Modelagem

Introdução

Para identificar métodos para melhorar ou implantar, por exemplo, um sistema, é preciso construir uma representação sintética ou modelo do sistema físico, que possa ser usado para descrever o efeito de uma variedade de soluções propostas.

Um modelo é uma representação da realidade que captura "a essência" da realidade. Uma fotografia é um modelo da realidade retratada na imagem. A pressão arterial pode ser usada como modelo da saúde de um indivíduo. Uma campanha piloto de vendas pode ser usada para modelar a resposta dos indivíduos a um novo produto. Em cada caso, o modelo captura algum aspecto da realidade que ele tenta representar. (fonte: link)

Como um modelo captura apenas certos aspectos da realidade, pode ser inadequado, pois pode capturar os elementos inadequados da realidade. A temperatura é um modelo de condições climáticas, mas pode ser inadequado se alguém estiver interessado em pressão atmosférica. A fotografia de uma pessoa é um modelo dessa pessoa, mas fornece poucas informações sobre seu desempenho acadêmico. Uma equação que prevê vendas anuais de um produto específico é um modelo desse produto, mas é de pouco valor se estivermos interessados no custo de produção por unidade. Assim, a utilidade do modelo depende do aspecto da realidade que ele representa.

Se um modelo capturar os elementos apropriados da realidade, mas capturá-los de maneira distorcida ou tendenciosa, ele ainda poderá não ser útil. Uma equação que preveja o volume mensal de vendas pode ser exatamente o que o gerente de vendas está procurando, mas pode levar a sérias perdas se estimar constantes altas de vendas. Um modelo útil é aquele que captura os elementos adequados da realidade com precisão aceitável.

Assim que detectar um problema, pense e compreenda-o para "traduzir" adequadamente o problema por escrito. Desenvolva um modelo para representar a realidade, a fim de conceber/usar um método/algoritmo de solução. Um bom modelo deve ser inclusivo (inclui o que pertence ao problema) e excludente (deixa de fora o que não pertence ao problema). Ou seja, o modelo simplifica a realidade, porém preserva as relações essenciais de causa e efeito sobre o problema.

Nesta disciplina estamos interessados em modelos matemáticos. A construção de um modelo desse tipo é feita via equações matemáticas. Cria-se, portanto, um modelo simbólico, usando-se relações matemáticas que descrevem o problema em estudo. O modelo, então, consiste em expressões matemáticas relacionadas, que descrevem os aspectos essenciais do problema.

Para a construção de um modelo matemático deve-se saber com exatidão quais são as variáveis que influenciam o sistema. O comportamento de um sistema real é influenciado por um número muito grande de elementos variáveis. No entanto, mesmo numa situação real, que envolva um número muito grande de variáveis, o seu comportamento fundamentalmente é influenciado por uma quantidade reduzida de variáveis principais. Dessa forma, a simplificação do sistema real em termos de um modelo passa primeiramente pela identificação dessas variáveis principais. (fonte: link)

Um modelo matemático geralmente consiste em quatro partes: um conjunto de variáveis de decisão, os parâmetros, a função objetivo e um conjunto de restrições. Ao formular um determinado problema de decisão em forma matemática, você deve praticar a compreensão do problema (isto é, a formulação de modelo mental) lendo e relendo cuidadosamente a declaração do problema. Ao tentar entender o problema, faça as seguintes perguntas gerais (fonte: link):

i) **Quais são as variáveis de decisão**? Ou seja, o que são entradas controláveis? Defina as variáveis de decisão com precisão, usando nomes descritivos. Lembre-se de que as entradas controláveis também são conhecidas como atividades controláveis, variáveis de decisão e atividades de decisão.

ii) **Quais são os parâmetros**? Ou seja, quais são as entradas incontroláveis? Estes são geralmente os valores numéricos constantes fornecidos. Defina os parâmetros com precisão, usando nomes descritivos.

iii) **Qual é o objetivo**? Qual é a função objetivo? O que o "dono" do problema deseja? Como o objetivo está relacionado às suas variáveis de decisão? É um problema de maximização ou minimização?

iv) **Quais são as restrições**? Ou seja, quais requisitos devem ser atendidos? Devo usar o tipo de restrição de desigualdade ou igualdade? Quais são as conexões entre variáveis? Escreva-as em palavras antes de colocá-las em forma matemática.

