

## Análise de Sensibilidade – Pós-Otimização

Quando usamos um modelo matemático para descrever a realidade, fazemos aproximações/simplificações. O mundo é mais complicado do que os tipos de problemas de otimização que somos capazes de resolver. As suposições de linearidade geralmente são aproximações significativas. Outra aproximação importante vem porque não podemos ter certeza dos dados que colocamos no modelo. Nosso conhecimento da tecnologia relevante pode ser impreciso, forçando a aproximar os valores de  $A$ ,  $b$  ou  $c$ . Além disso, as informações podem mudar. A análise de sensibilidade é um estudo sistemático de como as soluções são sensíveis a (pequenas) mudanças nos dados. (<https://econweb.ucsd.edu/~jsobel/172aw02/notes7.pdf>)

A ideia básica é poder dar respostas às questões do tipo:

1. Se a função objetivo muda, como a solução do pl muda?
2. Se os recursos disponíveis mudam, como a solução muda?
3. Se uma restrição for adicionada ao problema, como a solução muda?

Ou seja, geralmente, além de resolver o problema para obter a solução ótima, também é importante analisar em quais condições a solução ótima de um pl é válida, e o que aconteceria se os dados do problema sofrerem alterações (mudança de preços, alterações nas restrições, etc.). Este tipo de estudo e interpretação dos resultados é chamado de análise de sensibilidade, isto é, quão sensível é a solução respeito às mudanças nos dados.

Neste estudo, devemos resolver um problema de programação linear e então desejamos ver como a resposta muda se o problema for alterado. Em todos os casos, presume-se que apenas uma coisa sobre o problema muda. Ou seja, na análise de sensibilidade, você avalia o que acontece quando apenas um parâmetro do problema muda.

### Revisão – simplex revisado

Quando estudamos o simplex revisado vimos que:

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \text{ (solução geral)}$$

$$\bar{Z} = c_Bx_B + c_Nx_N = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_Nx_N = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

$$\bar{Z} - (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = c_B B^{-1}b$$

Portanto, em qualquer iteração, os coeficientes atualizados da função objetivo e os valores das variáveis básicas podem ser obtidos através das expressões

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j \quad \text{e} \quad x_B = \bar{b} = B^{-1} b$$

onde  $c_j, c_B, A_j$  são coeficientes do quadro inicial e  $B^{-1}$  é a matriz inversa retirada do quadro ótimo.

Estas expressões podem ser usadas para estudar o efeito na solução ótima da mudança em coeficientes da função objetivo e mudanças no conjunto de restrições.

### Mudanças em $c_j$

Seja o seguinte pl

$$\max Z = x_1 + 3x_2$$

$$s.a \quad x_1 \leq 3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

cuja solução ótima é

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1			1	24
$x_3^*$	1		1	0	3
$x_2^*$	2/3	1		1/3	8

a) Suponhamos que a função objetivo passou para  $Z = (\frac{3}{2})x_1 + 3x_2$ . A solução continua a mesma?

$$\bar{c}'_1 = -c'_1 - c_B B^{-1} A_1 = -\frac{3}{2} - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} + (0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$$

b) Suponhamos que a função objetivo passou para  $Z = 3x_1 + 3x_2$ . Qual a nova solução básica?

$$\bar{c}'_1 = -c'_1 - c_B B^{-1} A_1 = -3 - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + (0, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Usar simplex para determinar a nova solução

c) Se  $c'_2 = 1$ , Qual a nova solução básica?

$$\bar{c}'_2 = -c'_2 - c_B B^{-1} A_2 = -1 - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + (0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{muda base}$$

O quadro final será

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	1	2		1	24
$x_3^*$	1		1	0	3
$x_2^*$	2/3	1		1/3	8

Base	$x_1 \downarrow$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z	-1/3			1/3	8
$x_3^*$	1		1	0	3 $\rightarrow$
$x_2^*$	2/3	1		1/3	8

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b
Z			1/3	1/3	9
$x_1^*$	1		1	0	3
$x_2^*$		1	-2/3	1/3	6

### Mudanças em $b_j$

Seja o seguinte pl primal:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 &\leq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

O quadro final (ótimo) é:

Base	$x_1$	$x_2$	$F_1$	$F_2$	b
Z			1/3	1/3	9
$x_1^*$	1		1	0	3
$x_2^*$		1	-2/3	1/3	6

- d) Suponhamos que  $b_1$  e  $b_2$  passem para 1 e 18, respectivamente. Então deve-se atualizar os novos valores das variáveis básicas segundo o novo b.

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 16/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

- e) Qual o menor valor de  $b_2$  tal que a solução permaneça ótima?

