Método Dual-Simplex

Dos teoremas anteriores, temos que se existe uma solução viável para o PRIMAL, então vale a pena verificar a existência de uma solução viável do DUAL. Ao utilizar o Simplex executamos operações matemáticas para positivar os coeficientes da linha da função objetivo mantendo viabilidade PRIMAL ($b \geq 0$). Ou seja, ao executar o Simplex procuramos por uma solução viável y* do DUAL. Encontrada esta solução do DUAL teremos encontrado a solução ótima do DUAL e do PRIMAL.

Da mesma forma, se tivermos uma solução viável do DUAL e uma solução inviável do PRIMAL, vale a pena procurar por uma solução viável do PRIMAL. Esta procura é feita via método DUAL SIMPLEX. Ou seja, se todos os coeficientes da função objetivo são não negativos ($c \geq 0$) e $\exists b_i < 0$ então podemos aplicar o algoritmo dual simplex. Este algoritmo visa procurar uma solução viável para o PRIMAL mantendo a viabilidade do DUAL.

A diferença básica entre o método Simplex e o método Dual Simplex é que, enquanto o método Simplex começa com uma solução PRIMAL básica viável, que não é ótima, e opera na direção da otimalidade PRIMAL, o método Dual Simplex começa com uma solução PRIMAL inviável e opera na direção da viabilidade PRIMAL.

Portanto, o método dual-simplex é aplicado em situações em que a solução inicial do primal é inviável (algumas variáveis x_j são negativas), porém os elementos da funções objetivo são todos não negativos, indicando otimalidade (solução dual y_i é viável). A seguir, o método procura alcançar a viabilidade primal, tornando as variáveis x_j não negativas, mas preservando a viabilidade dual.

Por exemplo, seja o seguinte par de pl's

$$
\begin{array}{llll}
\min\ D = & 80y_1 + 30y_2 & \max\ -D = & -80y_1 + -30y_2 \\
s.a & 5y_1 + 2y_2 \geq 10 & s.a & -5y_1 - 2y_2 \leq -10 \\
 & 4y_1 + 3y_2 \geq 7 & & -4y_1 - 3y_2 \leq -7 \\
 & y_1 + 5y_2 \geq 15 & & -y_1 - 5y_2 \leq -15 \\
 & y_1, y_2 \geq 0 & & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

Ao invés de resolver o dual usando o simplex duas fases, podemos usar o método dual-simplex

Base	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	b
-D	80	30$\downarrow$				
E_1	-5	-2	1			-10
E_2	-4	-3		1		-7
E_3	-1	$\boxed{-5}$			1	-15$\rightarrow$

Base	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	b
-D	74	0	0	0	6$\downarrow$	-90
E_1	-4,6	0	1	0	$\boxed{-0,4}$	-4$\rightarrow$
E_2	-3,4	0	0	1	-0,6	2
y_2	0,2	1	0	0	-0,2	3

Base	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	b
-D	5	0	15	0	0	-150
E_3	11,5	0	-2,5	0	1	10
E_2	3,5	0	-1,5	1	0	8
y_2	2,5	1	-0,5	0	0	5

Base	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	b
-D	5	0	15		0	-150
E_3	23/2		-5/2		1	10
E_2	7/2		-3/2	1		8
y_2	5/2	1	-1/2			5

Algoritmo do Dual-Simplex

Base	x_1		x_k	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	b	
Z	$-c_1$	...	$-c_k$	...	$-c_s$	0	0	...	0	0	(0)
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1s}	1	0	...	0	b_1	(1)
x_{n+2}	a_{21}	...	a_{2k}	...	a_{2s}	0	1	...	0	b_2	(2)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	a_{mk}	...	a_{ms}	0	0	...	1	b_m	(m)

Hipóteses:

a) Todos os elementos da linha (0) são não-negativos, ou seja $c_j \geq 0$, j=1,2,...;

b) A coluna b apresenta, pelo menos, um elemento negativo.

Seja um pl de maximização com n variáveis e m restrições

Passo 1: Seleção da variável que sai da base. Seja $\bar{b}_L = \min_{i=1,\dots,n}\{\bar{b}_i, \bar{b}_i < 0\}$.

Passo 2: Seleção da variável que entra na base: $\frac{\bar{c}_K}{\bar{a}_{LK}} = \max_{j=1,\dots,n}\left\{\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{Lj}}, \bar{a}_{Lj} < 0\right\}$. Se não existe $\bar{a}_{Lj} < 0$, então o pl é inviável.

Passo 3: Substitua a variável básica da linha L pela variável x_K e execute o pivoteamento no coeficiente $\bar{a}_{LK}$.

Passo 4: Teste da viabilidade primal. Se todos os $\bar{b}_i$ forem não negativos então pare pois a solução ótima foi obtida. Caso contrário, volte ao **Passo 1**.