Assim, a estrutura de um modelo matemático é a seguinte (fonte: link):

- **variáveis de decisão** - correspondem às quantidades de decisões a serem tomadas e cujos valores são os que se pretendem determinar. As variáveis de decisão são as incógnitas para serem determinadas da solução do modelo;
- **função objetivo** - corresponde à medida de rendimento apropriada (por exemplo, custo) e é expressa por uma função matemática envolvendo as variáveis de decisão e os parâmetros a atribuir a cada uma delas. A função objetivo define a medida de efetividade do sistema como uma função matemática de suas variáveis de decisão. Por exemplo, se o objetivo do sistema é maximizar o lucro total, a função objetivo deve especificar o lucro em termos das variáveis de decisão. Em geral, a solução ótima do modelo é obtida quando os melhores valores correspondentes das variáveis de decisão

são substituídos na função objetivo, enquanto satisfazem as restrições. (Prof. José Arnaldo Barra Montevechi, UNIFEI)

- **restrições** - Para considerar as limitações físicas do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam os valores possíveis das variáveis de decisão. Isto é usualmente expresso em forma de equações e/ou inequações matemáticas envolvendo as variáveis e os parâmetros.

Um passo importante na formulação do modelo matemático é a construção da função objetivo, o que exige o desenvolvimento de uma medida quantitativa de rendimento. Esta medida pode ser muitas vezes evidente correspondendo a uma grande meta da organização, ou pode ser abstrata (por exemplo, "utilidade"). Após desenvolver a medida de rendimento, a função objetivo é então obtida, exprimindo esta medida como uma função matemática das variáveis de decisão (fonte: link). Em suma, a função objetivo deve representar o objetivo do tomador de decisão.

Exemplos

1) Dada a receita $R(x) = -2x^2 + 10x$, obtenha o valor de x que a maximiza.
2) Um fabricante produz dois tipos de liga nas quantidades de x e y toneladas, respectivamente. Se o custo total da produção é expresso pela função $C(x,y)=x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a renda é dada por $R(x,y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, encontre o nível de produção que maximiza o lucro $L(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$
3) Ache o máximo e o mínimo de $f(x, y) = 5x - 3y$ sujeito a limitação (restrição) $x^2 + y^2 = 136$.

Programação Linear

Um tipo importante de modelo matemático é o modelo de programação linear (PL). A programação linear lida com uma classe de problemas em que a função objetivo é linear e todas as relações entre as variáveis correspondentes aos recursos são lineares.

A palavra "programação" em programação linear tem significado diferente do que a "programação" em programação por computador. No primeiro caso, significa planejar e organizar, enquanto no segundo caso, significa escrever códigos para realizar operações/cálculos.

Qualquer problema de PL consiste em uma função objetivo e um conjunto de restrições. Na maioria dos casos, as restrições vêm do ambiente em que você trabalha para atingir seu objetivo. Quando você deseja alcançar o objetivo desejável, perceberá que o ambiente está estabelecendo algumas restrições (isto é, dificuldades, limitações) para cumprir seu desejo ou objetivo.

O aspecto de um modelo geral de programa linear é

$$
\begin{array}{ll}
\max\ (\min) & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sa} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0
\end{array}
$$

onde

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: n variáveis de decisão

$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$: função objetivo

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, $j = 1, \ldots, m$: m restrições

c_j, j=1,...,n: parâmetros/pesos da função objetivo

b_j, a_{ij}, i=1,...,n, j=1,...,m: parâmetros

As restrições podem ser do tipo ≥, = e ≤.

Exemplos de formulação de um PL

A) Suponhamos que uma empresa fabrica 2 produtos (1 e 2) e consegue vender toda a produção. Cada produto requer certo tempo de produção nos três departamentos de fabricação. Atualmente cada departamento tem uma quantidade fixa de homens-hora disponível por semana. O problema é decidir quanto fabricar de cada produto para para maximizar o lucro. Dados os lucros unitários de cada produto, então a administração da empresa deve então designar os recursos fixos de modo a otimizar alguma função objetivo e ainda satisfazer algumas outras condições definidas (as restrições).

Produto	Tempo de fabricação, horas		
	Departamento A	Departamento B	Departamento C
1	2	1	4
2	2	2	2

Departamento	Mão de obra hora/semana disponível
A	160
B	120
C	180

Produto	Lucro unitário
1	1
2	1,5

i) Variáveis: x1 e x2 respectivamente as quantidades a serem produzidas dos produtos 1 e 2

ii) Função Objetivo: $Z(x1, x2) = 1x1 + 1{,}5x2$

iii) Restrições: $2x1 + 2x2 \leq 160$, $1x1 + 2x2 \leq 120$, $4x1 + 2x2 \leq 180$

iv) PL:

max $Z = 1x1 + 1{,}5x2$		(função objetivo – maximizar o lucro)
sa	$2x1 + 2x2 \leq 160$	(restrição de mão de obra hora no departamento A)
	$1x1 + 2x2 \leq 120$	(restrição de mão de obra hora no departamento B)
	$4x1 + 2x2 \leq 180$	(restrição de mão de obra hora no departamento C)
	$x1, x2 \geq 0$	(não negatividade das variáveis)

B) (Erico Fagundes Anicet Lisboa, http://www.ericolisboa.eng.br) Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- o pacote de ração Tobi é vendido por \$ 20 e o pacote de ração Rex por \$ 30;
- a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 2 kg de cereais e 4 kg de carne;
- o kg de carne custa \$ 4 e o kg de cereais custa \$ 1;
- estão disponíveis por mês 30000 kg de cereais e 10000 kg de carne.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro.

i) Variáveis: x1 e x2 respectivamente as quantidades e pacotes a serem produzidas das rações Tobi e Rex

ii) Função Objetivo: $Z(x1, x2) = [20 - (5\times1 + 1\times4)]x1 + [30 - (2\times1 + 4\times4)]x2$

iii) Restrições: $5x1 + 2\,x2 \leq 30000$, $1x1 + 4x2 \leq 10000$

iv) PL:

max $Z = 11x1 + 12x2$		(função objetivo – maximizar o lucro líquido)
sa	$5x1 + 2x2 \leq 30000$	(restrição de cereais)
	$1x1 + 4x2 \leq 10000$	(restrição de carne)
	$x1, x2 \geq 0$	(não negatividade das variáveis)

Vantagens da programação linear

A seguir estão algumas vantagens da programação linear (fonte: link):

1. A programação linear ajuda a obter o melhor uso dos recursos produtivos. Também indica como um tomador de decisão pode empregar seus fatores produtivos efetivamente selecionando e distribuindo/alocando os recursos.

2. Técnicas de programação linear melhoram a qualidade das decisões. A abordagem de tomada de decisão do usuário dessa técnica se torna mais objetiva e menos subjetiva.
3. As técnicas de programação linear fornecem soluções viáveis (que satisfazem as restrições), mas podem não ser práticas, pois podem existir outras restrições que operam fora do problema que devem ser levadas em consideração. Só porque podemos produzir tantas unidades, não significa que elas possam ser vendidas. Assim, a modificação necessária de sua solução matemática é necessária por uma questão de conveniência para o tomador de decisão.
4. Destacar gargalos nos processos de produção é a vantagem mais significativa dessa técnica. Por exemplo, quando ocorre um gargalo, algumas máquinas não conseguem atender à demanda enquanto outras permanecem inativas por algum tempo.
5. A programação linear também ajuda na reavaliação de um plano básico para mudanças de condições. Se as condições mudarem quando o plano for parcialmente executado, elas poderão ser determinadas para ajustar o restante do plano para obter melhores resultados.

Limitações dos Modelos de Programação Linear

1. Coeficientes constantes – não permite coeficientes difusos e estocásticos
2. Divisibilidade - soluções fracionárias (construir metade de um navio?)
3. Proporcionalidade - o lucro de cada atividade é proporcional ao nível de produção xj
4. Aditividade - restrições e função objetivo lineares - considera as atividades como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas. Por exemplo, a propaganda intensa de um produto pode afetar a venda de outro produto.

Exercícios

1) O Zoológico municipal necessita estabelecer uma dieta especial para cada animal, atendendo suas necessidades nutricionais e mantendo os custos os mais baixos possíveis. Tomando-se o exemplo do leão, sabe-se que sua dieta pode incluir carne crua, concentrado industrial de carne ou ração. Esses alimentos são compostos principalmente por proteína, carboidratos e gordura (outros constituintes menores serão ignorados nesse caso). A parcela (em porcentagem) de cada composto em cada alimento, assim como as necessidades do Leão e os custos de cada alimento ($/kg) são apresentados na tabela abaixo.

