{1}{c^2} \phi_{tt}$  (EO) via TF, considerando a condição inicial  $\phi(x, 0) = f(x)$ , onde  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

29. Resolva a Equação do Calor Unidimensional aplicando TF em  $x$  a  $u_t = \kappa^2 u_{xx}$ , considerando  $u(x, 0) = \delta(x)$ .

30. Resolva, via TF, a edo do oscilador harmônico amortecido

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t),$$

onde  $k$  e  $\omega_0^2$  são constantes tais que  $\omega_0^2 > k^2/4$ .

31. Para a função passo unitário finita simétrica

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

resolva os seguintes itens:

(a) Determine  $F_c(\omega)$ , ou seja, a TFC de  $f(t)$ ;

(b) Pela TFCL, mostre que

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

(c) Use o ítem anterior desse exercício, para verificar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega \cos(\omega t)}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & |t| > 1, \\ \pi/4, & |t| = 1, \\ \pi/2, & |t| < 1. \end{cases}$$

32. (a) Mostre que a TFS e a TFC de  $e^{-at}$  são dadas (respectivamente) por

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}.$$

Sugestão: Cada uma das transformadas pode ser relacionada a outra via integração por partes.

- (b) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-at}, \quad t > 0, \quad \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-at}, \quad t > 0.$$

33. Verifique que  $\int_0^\infty e^{-a\omega} \frac{\operatorname{sen}(b\omega)}{\omega} d\omega = \arctan \frac{b}{a}$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas.