Teoremas de Dualidade

Qualquer programa linear de maximização tem um problema de minimização correspondente denominado o problema dual. Qualquer solução viável para o problema dual fornece um limite superior para o valor ótimo do problema inicial, que é chamado de primal. Reciprocamente, qualquer solução viável do primal fornece um limite inferior no valor ótimo do problema dual. Na verdade, se um dos dois problemas admite uma solução ótima, então o outro problema também admite e as soluções ótimas combinam entre si. Esta seção é dedicada a esse resultado, também conhecido como **teorema da dualidade**.

Motivação

Relação entre os quadros ótimos dos pl's primal e dual.

Primal

$$\begin{aligned} &\max Z = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \\ &\text{sa} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ &\quad\quad 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ &\quad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &\min D = 3y_1 + 5y_2 \\ &\text{sa} \quad y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ &\quad\quad y_1 - 2y_2 \geq 4 \\ &\quad\quad 2y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ &\quad\quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solução ótima do Primal

Base	x1	x2	x3	F1	F2	b
Z	0	0	7	4	0	12
x2	0	1	0	2/3	-1/3	1/4
x1	1	0	2	1/3	13	11/4

Solução ótima do Dual

Base	y1	y2	E1	E2	E3	b
-W	0	0	11/4	1/4	0	12
E3	0	0	-2	0	1	7
y2	0	1	-1/4	1/4	0	0
y1	1	0	-1/2	-1/2	0	4

A) Teorema Fraco da Dualidade

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{ll} \max & Z = c^T x \\ \text{sa} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & D = b^T y \\ \text{sa} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

Teorema: Se x e y são soluções viáveis para o par de problemas primal e dual, então $Z \le D$

Dem.: $Z = c^T x \le \left(A^T y\right)^T x = y^T A x \le y^T b = b^T y \;\Rightarrow\; Z \le D$.■

Corolário: Se x^* e y^* são soluções viáveis para o par de pl's primal e dual, tais que $Z^* = D^*$, então elas constituem soluções ótimas.

Dem.: Pela definição de solução ótima sabe-se que, se x^* e y^* são soluções ótimas, então $Z \le Z^*$ e $D \ge D^*$. Por hipótese tem-se $Z^* = c^T x^* = b^T y^* = D^*$. Se y é uma solução viável do dual, do teorema anterior tem-se que $c^T x^* \le b^T y$ e devido a hipótese tem-se $b^T y^* \le b^T y$. Isso vale para qualquer y, logo y^* é solução ótima do dual. A demonstração é semelhante para uma solução viável do primal. ■

Assim para a soluções ótimas x^* e y^* do primal e dual temos

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = D^*$$

B) Teorema Forte da Dualidade

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{ll} \min & Z = c^T x \\ \text{sa} & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & D = b^T y \\ \text{sa} & A^T y \le c \\ & y \text{ livre} \end{array}$$

Seja $A = [N \;\; B]$ (somente B quadrada) e tal que $\exists B^{-1}$.

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \;\; (\text{solução geral})$$

$$\bar{Z} = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \Rightarrow \bar{Z} = c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^T x_N \Rightarrow \bar{Z} = c_B^T B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N\right) x_N$$

Seja x^* a solução ótima viável do problema primal. Então $\left(x_B^*, x_N^*\right) = \left(B^{-1}b, 0\right)$, e pode-se escrever

$$\bar{Z}^* = c_B^T B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N\right) x_N + 0^T x_B$$

Teorema: Se X={x: Ax = b, x≥0} $\neq \emptyset$ e min{Z(x):x∈X} é finito, então $\exists x^* \in X$ e $y^* \in Y$ tal que $c^T x^* = b^T y^*$

Dem.: Vamos derivar uma solução para o dual a partir da solução ótima do primal. Seja $y^T = c_B^T B^{-1}$. Desejamos provar que y^T é solução ótima do dual.

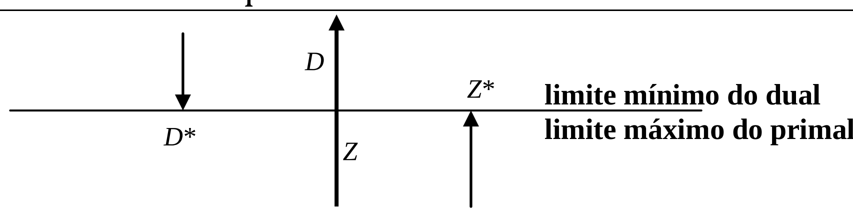
i) <u>y é uma solução viável do dual</u>

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N \Rightarrow \left(c_N^T - y^T N\right)^T \geq 0$ (da otimalidade de x^*).
  $\Rightarrow c_N - \left(y^T N\right)^T \geq 0 \Rightarrow c_N - N^T y \geq 0 \Rightarrow N^T y \leq c_N$ Portanto $\boxed{N^T y \leq c_N}$
- $\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = c_B^T - \left(c_B^T B^{-1}\right) B = c_B^T - y^T B = 0 \Rightarrow y^T B \leq c_B^T \Rightarrow \left(c_B^T - y^T B\right)^T = 0$
  $\Rightarrow c_B - \left(y^T B\right)^T = 0 \Rightarrow c_B - B^T y = 0 \Rightarrow B^T y \leq c_B$. Portanto $\boxed{B^T y \leq c_B^T}$.

ii) <u>y é uma solução ótima do dual</u>

$y^T b = \left(c_B^T B^{-1}\right) b = c_B^T \left(B^{-1} b\right) = c_B^T x_B^* = c^T x^*$. Portanto $y = y^*$. ■

Corolário: Se tanto o primal como o dual admitem soluções viáveis, então ambos têm soluções ótimas tais que Z*=D*.



Resultados importantes:

i) Se o primal é ilimitado, então o dual é inviável;

ii) Se o dual é ilimitado, então o primal é inviável;

iii) É possível que ambos não tenham solução viável.

iv) Se x^* é viável para P e y^* é viável para D com $c^T x^* = b^T y^*$, então x^* é e ótima solução para P e y^* é uma solução ótima para D.

C) Teorema da Folga Complementar (versão 1)

O Teorema Forte da Dualidade nos diz que a otimalidade é equivalente à igualdade no Teorema da Dualidade Fraca. Isto é, x resolve P e y resolve D se e somente se (x, y) é um par viável para o primal e dual e[1]

[1] Da demonstração do Teorema Fraco da Dualidade temos $Z = c^T x \leq \left(A^T y\right)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$. Do Teorema Forte da Dualidade temos que se x e y são soluções ótimas, então ocorre a igualdade, ou seja, $c^T x = y^T A x = b^T y$.

$$c^T x = b^T y \Rightarrow c^T x = (Ax)^T y = b^T y \Rightarrow \boxed{c^T x = y^T Ax = b^T y}. \quad \text{.............................} (1)$$

Examinemos as consequências desta equivalência. Observe que a equação $c^T x = y^T Ax$ implica que

$$y^T Ax = c^T x \Rightarrow (y^T Ax - c^T x)^T = 0 \Rightarrow (Ax)^T y - x^T c = 0 \Rightarrow x^T A^T y - x^T c = 0 \Rightarrow x^T (A^T y - c) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0. \quad \text{.............................} (2)$$

Em adição, a viabilidade do primal e do dual implica que

$$x_j \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0, \text{ para j=1,2,...,n.}$$

Então

$$x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0, \text{ para j=1,2,...,n,}$$

e portanto, a única maneira de manter (2) é se

$$x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = 0, \text{ para j=1,2,...,n,}$$

ou equivalentemente

$$x_j = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \text{ para j=1,2,...,n.} \quad \text{.............................} (3)$$

De forma similar do Teorema Forte da Dualidade e do Teorema Fraco da Dualidade, temos

$$c^T x = b^T y \Rightarrow c^T x = y^T Ax = b^T y \Rightarrow y^T Ax = b^T y \Rightarrow b^T y - y^T Ax = 0 \Rightarrow y^T b - y^T (Ax) = 0$$

$$y^T (b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0$$

Novamente, da viabilidade do dual e do primal, temos

$$y_i \geq 0 \text{ e } 0 \leq b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i, \text{ para i=1,2,...,m,}$$

e portanto deveremos ter

$$y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0, \text{ para i=1,2,...,m,}$$

ou de forma equivalente

$$y_i = 0 \text{ ou } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i, \text{ para i=1,2,...,m.} \quad \text{.............................} (4)$$

Combinando (3) e (4), pode-se enunciar o Teorema da Folga Complementar.

Teorema: O vetor $x \in R^n$ resolve o Primal-P e o vetor $y \in R^m$ resolve o Dual-D se e somente se x é viável para P e y é viável para D e:

i) ou $x_j = 0$ ou $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, para j=1,2,...,n; e

ii) ou $y_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$, para i=1,2,...,m.

Corolário: O vetor $x \in R^n$ resolve o Primal se e somente se x é viável para P e existir um vetor $y \in R^m$ viável para D e tal que

i) para cada i ∈ {1, 2, ..., m}, se $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i < b_i$, então $y_i = 0$; e

ii) para cada j ∈ {1, 2, ..., n}, se $x_j > 0$, então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$.

C) Teorema da Folga Complementar (versão 2)

Sejam os problemas primal e dual

$$\begin{array}{lll} \max Z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,2,\ldots,m \\ & x_j \ge 0 & j = 1,2,\ldots,n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \min\ D = & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j & j = 1,2,\ldots,n \\ & y_i \ge 0 & i = 1,2,\ldots,m \end{array}$$

Nomenclatura

- Z: função objetivo do primal a ser maximizada
- D: função objetivo do dual a ser minimizada
- Z*: valor ótimo para Z
- D*: valor ótimo para D
- x_j: solução viável do primal
- y_i: solução viável do dual
- x_j^*: solução ótima do primal
- y_i^*: solução ótima do dual

Seja o primal representado pelo quadro inicial

Base	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	b	
Z	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0	**(0)**
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1	**(1)**
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2	**(2)**
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	**...**
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m	**(m)**

As variáveis do PRIMAL são: x_j (j=1,2,...,n)
As variáveis de folga do PRIMAL são: x_{n+i} (i=1,2,...,m)
As variáveis do DUAL são: y_i (i=1,2,...,m)
As variáveis de folga do DUAL são: y_{m+j} (j=1,2,...,n)

Após algumas iterações tem-se o seguinte quadro

Base	x_1 x_j ... x_n	x_{n+1} x_{n+i} ... x_{n+m}	b	
Z	$\bar{c}_j = p_j - c_j$	$\bar{c}_{n+i} = p_{n+i}$		**(0)**
				(1) **(2)** **...** **(m)**

$p_j - c_j$ coeficiente de x_j na função objetivo (linha **(0)**) para j=1,2,...,n;

p_j quantidade líquida acrescentada ao coeficiente $-c_j$ (j=1,2,...,n) Linha **(0)**;

p_{n+i} coeficiente atual de x_{n+1} na linha **(0)** para i=1,2,...,m.

Teorema

(a) O valor ótimo da variável y_i do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável de folga x_{n+i} do primal, isto é, $y_i^* = p_{n+i}^*,\ (i = 1,2,\ldots,m)$.

(b) O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável x_j do primal, isto é, $y_{m+j}^* = p_j^* - c_j,\ (j = 1,2,\ldots,n)$

Dem.: (**a**) $c_{n+i} = 0,\ i = 1,\ldots,m$. No quadro ótimo, na linha (0) o coeficiente da variável x_{n+i} é p^*_{n+i}. Logo pode-se dizer que a *i*-ésima linha foi somada p^*_{n+i} vezes à linha (0) do quadro inicial. isto é

(i) $p^*_j = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} a_{ij}$ (j=1,2,...,n) (ii) $Z^* = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$

Como a solução do primal é ótima, todos os coeficientes da linha (0) do quadro final são positivos ou nulos, então

(iii) $p^*_{n+i} \geq 0, i = 1,2,\ldots,m$ (iv) $p^*_j - c_j \geq 0 \therefore p^*_j \geq c_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

(v) $\sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} a_{ij} \geq c_j,\ j = 1,2,\ldots,n$

Portanto, de (v) tem-se que p^*_{n+i} i=1,2,...,m é uma solução viável do dual

Logo, a função objetivo será $D = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$. Sabe-se que $Z \leq D$ e da solução (ii) que $Z^* = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i$. Como x^*_j, j=1,2,...,n é solução ótima do primal vem que $Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x^*_j = \sum_{i=1}^{m} p^*_{n+i} b_i = D^*$. Portanto, p^*_{n+i} i=1,2,...,m é solução ótima do dual, isto é $y^*_i = p^*_{n+i}$ i=1,2,...,m.

(**b**) Provar que $y^*_{m+j} = p^*_j - c_{j,}$ j=1,2,...,n. Tem-se que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j$,

$y^*_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_j - c_j$ j=1,2,...,n (vi). Da parte (**a**) do teorema tem-se que

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p^*_{n+i} = p^*_j$ (vii). De (vi) e (vii) tem-se que $y^*_{m+j} = p^*_j - c_{j,}$ j=1,2,...,n. ■

Corolários

(**a**) $y^*_i = 0$ quando $x^*_{n+i} > 0$ (i=1,2,...,m). Se a variável de folga x^*_{n+i} for básica, então a variável y^*_i do dual é não básica.

(**b**) $y^*_{m+j} = 0$ quando $x^*_j > 0$ (j=1,2,...,n). Se a variável x^*_j for básica, então a variável de folga y^*_{m+j} do dual é não básica.

Analogias entre as soluções dos pl's Primal e Dual

1) Uma solução viável básica primal x não-ótima corresponde a uma solução básica inviável y dual.
2) A solução ótima x* primal corresponde a solução ótima y* dual com Z(x*) = D(y*).

3) Os coeficientes das variáveis na função-objetivo primal (c_j atualizados das variáveis principais) são os valores das variáveis de folga (E_i) correspondentes na solução dual. Coeficiente de x_i = valor de E_i (E_i variável de folga dual).

4) Os coeficientes das variáveis de folga F_i na função-objetivo primal são os valores das variáveis y_i correspondentes na solução dual. Coeficiente de F_i = valor de y_i (y_i variável principal do dual).

5) Os valores das variáveis principais (F_i) de primal são os coeficientes das variáveis de folga E_i correspondentes na solução dual. Valor de x_i = coeficiente de E_i.

6) Os valores das variáveis de folga (F_i) no primal são os coeficientes das variáveis correspondentes na solução dual. Valor de F_i = coeficiente de y_i.

Exemplo 1 - Uso do "Teorema da Folga Complementar

Formulação do primal		Formulação do dual	
max	$Z = 2x_1 + 1x_2$	min	$D = 6y_1 + 3y_2$
sa	$3x_1 + 4x_2 \le 6$	sa	$3y_1 + 6y_2 \ge 6$
	$6x_1 + 1x_2 \le 3$		$4y_1 + 1y_2 \ge 3$
	$x_1, x_2 \ge 0$		$y_1, y_2 \ge 0$

Resolvendo o pl primal, obtém-se o seguinte quadro ótimo.

Variáveis do Dual →	E_1^*	E_2^*	y_1^*	y_2^*	
Variáveis do Primal →	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	4/21	5/21	13/7
x_2^*		1	2/7	-1/7	9/7
x_1^*	1		-1/21	4/21	2/7

Solução ótima do primal	Solução ótima do dual
$x_1^* = 2/7$	$y_1^* = 4/21$
$x_2^* = 9/7$	$y_2^* = 5/21$
$F_1^* = 0$	$E_1^* = 0$
$F_2^* = 0$	$E_2^* = 0$
$Z^* = 13/7$	$D^* = 13/7$

Exemplo 2 - Uso do "Teorema da Folga Complementar

Formulação do primal	Formulação do dual
$\max\ Z = 5x_1 + 2x_2$	$\min\ D = 3y_1 + 4y_2 + 9y_3$
$s.a\quad x_1 \leq 3$	$sa\quad 1y_1 + 0y_2 + 1y_3 \geq 5$
$x_2 \leq 4$	$0y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 2$
$x_1 + 2x_2 \geq 9$	$y_1, y_2 \geq 0$
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_3 \leq 0$

Resolvendo o pl primal, obtém-se o seguinte quadro ótimo.

Variáveis do Dual →	E_1^*	E_2^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*	
Variáveis do Primal →	x_1	x_2	F_1	F_2	E	b
Z	0	0	5	2	0	23
E			1	2	1	2
x_2		1	0	1		4
x_1	1		1	0		3

Solução ótima do primal	Solução ótima do dual
$x_1^* = 3$	$y_1^* = 5$
$x_2^* = 4$	$y_2^* = 2$
$F_1^* = 0$	$y_3^* = 0$
$F_2^* = 0$	$E_1^* = 0$
$E^* = 2$	$E_2^* = 0$
$Z^* = 23$	$D^* = 23$

https://www.youtube.com/watch?v=Iy26wUsE1Kc&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=16

https://www.youtube.com/watch?v=qS5DCpfivQY&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=17

https://www.youtube.com/watch?v=o1pznRt_-y0&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=18