	Carne	Concentrado Industrial	Ração	Necessidade mínima
Proteínas	10%	25%	50%	30%
Carboidratos	20%	40%	30%	25%
Gordura	50%	20%	10%	20%
Custo	0,20	0,30	0,40	

Determinar a parcela de cada alimento na dieta do leão:

2) Um fabricante de móveis produz em sua fábrica cadeiras e mesas de madeira. Através de uma pesquisa de mercado foi estipulado que a demanda para esses produtos no próximo mês seriam de até 2000 cadeiras e 600 mesas. Sabe-se também que a quantidade de barras de madeira (em metros) e verniz (em litros) disponíveis pode ser um limitador a mais. As quantidades disponíveis e demandadas para produzir uma unidade de cada produto estão descritas na tabela abaixo. A fábrica deseja obter o maior lucro possível, sendo que o lucro obtido com cada cadeira é de R$ 50 e com cada mesa de R$ 80.

	Madeira	Verniz
Cadeira	3	0,05
Mesa	11	0,08
Disponibilidade	9000	120,00

3) Uma empresa tem um projeto de implantação do sistema CAD-CAM, cujas etapas, durações e precedências estão descritas na tabela abaixo. Determinar a duração mínima para realizar todo o projeto e o momento máximo para iniciar cada atividade.

Atividade	Descrição	Duração (dias)	Atividades precedentes
1	Pesquisas de áreas potencias	60	-
2	Escolha do sistema	180	-
3	Preparar projeto financeiro	15	1 e 2
4	Análise/aprovação da gerencia	80	3
5	Aprovação finanças	30	3
6	Burocracias envolvidas na importação	135	4 e 5
7	Compra-equipamentos nacionais	120	4
8	Compra- equipamentos importados	182	6
9	Construção de salas	60	7
10	Instalação dos equipamentos	40	8 e 9

4) Uma indústria produz bobinas com cada uma tendo 1 metro de largura e pesando 2 toneladas cada. As bobinas devem ser cortadas em porções menores e nas larguras e quantidades apresentadas na tabela abaixo.

Larguras	Quantidades demandadas (ton)
20 cm	5
30 cm	1
40 cm	4

Há 3 padrões de cortes, sendo a1= 20 cm, a2 = 30 cm, a3=40cm e o padrão dado por P = (a1,a2,a3). P1 = (5,0,0); P2 = (1,1,1); P3 (1,0,2). Determinar quanto de cada padrão deve ser produzido.

5) Um avião de carga tem 3 compartimentos para armazenar carga: frente, centro e traseira. Estes compartimentos tem limite de capacidade em termos de peso e espaço, como mostrado abaixo:

Compartimento	Capacidade peso (ton)	Capacidade espaço (m^3)
Frente	8	140
Centro	12	200
Traseira	7	85

Além disto, pesos das cargas em cada compartimento devem manter a mesma proporção em relação a capacidade de cada compartimento, a fim de manter o equilíbrio do avião. As 4 cargas abaixo estão disponíveis para carregar um determinado voo:

Carga	Peso(ton)	Volume(m^3/ton)	Lucro($/ton)
1	14	14	100
2	11	20	130
3	18	17	115
4	9	11	90

As cargas podem ser divididas em "pedaços" de qualquer peso e tamanho. O objetivo é determinar quanto de cada carga deveria ser aceita e como distribuí-la entre os compartimentos do avião de maneira a maximizar o lucro total do vôo. Formule este problema como um modelo de Programação Linear.

6) Suponha-se que se deseja produzir uma ração a custo mínimo pela mistura de dois produtos A e B, sendo que eles apresentam custos diferenciados:

- Produto A: R$ 3,00 por Kg
- Produto B: R$ 4,00 por kg

Quanto às aves, sabe-se que uma ave necessita de uma alimentação de vitaminas, cujas quantidades mínimas (em unidades por semana) mostramos a seguir:

- Vitamina 1 – 50 unidades
- Vitamina 2 – 100 unidades
- Vitamina 3 – 60 unidades
- Vitamina 4- 180 unidades

Os nutrientes acima serão obtidos dos produtos A e B, que possuem a composição a seguir:

Vitamina	Composição (unidades de vitamina por kg do produto)	
	Produto A	**Produto B**
1	5	25
2	25	10
3	10	10
4	35	20

Construa o modelo matemático com o objetivo de minimizar o custo.

7) Em uma fazenda um agro-pecuarista deseja saber qual é a cultura mais lucrativa e a disponibilidade é de 400 hectares para serem utilizados, R$ 500.000,00 em dinheiro e 10.000 horas disponíveis. Para 1 hectare de cada uma das culturas:

Atividade	Milho	Trigo	Soja	Açúcar	Disponível
Preparo do terreno	R$ 1.000	R$ 1.200	R$ 1.500	R$ 1.200	R$ 500.000
Mão-de-obra	20 h	30 h	25 h	28 h	10.000
Lucro	R$ 600	R$ 800	R$ 900	R$ 500	---

8) Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há 5 itens que ele deseja levar consigo, mas estes, juntos, excedem o limite de 23 quilos que ele supõe ser capaz de carregar. Para ajudar a si próprio no processo de seleção, ele deverá atribuir valores, por ordem crescente de importância a cada um dos itens. Seja, então, uma mochila de capacidade b = 60 e os 5 objetos da tabela a seguir, com os respectivos pesos e benefícios.