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 + \theta/3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \therefore \theta \geq 6$$

f) Suponhamos que  $b_1$  e  $b_2$  passem para 2 e 3, respectivamente. Então

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Base	$x_1$	$x_2$	$F_1 \downarrow$	$F_2$	b
Z			1/3	1/3	5/3
$x_1^*$	1		1	0	2
$x_2^*$		1	-2/3	1/3	-1/3 $\rightarrow$

Base	$x_1$	$x_2$	$F_1$	$F_2$	b
Z		1/2		1/2	1/2
$x_1^*$	1	3/2		1/2	1/2
$F_1^*$		-3/2	1	-1/2	1/2

### Exemplo 1

Seja

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$s.a \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

quadro inicial

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$F_1$	$F_2$	b
Z	-2	-3	-1			
$F_1$	1/3	1/3	1/3	1		1
$F_2$	1/3	4/3	7/3		1	3

quadro ótimo

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$F_1$	$F_2$	b
Z			3	5	1	8
$x_1$	1		-1	4	-1	1
$x_2$		1	2	-1	1	2

a) Cálculo do Coeficiente atualizado na Função Objetivo – Variável Básica

$$\bar{C}_B = (-2-3) - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = -(-2-3) + (2,3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$$

b) Cálculo do Coeficiente atualizado na Função Objetivo – Variável Não Básica

$$\bar{C}_N = (-1,0,0) - (-2-3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(-2-3) + (2,3) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (3,5,1)$$

- c) Variação de coeficiente na Função Objetivo para não mudar solução ótima – Variável Básica.

Qual a variação do coeficiente da variável básica  $x_2$  ( $c_2$ ) tal que a solução ótima não mude.

$$\bar{C}_N = (-1, 0, 0) - (-2 - c_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow 2 \leq c_2 \leq 8$$

- d) Variação de coeficiente na Função Objetivo para não mudar solução ótima – Variável Não Básica

Qual a variação do coeficiente da variável não básica  $x_3$  ( $c_3$ ) tal que a solução ótima não mude

$$\bar{C}_N = (-c_3, 0, 0) - (-2 - 3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow c_3 \leq 4$$

- e) Mudanças no vetor b

- Suponha que  $b=(1,3)$  passou para  $b'=(1,2)$

$$\bar{b}' = B - B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \rightarrow \text{não muda a base}$$

- Suponha que  $b=(1,3)$  passou para  $b''=(1,8)$

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{como } \bar{b}''_1 < 0, \text{ usar o método dual simplex}$$

- Qual a faixa de variação de  $b_1$  tal que a base não muda

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4b_1 - 3 \geq 0 \\ -b_1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq b_1 \leq 3$$

- f) Acréscimo de variável – vale a pena acrescentar um novo produto?

Suponhamos um novo produto com preço de venda de 3,00 R\$ e o vetor consumo  $A_4 = (1,1)$ .

$$\bar{c}_4 = -3 - (-2 - 3) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + (2,3) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 + 6 = 3 > 0 \rightarrow \text{não compensa produzir}$$

- g) Acréscimo de nova restrição: Fazer o pivoteamento. Se necessário, usar dual simplex

- $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \rightarrow$  a solução permanece ótima
- $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \rightarrow$  a solução não permanece ótima  $\rightarrow$  usar dual simplex

$$\bullet \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \end{cases}$$

Se adicionar uma restrição a um problema, duas coisas podem acontecer. A solução original satisfaz a restrição ou não. Se isso acontecer, então não tem o que fazer. Se você já tinha uma solução antes e a solução ainda é viável para o novo problema, você ainda deve ter uma solução. Se a solução original não satisfizer a nova restrição, possivelmente o novo problema será inviável. Caso contrário, existe outra solução. O valor deve diminuir.

## Exemplo 2

Uma empresa necessita produzir os produtos A e B que vende com margem de lucro unitário médio de 3,00 R\$ e 2,00 R\$ respectivamente. São utilizadas duas matérias primas (Horas Máquina e Horas de Trabalho) cujas disponibilidades e consumos unitários são os seguintes:

	A	B	Disponível
Máquinas (h)	2	1	100
Trabalho (h)	1	1	80

A empresa quer que a produção total seja no máximo 40 unidades do produto A. Deseja-se, maximizar o lucro. O pl associado a esta decisão é

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 3x_A + 2x_B \\ \text{s.a} & 2x_A + 1x_B \leq 100 \\ & 1x_A + 1x_B \leq 80 \\ & 1x_A \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max Z = & 3x_A + 2x_B \\ \text{s.a} & 2x_A + 1x_B + F_1 = 100 \\ & 1x_A + 1x_B + F_2 = 80 \\ & 1x_A + F_3 = 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{array}$$

A solução ótima é mostrada no quadro

Base	$x_A$	$x_B$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	b
Z	0	0	1	1	0	180
$x_B$	0	1	-1	2	0	60
$F_3$	0	0	-1	1	1	20
$x_A$	1	0	1	-1	0	20

a) Quais recursos são escassos? Justifique.

