UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PROFESSOR JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES – CMI031 – TURMA MI

1. Calcule a integral dupla
$$\int\int_{D_{xy}} \left(\sqrt{1+y^3}+x\right) dxdy$$
com domínio de integração dado por
$$D_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\,:\,0\leq x\leq 2\ \text{ e }\ \sqrt{x}\leq y\leq\sqrt{2}\right\}.$$

2. Calcule a integral dupla
$$\int\int_{D_{xy}} \cos\left(x^2+y^2\right) dxdy$$
com domínio de integração dado por
$$D_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,-1\leq x\leq 1\ \text{ e }\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq 0\right\}.$$

3. Caso D_{xyz} represente a região interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, abaixo do plano $z=4$ e acima do paraboloide $z=1-x^2-y^2$, calcule
$$\int\int\int_{D_{xyz}} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz.$$

4. Calcule
$$\int\int\int_{D_{xyz}} \|\nabla f\|\, dxdydz$$
para
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$
e
$$D_{xyz}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

5. Utilize o Teorema de Green para calcular a área da região definida pelo conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$ com fronteira dada pela *hipociclóide*, isto é, curva dada pela equação
$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$
orientada no sentido anti-horário.

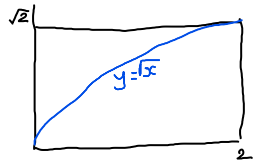
6. Calcule a integral de linha
$$\oint_\Gamma \left(3y-e^{\operatorname{sen} x}\right) dx+\left(7x+\sqrt{y^4+1}\right) dy$$
com Γ dada pela circunferência de centro na origem, raio $r=3$ e orientação anti-horária.

7. Calcule o trabalho τ realizado pelo campo de forças
$$F(x,y,z)=\left(x^2,2xy+x,z\right)$$
ao longo da circunferência
$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=1 \text{ e } z=0\right\}$$
orientada no sentido anti-horário.

8. Calcule o trabalho τ realizado pelo campo de forças
$$F(x,y,z)=-y\cos^2 x\,\vec{i}+\left(y^2+z^2\right)\vec{j}$$
ao longo do retângulo Γ cujos vértices são os pontos
$$(0,0,0),\ (\pi,0,0),\ (\pi,2,0)\ \text{ e }\ (0,2,0),$$
orientada no sentido anti-horário.

Resoluções:

1. Como a integral



$$\int \sqrt{1+y^3}dy$$

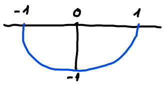
não tem resolução analítica, consideraremos a região de tipo 2 dada por

$$D_{xy} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq y^2 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{2}\right\}.$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_{xy}} \left(\sqrt{1+y^3}+x\right) dxdy &= \int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \left(\int_{x=0}^{x=y^2} \left(\sqrt{1+y^3}+x\right) dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \left[x\sqrt{1+y^3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \left(y^2\sqrt{1+y^3} + \frac{y^4}{2} \right) dy \\
&= \frac{1}{3}\int_{u=1}^{u=1+2^{3/2}} u^{1/2}du + \int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \frac{y^4}{2}dy \qquad (u = 1+y^3) \\
&= \left[\frac{2}{9}u^{3/2}\right]_{u=1}^{u=1+2^{3/2}} + \left[\frac{y^5}{10}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{9}\left(1+2^{3/2}\right)^{3/2} - \frac{2}{9} + \frac{2^{5/2}}{10} \\
&\approx 2.
\end{aligned}$$

2. A mudança para coordenadas polares resulta em

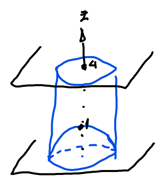


$$D_{r\theta} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq r \leq 1 \text{ e } \pi \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_{xy}} \cos\left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int\int_{D_{r\theta}} \cos\left(r^2\right) rdrd\theta \\
&= \int_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \cos\left(r^2\right) rdr \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{u=0}^{u=1} \cos u \, du \qquad (u = r^2) \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{sen} u\right]_{u=0}^{u=1} \\
&\approx 0,421\pi.
\end{aligned}$$

3. Via coordenadas cilíndricas, temos



$$D_{r\theta z} = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 1-r^2 \leq z \leq 4\right\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{D_{xyz}} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \int\int\int_{D_{r\theta z}} r^2 drd\theta dz \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{z=1-r^2}^{z=4} dz \right) r^2 dr \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{r=1} \left(3+r^2\right) r^2 \, dr \\
&= 2\pi \left[r^3 + \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=1} \\
&= \frac{12\pi}{5}.
\end{aligned}$$

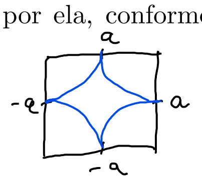
4. Via coordenadas esféricas, temos

$$D_{\rho\phi\theta} = \left\{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq \rho \leq 1,\, 0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\iiint_{D_{xyz}} 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz &= 2\iiint_{D_{\rho\phi\theta}} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^3 \operatorname{sen}\phi\, d\rho d\phi d\theta \\ &= (2\pi)(-\cos\pi + \cos 0)(1/4) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

5. Considere que a curva Γ represente a hipociclóide e $a(D)$ seja a área delimitada por ela, conforme o enunciado da questão. Portanto, pela parametrização de Γ dada por



$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t\right) \in \mathbb{R}^2,$$

que acarreta

$$dx = 3a\cos^2 t(-\operatorname{sen} t) \text{ e } dy = 3a\operatorname{sen}^2 t\cos t,$$

e pela equação (5.4) da página 178 do livro adotado, temos

$$\begin{aligned}a(D) &= \frac{1}{2}\oint_\Gamma -ydx + xdy \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t\operatorname{sen}^4 t + \operatorname{sen}^2 t\cos^4 t\right)dt \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\operatorname{sen}^2 t\left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right)dt \\ &= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}(2\cos t\operatorname{sen} t)^2\,dt \\ &= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(2t)dt \qquad (u = 2t) \\ &= \frac{3a^2}{16}\int_0^{4\pi}\operatorname{sen}^2 u\,du \\ &= \frac{3a^2}{16}\left[\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{4}\right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{3a^2\pi}{8}\text{ u.a.}\end{aligned}$$

6. Pelo teorema de Green, se

$$f(x, y) = (3y - e^{\operatorname{sen} x}) \text{ e } g(x, y) = \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right),$$

então

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy &= \oint_\Gamma f dx + g dy \\ &= \iint_D (g_x - f_y)dxdy \\ &= \iint_D (7-3)dxdy \\ &= 4\iint_D dxdy \\ &= 4 \times (\text{valor numérico da área de } D) \\ &= 36\pi.\end{aligned}$$

7. Se $\Gamma = \partial S$ e $d\gamma = ds$, então, pelo teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\tau &= \oint_\Gamma F \cdot d\gamma \\
&= \int\!\!\int_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n}\, ds \\
&= \int\!\!\int_S (0, 0, 2y+1) \cdot \vec{k}\, dxdy \\
&= \int\!\!\int_S (2y+1) dxdy \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} (2r \operatorname{sen}\theta + 1) r dr d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

8. Se $\Gamma = \partial S$ e $d\gamma = ds$, então, pelo teorema de Stokes,

$$\begin{aligned}
\tau &= \oint_\Gamma F \cdot d\gamma \\
&= \int\!\!\int_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n}\, ds \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=2} (-2z, 0, \cos^2 x) \cdot \vec{k}\, dydx \\
&= 2 \int_0^\pi \cos^2 x\, dx \\
&= \int_0^\pi (1 + \cos(2x))\, dx \\
&= \pi.
\end{aligned}$$