Dualidade

Anteriormente apresentamos a programação linear e mostramos como o algoritmo simplex é usado para resolver problemas. Agora, apresentaremos um conceito importante que é “dual” de um programa linear.

Definição: A dualidade na programação linear afirma que todo problema de programação linear tem outro problema de programação linear relacionado a ele e, portanto, pode ser derivado dele. O problema de programação linear original é denominado "**primal**", enquanto o problema linear derivado é denominado "**dual**".

O pl dual de um pl primal é derivado da seguinte maneira:

- A cada variável do primal corresponde uma restrição no dual;
- A cada restrição do primal corresponde uma variável no dual;
- O sentido da função objetivo inverte - máximo no primal torna-se mínimo no dual e vice-versa.

Especificamente, para o pl:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & Z = c^T x \\ \text{sa } \quad & Ax \leq b \ (A_{m\times n}) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

existe o pl dual

$$\begin{aligned} \text{minimize } & D = b^T y \\ \text{sa } \quad & A^T y \geq c \ (A^T_{m\times n}) \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

com $x_{1\times n}$ e $y_{1\times m}$.

Exemplo 1

Uma empresa fabrica quatro variantes do mesmo produto e, na parte final do processo de fabricação, há operações de montagem, polimento e empacotamento. Para cada variante, o tempo necessário para essas operações é mostrado abaixo (em minutos), assim como o lucro por unidade vendida.

	Montagem	Polimento	Empacotamento	Lucro($)
Variante 1	2	3	2	1,50
Variante 2	4	2	3	2,50

Variante 3	3	3	2	3,00
Variante 4	7	4	5	4,50

Dado o estado atual da força de trabalho, a empresa estima que, a cada ano, eles tenham disponível 100000 minutos de tempo de montagem, 50000 minutos de tempo de polimento e 60000 minutos de tempo de empacotamento. Quantas unidades de cada variante a empresa deve produzir por ano e qual é o lucro associado?

Formulação do PL primal

i) Variáveis
xi é o número de unidades da variante i (i = 1,2,3,4) feitas por ano, $x_i \geq 0$

ii) PL primal

maximize $Z = 1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 + 3{,}0x_3 + 4{,}5x_4$
sa
$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 100000$ (montagem)
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 50000$ (polimento)
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 60000$ (empacotamento)
$x_i \geq 0$ i = 1,2,3,4

No problema acima temos 3 matérias-primas: i) tempo disponível para montagem; ii) tempo disponível para polimento; iii) tempo disponível para empacotamento.

Vamos supor que existe a possibilidade de vender estas matérias-primas. Por quanto o proprietário deve vender cada uma das 3 matérias-primas? Qual o preço unitário de cada minuto disponível que compensa a venda?

Formulação do PL dual

i) Variáveis
yj é o valor a ser pago por unidade da matéria prima j (j = 1,2,3), $y_j \geq 0$

ii) PL dual

minimize $D = 100000y_1 + 50000y_2 + 60000y_3$
sa
$2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1{,}5$
$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2{,}5$
$3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3{,}0$
$7y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 4{,}5$
$y_j \geq 0$ y = 1,2,3

Exemplo 2

Deseja-se consumir quantidades de determinados alimentos de tal forma a satisfazer as necessidades mínimas de 2 nutrientes (Proteínas e Sais Minerais) exigidas a um custo mínimo.

	Alimentos					Necessidades mínimas de nutrientes (g)
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Proteínas (g)	3	4	5	3	6	42
Sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
Custos (R$)	25	35	50	33	36	

Formulação do pl primal

i) Variáveis

xi é o número de unidades do alimento i (i = 1,2,3,4,5) feitas por ano, xi ≥ 0

ii) PL primal

minimize Z = 25x1 + 35x2 + 50x3 + 33x4 + 36x5

sa 3x1 + 4x2 + 5x3 + 3x4 + 6x5 ≥ 42 (proteínas - nutriente 1)

2x1 + 3x2 + 4x3 + 3x4 + 3x5 ≥ 24 (sais minerais - nutriente 2)

xi ≥ 0 i = 1,2,3,4,5

Suponha que um vendedor de pílulas de proteínas e pílulas de sais minerais propõe substituir a dieta de alimentos expressa de acordo com a tabela, por uma dieta de pílulas, com as seguintes condições: i) a pílula de proteína (cada uma pesando 1g) custará w_1; ii) a pílula de sais minerais (cada uma pesando 1g) custará w_2; iii) os preços w_1 e w_2 serão fixados arbitrariamente; iv) 4 - o vendedor garante que as pílulas terão preços iguais ou mais baratos que qualquer alimento; v) 5 - o vendedor pretende, é claro, maximizar sua renda de modo a satisfazer a necessidade da dieta.