Como  $F_1=F_2=0$ , então os recursos escassos são Horas Máquina e Horas de Trabalho.

b) Se alguém quisesse adquirir uma unidade do recurso  $R_1$ , você estaria disposto a vender? Qual o preço que compensa a venda? Justifique.

Estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que uma redução em uma unidade do recurso  $R_1$  reduz o valor da função objetivo em 1,00 R\$ ( $y_1=1$ )

- c) Se alguém insistir em comprar uma unidade do recurso  $R_2$ , que preço de venda compensaria o fato dele ser escasso? Justifique.

Análogo à questão 2, estaria disposto a vender sim se o pagamento mínimo fosse 1,00 R\$ por unidade vendida. A justificativa do preço mínimo (1,00 R\$) é a de que a redução em uma unidade do recurso  $R_2$ , leva ao decréscimo do valor da função objetivo em 1,00 R\$ ( $y_2=1$ )

- d) Construa o modelo Dual do problema e obtenha a sua solução (do Dual).

$$\begin{aligned} \min D &= 80x_A + 100y_2 + 40y_3 \\ \text{s.a} \quad & 2y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 3 \\ & 1y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução ótima do Dual deve ser extraída do quadro ótimo do primal.  $y_1^* = 1$ ,  $y_2^* = 1$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $E_1^* = 0$ ,  $E_2^* = 0$ ,  $D^* = 180$

- e) O que significa a variável dual  $y_1$ ?

- É o preço mínimo pelo qual deverá ser vendida uma unidade do recurso  $R_1$ .
- É o preço máximo que se deve pagar por uma unidade adicional do recurso  $R_1$ .
- É o acréscimo no valor da função objetivo se ocorrer a adição de uma unidade do recurso  $R_1$ .
- É o valor que a função objetivo vai decrescer se ocorrer uma redução de uma unidade do recurso  $R_1$ .

- f) Quanto você pagaria por uma unidade adicional do recurso  $R_3$ ? Por que?

Pagaria no máximo 0,00 R\$ ( $y_3 = 0$ ). Pagaria no máximo 0,00 R\$ pois já há sobra deste recurso ( $F_3=20$ ).

- g) Qual a faixa de variação do coeficiente de  $x_A$  ( $c_A$ ) na função objetivo tal que a solução ótima não mude?

$$\bar{c}_N = (0,0) - (-2,0, -c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{C}_N = (2, 0, c'_A) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 + c'_A \geq 0 \\ 4 - c'_A \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'_A \geq 2 \\ c'_A \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq c_A \leq 4$$

- h) Qual a faixa de variação do coeficiente de  $F_1$  na função objetivo tal que a solução ótima não mude?

$$\bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} - (-2, 0, -3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{c}_{F_1} = -c'_{F_1} + (2, 0, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow -c'_{F_1} + 1 \geq 0 \Rightarrow c'_{F_1} \leq 1$$

- i) Suponha, então que a disponibilidade do segundo recurso ( $b_2$ ) reduziu de 80 para 40 unidades. A solução ótima muda? Se sim, qual a nova solução?

O vetor de recursos  $(100, 80, 40)^T$  passou para  $b' = (100, 40, 40)^T$

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ F_3 \\ x_A \end{pmatrix}$$

Como esta solução é inviável deve-se usar o algoritmo dual-simplex para “tentar” encontrar uma solução viável. Antes deve-se calcular o novo valor da função objetivo:  $Z=140$

Base	$x_A$	$x_B$	$\downarrow F_1$	$F_2$	$F_3$	b
Z	0	0	1	1	0	140
$x_B$	0	1	1	2	0	-20 $\rightarrow$
$F_3$	0	0	-1	1	1	-20
$x_A$	1	0	1	-1	0	60

Base	$x_A$	$x_B$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	b
Z	0	1	0	3	0	120
$x_B$	0	-1	1	-2	0	20
$F_3$	0	-1	0	-1	1	0
$x_A$	1	1	0	1	0	40

Neste caso a solução ótima muda, e passa a ser  $x_A = 40$ ,  $x_B = 20$ ,  $Z = 120$

- j) Qual a faixa de variação do primeiro recurso ( $b_1$ ) para que a base ótima não mude.