Objeto (j)→	1	2	3	4	5
Peso (wj)	52	23	35	15	7
Benefício (pj)	100	60	70	15	15

O objetivo é determinar o conjunto de objetos que devem ser colocados na mochila de forma a maximizar o valor de retorno respeitando a sua capacidade.

9) Uma determinada região está sendo ameaçada pela ruptura de uma barragem e deve ser evacuada em, no máximo, 10 horas. São no total 8.000 homens, 7.900 mulheres e 1.850 crianças a transportar. Cada pessoa poderá levar até 10 quilos de bagagem pessoal, Toda a região foi isolada e só circulam veículos autorizados para que se evitem acidentes e engarrafamentos. Para efetuar a evacuação estão disponíveis os seguintes meios:

	Veículo de 6 ton. do Exército	*Veículo de ¼ ton. do Exército*	*Helicóptero*	*Ônibus*	*Microônibus*	*Veículo de Passeio*
Quantidade de Unidades Disponíveis	10	20	15	10	5	60
Capacidade de Transporte	20 pessoas	5 pessoas	10 pessoas	30 pessoas	15 pessoas	5 pessoas
Capacidade para bagagem	1 ton.	20 kg	50 kg	1 ton.	500 kg	100 kg
Custo por Viagem	10 u.m.	4 u.m.	75 u.m.	5 u.m.	3 u.m.	2 u.m.
Tempo de Viagem	1 h	45 min.	10 min.	45 min.	30 min.	30 min.

Para minimizar o pânico, as crianças deverão viajar acompanhadas por suas mães. Existem 10 famílias com 5 filhos, 25 com 4 filhos, 150 com 3, 450 com 2 e 350 com 1. Os carros de passeio só poderão fazer uma viagem de evacuação, ficando, por segurança, retidos fora da área de perigo. Formular o programa de evacuação que minimize os custos finais da operação.

10) (http://pt.scribd.com/doc/87043896/8/Exercicios) Um fazendeiro tem que decidir o quanto vai plantar de milho e de alfafa. Os lucros são de R$ 2.000,00 por alqueire de milho e de R$ 1.000,00 por alqueire de alfafa. Suponha que suas limitações sejam: terra disponível é de 8 alqueires e água disponível para irrigação de 80.000 litros sendo que deseja-se plantar no máximo 4 alqueires de milho. Cada alqueire de milho requererá 10.000 litros de água para irrigação e cada alqueire de alfafa requererá 20.000 litros de água. Modele e resolva o problema.

11) (http://www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Practicas/folha1.pdf) Sabe-se que os alimentos leite, carne e ovos fornecem as quantidades de vitaminas dadas na tabela abaixo:

Vitamina	Leite (litro)	Carne (kg)	Ovos (dúzia)	Quantidade diária mínima
A	0,25 mg	2 mg	10 mg	1 mg
B	25 mg	20 mg	10 mg	50 mg
C	2,5 mg	200 mg	10 mg	10 mg
Custo diário	R$ 2,20	R$ 17,00	R$ 4,20	

Deseja-se calcular quais as quantidades de leite, carne e ovos, a fim de satisfazer as quantidades diárias mínimas de nutrientes a um custo mínimo.

12) (http://www.dcc.ufrj.br/~luziane/lista_modelagem_pos.pdf) Devido ao número inconstante de passageiros, uma companhia de ônibus necessita de um número variado de motoristas de pendendo do horário considerado. A tabela a seguir especifica a quantidade de motoristas necessários:

Horário	**Quantidade de Motoristas**
1 às 5 horas	15
5 às 9 horas	30
9 às 13 horas	26
13 às 17 horas	32
17 às 21 horas	30
21 às 1 hora	19

Considere que cada motorista trabalha 8 horas seguidas e que o serviço pode ser iniciado as 1, 5, 9, 13, 17, ou 21h. Formule este problema como um PL de modo que as demandas sejam atendidas e o número de motoristas seja o menor possível.