Exemplo 1

minimize $Z = 11W1 + 27W2 + 90W3$
sa
$-1W1 + 1W2 + 2W2 \geq 4$
$1W1 + 1W2 + 5W2 \geq 6$
$1W1 + 1W2 + 1W2 \geq 4$
$1W1 + 1W2 + 1W2 \geq 1$
$W1, W2, W3 \geq 0$

minimize $Z = 11W1 - 27W2 - 90W3$
sa
$1W1 - 1W2 - 2W2 + E1 = 4$
$-1W1 - 1W2 - 5W2 + E2 = 6$
$-1W1 - 1W2 - 1W2 + E3 = 4$
$-1W1 - 1W2 - 1W2 + E4 = 1$

$W1, W2, W3, E1, E2, E3, E4 \geq 0$

Base	W1↓	W2	W3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	11	27	90					
E1	1	-1	-2	1				-4
E2	-1	-1	-5		1			-6→
E3	-1	-1	-1			1		-4
E4	-1	-1	-1				1	-1

max{ -11, -27, -18, ---, ---, ---, ---}

$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$\bar{b} \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

Base	W1	W2	W3↓	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	16	35	0	11	0	0	-66
E1		-2	-7	1	1			-10→
W1	1	1	5		-1			6
E3		0	4		-1	1		2
E4		0	4		-1		1	5

max{ ---, -8, -5, ---, ---, ---, ---}

$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$\bar{b} \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

Base	W1	W2↓	Y3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	6	0	5	16	0	0	-116
W3		2/7	1	-1/7	-1/7			10/7
W1	1	-3/7		5/7	-2/7			-8/7
E3		-8/7		4/7	-3/7	1		-26/7→
E4		-8/7		4/7	-3/7		1	-5/7

max{ ---, -21/4, ---, ---, -112/3, ---, ---}

$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$\bar{b} \leq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL inviável

Base	W1	W2	W3	E1	E2	E3	E4	b
-Z	0	0	0	8	55/4	21/4	0	-271/2
W3			1	0	-1/4	1/4		1/2
W1	1			1/2	-1/8	-3/8		1/4
W2		1		-1/2	3/8	-7/8		13/4
E4				0	0	-1	1	3

$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow$ solução DUAL viável

$\bar{b} \geq 0 \Rightarrow$ solução PRIMAL viável

$W1 = 1/4, W2 = 13/4, W3 = 1/2,$
$E1 = 0, E2 = 0, E3 = 0, E4 = 3, D = 271/2$

O **método dual simplex** tenta encontrar uma solução viável para o PRIMAL mantendo a solução do DUAL viável (linha do Z ≥ 0)

Exemplo 2

$$\begin{array}{llll} \min & Z = 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 & & \\ s.a & x_1 \quad + x_3 \geq 5 & & \\ & x_2 + 2x_3 \geq 2 & & \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max & Z + 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ s.a & -x_1 - x_3 + E_1 = -5 \\ & -x_2 - 2x_3 + E_2 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3, E_1, E_2 \geq 0 \end{array}$$

Base	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	b
Z	3↓	4	9			
E_1	-1	0	-1	1		-5→
E_2	0	-1	-2		1	-2

$$\frac{c_k}{a_{1k}} = \max\left\{\frac{3}{-1} \frac{9}{-1}\right\} = \frac{3}{-1}$$

Base	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	b
Z		4	-6↓	3		-15
x_1	1	0	1	-1		5
E_2		-1	-2		1	-2→

$$\frac{c_k}{a_{2k}} = \max\left\{\frac{4}{-1} \frac{6}{-2}\right\} = \frac{6}{-2}$$

Base	x_1	x_2	x_3	E_1	E_2	b
Z		1		3	3	-15
x_1	1	1/2		-1	1/2	4
x_3		1/2	1		-1/2	1

Solução ótima do primal: $x_1^* = 4,\ x_2^* = 0, x_3^* = 1, E_1^* = 0,\ E_2^* = 0, Z^* = 15$

Solução ótima do dual: $y_1^* = 3, y_2^* = 3, F_1^* = 0, F_2^* = 1, E^* = 0, Z^* = 15$

Exercícios

1) Dado o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 + x_2 - x_3 \\ sa \quad & x_1 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Formular o problema dual
   b) Resolver o primal pelo método Simplex.
   c) Resolver o dual pelo método Dual-Simplex.
   d) Verificar a relação entre as soluções dos dois problemas, isto é, indicar em cada iteração de um problema a solução complementar do outro.

2) Dado o seguinte pl:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = x_1 + x_2 \\ sa \quad & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Resolver pelo método Simplex Duas Fases.
   b) Resolver pelo método Dual-Simplex.