O vetor de recursos  $(100, 80, 40)^T$  passou para  $b'' = (b_1'', 40, 40)^T$

$$\bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1'' \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -b_1'' + 160 \\ -b_1'' + 80 + 40 \\ b_1'' - 80 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_1'' + 160 \geq 0 \\ -b_1'' + 80 + 40 \geq 0 \\ b_1'' - 80 \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b_1'' \leq 160 \\ b_1'' \leq 120 \\ b_1'' \geq 80 \end{cases} \Rightarrow 80 \leq b_1'' \leq 120$$

## Exercícios

- 1) Uma fábrica de sorvete tem 2 linhas de produção: picolé e copinho. O quadro abaixo mostra os recursos disponíveis:

	picolé	Copinho	limitação
homens/hora espaço	3	1	160
Lucro líquido/ton	1	1	170
Preço de venda (R\$)	40	30	

- Qual a produção diária que maximiza o lucro?
  - Utilizando o quadro ótimo determine  $B^{-1}$
  - Se cada recurso disponível fosse aumentado de 1 unidade, qual seria a nova solução?
  - Interpretar economicamente.
- 2) Uma pequena siderúrgica recebe encomenda de um lote de lingotes de ferro que deverá totalizar 240 toneladas de conteúdo do elemento ferro (Fe). O cliente admitirá que o lote homogêneo tenha quantidades adicionais do elemento silício (Si), mas para cada tonelada de Si deverá haver na liga pelo menos 15 toneladas de Fe. A firma tem em estoque quantidade mais que suficiente:
- Minério do tipo A (min A), que custa R\$6.000,00 cada centena de toneladas e que tem 2% de Si e 60% de Fe.
  - Minério do tipo B (min B), que custa R\$3.000,00 cada centena de toneladas e que tem 4% de Si e 40% de Fe.

A firma tem ainda a oportunidade de usar como matéria-prima uma sucata de boa qualidade, que custa R\$2.500,00 a tonelada, e que possui praticamente 100% de Fe. Pede-se:

- Formule o problema de programação linear que calcula a mistura de mínimo custo de matérias-primas necessárias para a produção dos lingotes encomendados;
- Resolva o problema dado.

- c) Qual o preço máximo que a sucata pode ter a fim de que seja economicamente vantajosa para a produção da liga em questão?
- d) Dentro de que intervalo de custo o minério do tipo A (min A) será atrativo para permanecer na solução ótima?
- e) Suponha que apareça um novo fornecedor de um minério do tipo C (min C), que custa R\$4.000,00 por centena de toneladas e que possui 2% de Si e 50% de Fe. Haverá mudança na composição da liga ótima? Justifique. Se sim, qual será a nova composição?
- 3) Uma fábrica manufatura 5 tipos de prateleiras ( $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ ) utilizando dois processos de produção (processo normal (N) e processo acelerado (A)). Cada produto requer um certo número de horas para ser trabalhado dentro de cada processo e alguns produtos só podem ser fabricados através de um dos tipos de processos. O quadro a seguir resume o consumo (em horas) dentro de cada esquema de fabricação e os lucros obtidos (em R\$) após a dedução dos custos de produção.

Prateleiras	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
Lucro/Unidade (R\$)	570	575	555	550	560
Processo Normal (horas)	12	16	-	12	9
Processo Acelerado (horas)	10	16	5	-	-

A montagem final de cada prateleira requer 16 horas de mão-de-obra por unidade. A fábrica possui 3 máquinas para o processo normal e 2 para o processo acelerado. As máquinas trabalham em dois turnos de 8 horas por dia, em um regime de 6 dias semanais. Uma equipe de 8 homens trabalha em turno único de 8 horas e durante 6 dias, na montagem das prateleiras junto aos clientes. Pede-se:

- a) Formule o problema de programação linear que calcula o melhor esquema de produção;
- b) Resolva o problema.
- c) Existe algum processo que não está sendo totalmente utilizado?
- d) Em que faixa de lucro trazido pela fabricação de prateleiras do tipo  $p_2$  pelo processo normal, o esquema de produção das prateleiras especificado no item (a) permanece o mesmo? Justifique.
- e) Qual deveria ser o lucro trazido pela fabricação de prateleiras do tipo  $p_3$  pelo processo acelerado de forma que sua produção fosse economicamente atrativa?
- f) Qual o valor econômico de uma hora extra de capacidade de produção no processo de montagem?

- g) Qual o reflexo que haverá no lucro trazido pela fabricação das prateleiras pelo acréscimo de 50 horas extras de capacidade de produção no processo de montagem das prateleiras? Justifique.

[https://www.youtube.com/watch?v=FfXFWYf8wss&list=PLbxFfU5GKZz1Tm\\_9RR5M\\_uvdOXpJJ8LC3&index=19](https://www.youtube.com/watch?v=FfXFWYf8wss&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=19)

[https://www.youtube.com/watch?v=qkRKEFXMrPs&list=PLbxFfU5GKZz1Tm\\_9RR5M\\_uvdOXpJJ8LC3&index=21](https://www.youtube.com/watch?v=qkRKEFXMrPs&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=21)

[https://www.youtube.com/watch?v=lmIaGnC\\_Xro&list=PLbxFfU5GKZz1Tm\\_9RR5M\\_uvdOXpJJ8LC3&index=22](https://www.youtube.com/watch?v=lmIaGnC_Xro&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=22)