13) (http://www2.mat.ua.pt/io/Documentos/Practicas/folha1.pdf) Uma empresa produz dois tipos de fertilizantes, fosfato-Hi e fosfato-Li. São usados para a sua produção três materiais de base, tal como se indica abaixo:

	Toneladas de cada material requeridas para a produção de uma tonelada de fertilizante		
Material	Fostato-Hi	Fosfato-Li	Quantidade máxima de material disponível por mês (toneladas)
1 2 3	2 1,5 0,1	1 1 0	1500 1200 200
Preço de venda por tonelada de fertilizante (escudos)	2,24	1,49	

a) Apresente a formulação matemática deste problema, de tal forma a maximizar a receita mensal.

b) Considere o fato do fabricante ter capacidade para armazenar um máximo de 2000 toneladas de fertilizantes.

c) Por questões de equilíbrio na produção, a quantidade produzida de cada fertilizante não deve ser inferior a 30% da produção total. Pondere este fato.

d) Suponha que a produção de fertilizantes é realizada no inicio de cada mês e que os materiais não utilizados num mês para a produção de fertilizantes são armazenados até ao mês seguinte a um custo de 3000 escudos por tonelada de material 1 e 2 e 2500 escudos por tonelada de material 3. Reformule o modelo considerando este fato.

14) (http://www.di.ubi.pt/~cbarrico/Disciplinas/InvestigacaoOperacional/Downloads/FolhaPratica_2.pdf) Uma empresa possui 3 fábricas onde existe capacidade de produção em excesso. Todas as fábricas estão aptas a produzir um novo produto e a direção decidiu usar desta forma parte da capacidade disponível. Este novo produto pode ser fabricado em 3 tamanhos (grande [G], médio [M] e pequeno [P]), que dão um lucro unitário de 42, 36 e 30 contos, respectivamente. As fábricas 1, 2 e 3 têm capacidade em excesso para produzir diariamente 750, 900 e 450 unidades deste produto, respectivamente, independentemente dos tamanhos ou combinação de tamanhos.

O espaço de armazenamento disponível impõe uma limitação na produção do novo produto. As fábricas 1, 2 e 3 têm 13000, 12000 e 5000 m^2 de espaço de armazenamento disponível, respectivamente, para um dia de produção. Cada unidade dos produtos G, M e P produzida por dia necessita de 20, 15 e 12 m^2, respectivamente.

As previsões de vendas indicam que podem ser vendidas diariamente 900, 1200 e 750 unidades dos produtos G, M e P, respectivamente. Para manter uma força de trabalho uniforme nas fábricas e dispor de alguma flexibilidade, a direção decidiu que as fábricas devem usar a mesma percentagem da sua capacidade em excesso para produzir o novo produto. A direção pretende saber quanto de cada tamanho deve ser produzido em cada fábrica, de modo a maximizar o lucro total. Construa um modelo matemático de programação linear para o problema, explicitando o significado das variáveis de decisão, restrições e função objetivo.

15) (http://mayerle.deps.prof.ufsc.br/private/eps6403/ExerciciosPPL.pdf) Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R$ 1,00, R$ 1,50, e R$ 2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Planeje a produção semanal da fábrica.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Qde. de Máquinas
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0,7	1	2	2

16) (www.ift.unesp.br/users/darocha/Aula04.doc**)** Certo fabricante de combustível para avião vende dois tipos de combustível, A e B. O combustível de tipo A possui 25% de gasolina tipo 1, 25% de gasolina tipo 2 e 50% de gasolina tipo 3. O combustível de tipo B tem 50% de gasolina tipo 2 e 50% de gasolina tipo 3. Há disponível para produção de 500 litros-hora de gasolina tipo 1 e 200 litros-hora de gasolina tipo 2 e 3. Os custos são de 30 centavos por litro tipo i, 60 centavos por litro tipo 2 e 50 centavos por litro tipo 3. O preço de venda do combustível tipo A é de 75 centavos por litro e o do tipo B é e 90 centavos por litro.

17) Uma companhia deseja desenvolver um alimento energético para atletas. É necessário que o alimento contenha pelo menos 20 gramas de proteína, 40 gramas de carboidratos e 900 calorias. O lanche é feito a partir de três ingredientes, denotados por A, B e C. Cada onça (28,35 gramas) do ingrediente A custa $0,20 e rende 8 gramas de proteína, 3 ramas de carboidratos e 150 calorias. Cada onça do ingrediente B custa $0,10 e rende 2 gramas de proteína, 7 gramas de carboidratos e 80 calorias. Cada onça do ingrediente C custa $0,15 e rende 5 gramas de proteínas, 6 gramas de carboidratos e 100 calorias. (4,0 pontos). Formule um problema de programação linear-ppl para determinar quanto de cada ingrediente deverá ser usado para minimizar o custo do lanche.