Formulação do pl dual

i) Variáveis

wj é o valor a ser pago por grama (g) do nutriente j (j = 1,2), wj ≥ 0

ii) PL dual

maximize D = 42w1 + 24w2

sa 3w1 + 2w2 ≤ 25

4w1 + 3w2 ≤ 35

5w1 + 4w2 ≤ 50

3w1 + 3w2 ≤ 33

6w1 + 3w2 ≤ 36

wj ≥ 0 y = 1,2

Dualidade - Propriedades

Seja um pl primal e seu corresponde dual:

$$\begin{array}{llllll} \max Z = & c_1x_1 + & \ldots + & c_m x_m & \\ \text{s.a} & a_{11}y_1 + & \ldots + & c_{1n}y_n & \leq b_1 \\ & a_{21}y_1 + & \ldots + & c_{2n}y_n & \leq b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & a_{m1}x_1 + & \ldots + & a_{mn}x_n & \leq b_m \\ & x_1 \geq 0 & & x_n \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \min D = & b_1y_1 + & \ldots + & b_m y_m & \\ \text{s.a} & a_{11}y_1 + & \ldots + & c_{m1}y_n & \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 + & \ldots + & a_{m2}y_1 + & \geq c_2 \\ & & & & \\ & a_{1n}y_1 + & \ldots + & a_{mn}y_n & \geq c_n \\ & y_1 \geq 0 & & y_m \geq 0 & \end{array}$$

Observações:

1. A função objetivo do dual é de minimização, e a do primal é de maximização;
2. O elementos do vetor b = (b_1,b_2,...,b_m) (rhs) do primal formam a função objetivo do dual;
3. Os elementos do vetor c = (c_1,c_2,...,c_n) do primal é o vetor rhs do dual;
4. As restrições do dual são do tipo ≥, e do primal são do tipo ≤;
5. O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
6. O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal;
7. A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do dual.

Propriedade 1: "O dual do dual é o primal."

$$\text{Primal: } \begin{array}{lll} \max & 2x_1 & +3x_2 \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 \leq 6 \\ & x_1, & x_1 \geq 0 \end{array} \qquad \text{Dual: } \begin{array}{lll} \min & 4y_1 & +6y_2 \\ s.a & -y_1 & +y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 & +y_2 \geq 3 \\ & y_1, & y_1 \geq 0 \end{array}$$

Propriedade 2: "Se a restrição k do primal é igualdade, então a variável y_k do dual é sem restrição de sinal."

$$\text{Primal: } \begin{array}{lll} \max & 2x_1 & +3x_2 \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 = 6 \\ & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{Dual: } \begin{array}{lll} \min & 4y_1 & +6y_2 \\ s.a & -y_1 & +y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 & +y_2 \geq 3 \\ & & y_1 \geq 0; \quad y_2 \text{ livre} \end{array}$$

Propriedade 3: "Se a restrição k do primal é maior ou igual, então a variável y_k do dual é não positiva."

Primal:
$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 & +3x_2 \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & -3x_2 \geq 9 \\ & x_1 & +x_2 \leq 6 \\ & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dual:
$$\begin{array}{llll} \min & 4y_1 & +9y_2 & 6y_3 \\ s.a & -y_1 & +y_2 & +y_3 \geq 2 \\ & 2y_1 & -3y_2 & y_2 \geq 3 \\ & y_1, & y_3 \geq 0 & y_2 \leq 0 \end{array}$$

Propriedade 4: "Se a variável x_p do primal é sem restrição de sinal, então a restrição p do dual é uma igualdade."

Primal:
$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 & +3x_2 \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 \leq 6 \\ & & x_1 \geq 0;\ x_2 \text{ livre} \end{array}$$

Dual:
$$\begin{array}{lll} \min & 4y_1 & +6y_2 \\ s.a & -y_1 & +y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 & +y_2 = 3 \\ & y_1, & y_2 \geq 0 \end{array}$$

Propriedade 5: "Se a variável x_p do primal é não-positiva, então a restrição p do dual é menor ou igual."

Resumo das propriedades

Primal $\rightarrow$ (max)	Dual (min)
restrição k é $\leq$	$y_k \geq 0$
restrição k é $=$	y_k livre
restrição k é $\geq$	$y_k \leq 0$
$x_p \geq 0$	restrição p é $\geq$
x_p é livre	restrição p é $=$
$x_p \leq 0$	restrição p é $\leq$
Dual $\leftarrow$ (max)	Primal (min)

Exemplo 3

$$\begin{array}{ll} \max\ Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & \\ s.a & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 \geq -6 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ & x_1,\ x_4 \text{ livre} \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_3 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min\ D = 7y_1 - 6y_2 + 5y_3 & \\ s.a & y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1 \\ & 3y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ & 5y_1 - 4y_2 + 2y_3 \geq -3 \\ & y_1 - 3y_2 + 4y_3 = -4 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \text{ livre} \end{array}$$

Exercício

1) Considere o problema da dieta no qual quer-se consumir quantidades mínimas de vitaminas A e C a um custo mínimo, com os dados a seguir:

Vitamina	**Alimentos (un/kg)**						**Mínimo/dia (unid)**
	a	b	c	d	e	f	
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Custo($)	35	30	60	50	27	22	--

a) Formule o problema na visão do consumidor que deseja consumir as quantidades mínimas diárias de vitaminas pagando o mínimo possível e quer saber quanto de cada alimento consumir.

b) Formule o problema na visão de um laboratório que deseja vender pílulas de vitamina lucrando o máximo possível e deseja saber quanto pode cobrar por cada pílula.

https://www.youtube.com/watch?v=EGwTIFwyErU&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=14

https://www.youtube.com/watch?v=0TRxEvMRE7s&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=15