18) Um estudante, na véspera de seus exames finais, dispõe de 100 horas de estudo para dedicar às disciplinas A, B e C. Cada um destes exames é formado por 100 questões, e ele (aluno) espera acertar, alternativamente, uma questão em A, duas em B ou três em C, por cada hora de estudo. Suas notas nas provas anteriores foram 6,7 e 10 respectivamente, e sua aprovação depende de atingir uma média mínima de 5 pontos em cada disciplina. O aluno deseja distribuir seu tempo de forma a ser aprovado com a maior soma total de notas. Escreva o ppl associado.

19) A partir de três insumos (I, II e III), uma companhia fabricas dois produtos (A e B). Uma unidade de A requer 20 unidades de I e 10 unidades de II; com 10 unidades de I, 10 unidades de II e 5 unidades de III é produzida uma unidade de B. No processo de fabricação de cada unidade de A, resulta na produção adicional de 2 unidades da matéria prima III. O lucro líquido obtido com a venda de uma unidade de A é 30 R$ e de B também é 30 R$. Há a disposição 600 unidades de I; 500 unidades de II e 150 unidades de III. Formule o problema de programação linear-ppl que maximize o lucro.

20) (https://www.analyticsvidhya.com/blog/2017/02/lintroductory-guide-on-linear-programming-explained-in-simple-english/)

Consider a chocolate manufacturing company which produces only two types of chocolate – A and B. Both the chocolates require Milk and Choco only. To manufacture each unit of A and B, following quantities are required:

- Each unit of A requires 1 unit of Milk and 3 units of Choco
- Each unit of B requires 1 unit of Milk and 2 units of Choco

The company kitchen has a total of 5 units of Milk and 12 units of Choco. On each sale, the company makes a profit of

- $ 6 per unit A sold
- $ 5 per unit B sold.

Now, the company wishes to maximize its profit. How many units of A and B should it produce respectively?

21) (http://mu.ac.in/portal/wp-content/uploads/2017/10/dormsem1linearprogramming.pdf)
A firm produces three products. These products are processed on three different machines. The time required to manufacture one unit of each of the three products and the daily capacity of the three machines are given in the table below:

Machine	Time per unit (Minutes)			Machine Capacity (minutes/day)
	Product 1	Product 2	Product 3	
M_1	2	3	2	440
M_2	4	-	3	470
M_3	2	5	-	430

It is required to determine the daily number of units to be manufactured for each product. The profit per unit for product 1, 2 and 3 is Rs. 4, Rs.3 and Rs.6 respectively. It is assumed that all the amounts produced are consumed in the market. Formulate the mathematical (L.P.) model that will maximize the daily profit.

22) https://www.utdallas.edu/~scniu/OPRE-6201/documents/LP01-Production-Planning.pdf
Suppose a production manager is responsible for scheduling the monthly production levels of a certain product for a planning horizon of twelve months. For planning purposes, the manager was given the following information:

- The total demand for the product in month j is d_j, for j= 1,..., 12. These could either be targeted values or be based on forecasts.
- The cost of producing each unit of the product in month j is c_j (dollars), for j= 1,..., 12. There is no setup/fixed cost for production.
- The inventory holding cost per unit for month j is h_j (dollars), for j= 1,..., 12. These are incurred at the end of each month.
- The production capacity for month j is m_j, for j = 1, 2,..., 12.

The manager's task is to generate a production schedule that minimizes the total production and inventory-holding costs over this twelve-month planning horizon. To facilitate the formulation of a linear program, the manager decides to make the following simplifying assumptions:

a) There is no initial inventory at the beginning of the first month.
b) Units scheduled for production in month j are immediately available for delivery at the beginning of that month. This means in effect that the production rate is infinite.

Shortage of the product is not allowed at the end of any month.

22) https://math.stackexchange.com/questions/2034078/project-scheduling-using-linear-programming
This problem deals with the creation of a project schedule; specifically, the project of building a house. The project has been divided into a set of jobs. The problem is to schedule the time at which each of these jobs should start and also to predict how long the project will take. Naturally, the objective is to complete the project as quickly as possible (time is money!). Over the duration of the project, some of the jobs can be done concurrently. But, as the following table shows, certain jobs definitively can't start until others are completed.

Job		Duration	Preceded by
1.	Sign Contract	0	–
2.	Framing	2	1
3.	Roofing	1	2
4.	Siding	3	2
5.	Windows	2.5	4
6.	Plumbing	1.5	4
7.	Electrical	2	3,5
8.	Inside Finishing	4	6,7
9.	Outside Painting	3	3,5
10.	Complete the Sale	0	8,9

a) Write an expression for the objective function, which is to minimize the project duration.

b) For each job *j*, write a constraint for each job *i* that must preceed *j*; the constraint should ensure that job *j* doesn't start until job *i* is finished.

These are called precedence constraints.

23) https://www.utdallas.edu/~scniu/OPRE-6201/documents/LP02-Investment.pdf Suppose an investor has $100 on Monday. At the start of every day of the week (Mondaythrough Friday), the investor has the following investment opportunity available: If he invests X dollars on that day and matches that initial investment with X/2 dollars the next day, then he will receive a total return of 2X dollars on the third day.

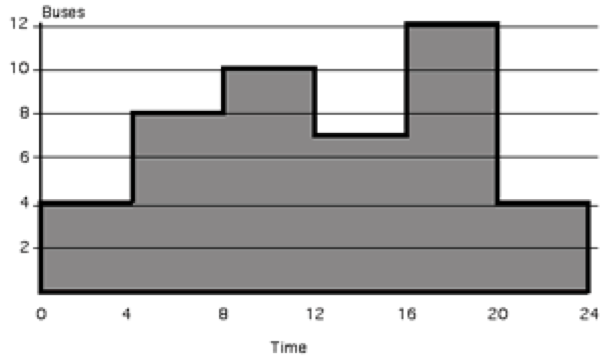
Thus, with a total investment of 1.5X dollars, the investor receives 2X dollars in two days, a gain of 0.5X dollars. The investor wishes to determine an investment schedule that maximizes his total cash on Saturday.

To facilitate the formulation of a linear program, the investor decides to make the following simplifying assumptions:

1. If an initial investment is not matched on the subsequent day, the initial investment is lost.
2. Any return that is due on any given day can be reinvested immediately.
3. Cash carried forward from one day to the next does not accrue interest.
4. Borrowing money is not allowed.

24) https://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/models/unit/linear/subunits/workforce/index.html Consider a bus company scheduling drivers for its buses. The requirement for buses varies from hour to hour because of customer demand as shown in the figure. Time 0 on the figure represents midnight, and times are shown with a 24 hour clock starting at midnight. For example, four buses must run from midnight to 4 a.m., while eight buses must run from 4 a.m. until 8 a.m. We assume that the bus requirements are the same every day.

The problem is to determine how many drivers to schedule at each starting time to cover the requirements for buses. Drivers work eight hour shifts that start at times: 0, 4, 8, 12, 16 or 20. For example, a driver starting at time 0 can drive a bus from time 0 to 8. A driver scheduled to start at time 20 works for the final four hours of the day and the first four hours of the next day. The goal is to minimize the number of drivers used. Note that although a driver can be hired for an eight hour period, there is no requirement that he drive a bus for the entire period. He might be idle for a four hour interval within the period.



25) http://www.maths-in-industry.org/miis/692/1/Optimal%20Cutting%20Problem.pdf An unlimited stock of rods with standard section and constant length 7 meters is available. According to the construction chart, 3 number of details {150 pieces, 250 pieces and 200 pieces) with length 1.5, 2.0, 4.0 meters each has to be cut from the stock rods. The purpose is to produce the desired quantities of details minimizing the wasted stock material.

26) https://www.utdallas.edu/~scniu/OPRE-6201/documents/LP02-Investment.pdf Suppose we are planning a hiking trip; and we are, therefore, interested in filling a knapsack with items that are considered necessary for the trip. There are N different item types that are deemed desirable; these could include bottle of water, apple, orange, sandwich, and so forth. Each item type has a given set of two attributes, namely a weight (or volume) and a value that quantifies the level of importance associated with each unit of that type of item. Since the knapsack has a limited weight (or volume) capacity, the problem of interest is to figure out how to load the knapsack with a combination of units of the specified types of items that yields the greatest total value. What we have just described is called the knapsack problem. Formally, suppose we are given the following parameters:

w_k: the weight of each type-k item, for k= 1, 2,. . .,N,

r_k: the value associated with each type-k item, for k= 1, 2,. . .,N,

c: the weight capacity of the knapsack.

https://www.youtube.com/watch?v=FdKgeeb4q3w