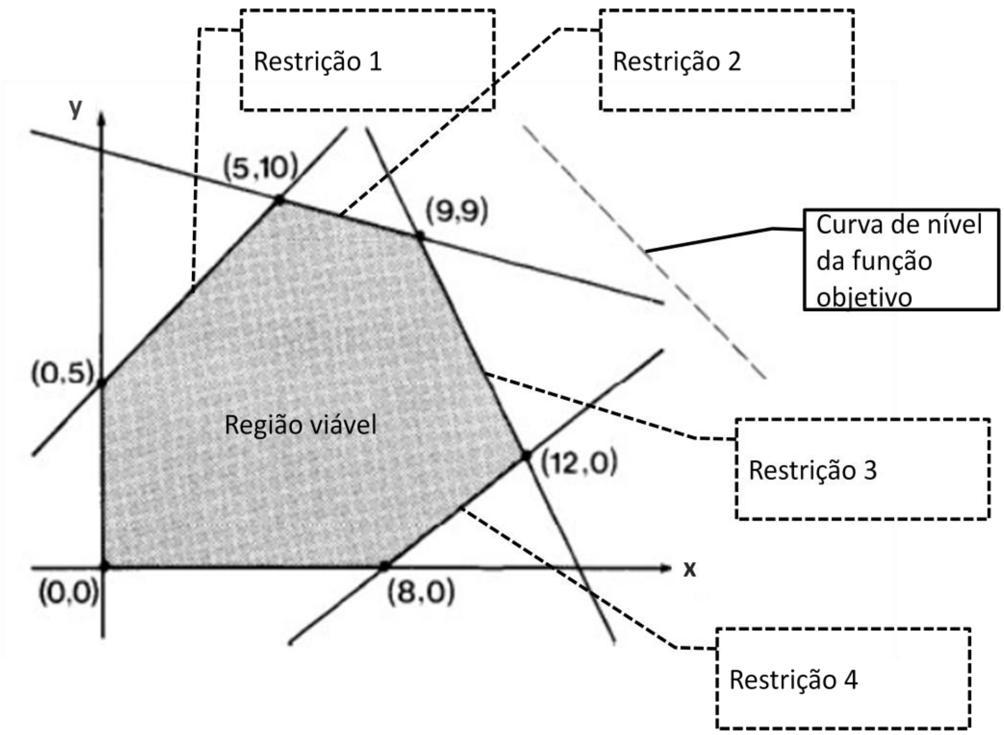
Resolução Gráfica de um Programa Linear-PL

Interpretação geométrica

Um programa linear tenta minimizar ou maximizar uma função linear restrito a um conjunto de restrições lineares. Seja o programa linear-pl de maximização

max	$Z = 2x + 3y$	Função objetivo
sa	$-x + y \leq 5$	Restrição 1
	$x + 4y \leq 45$	Restrição 2
	$2x + y \leq 27$	Restrição 3
	$3x - 4y \leq 24$	Restrição 4
	$x, y \geq 0$	Não negatividade

$Z(x, y) = 2x + 3y$ é a função objetivo, e as desigualdades são as restrições. Uma solução viável é um valor para variáveis que satisfaz todas as restrições, por exemplo, $(x, y) = (2, 0)$. Chamamos as soluções viáveis de conjunto viável ou região viável ou factível. A figura a seguir apresenta graficamente elementos fundamentais do pl acima.



Solução gráfica de um pl

Uma solução de um pl é uma configuração dos valores das variáveis de decisão de tal forma que a solução satisfaz todas as restrições, ou seja, é viável. A solução ótima de um pl é a solução do conjunto de todas as soluções viáveis com o maior valor da função objetivo (quando o pl for de maximização).

O método gráfico é uma forma de determinar a solução ótima limitado a pl's com até 3 variáveis de decisão. Apesar desta limitação, este método fornece uma ilustração clara das regiões viáveis e não viáveis e também os vértices. Ter uma compreensão visual do problema ajuda com um processo de pensamento mais racional (*algoritmo simplex*) para determinação da solução ótima. Por exemplo, veremos que se um pl tem uma solução ótima limitada, a solução ótima é sempre um dos vértices de sua região viável (um ponto extremo). O que é necessário fazer é encontrar todos os pontos de interseção (vértices) e depois examinar qual, dentre todos os vértices viáveis, fornece a solução ótima. Para fazer isso, usamos conceitos de geometria analítica e de cálculo (mais especificamente, gradiente e curva de nível). (fonte: link)

Procedimento da Solução Gráfica

Seja um pl de maximização

i. Desenhe a reta de cada restrição no gráfico. Identifique a região correspondente a cada restrição.

ii. Identifique a região de soluções viáveis, isto é, a área do gráfico que simultaneamente satisfaz a todas as restrições.

iii. Encontre a solução ótima pelo seguinte método:

   a) Desenhe uma ou mais curvas de nível da função objetivo;

   b) Desenhe o gradiente de Z;

   c) Desenhe curvas de nível paralelas na direção indicada pelo gradiente de Z até que a curva toque a região de soluções viáveis em um único ponto (ou em um segmento). Este último ponto, que é o mais extremo, é a solução ótima.

Em suma, o método gráfico na programação linear é usado para resolver problemas, encontrando o ponto "mais alto" ou "mais baixo" de interseção entre a linha de função objetivo e a região factível em um gráfico.

Exemplos

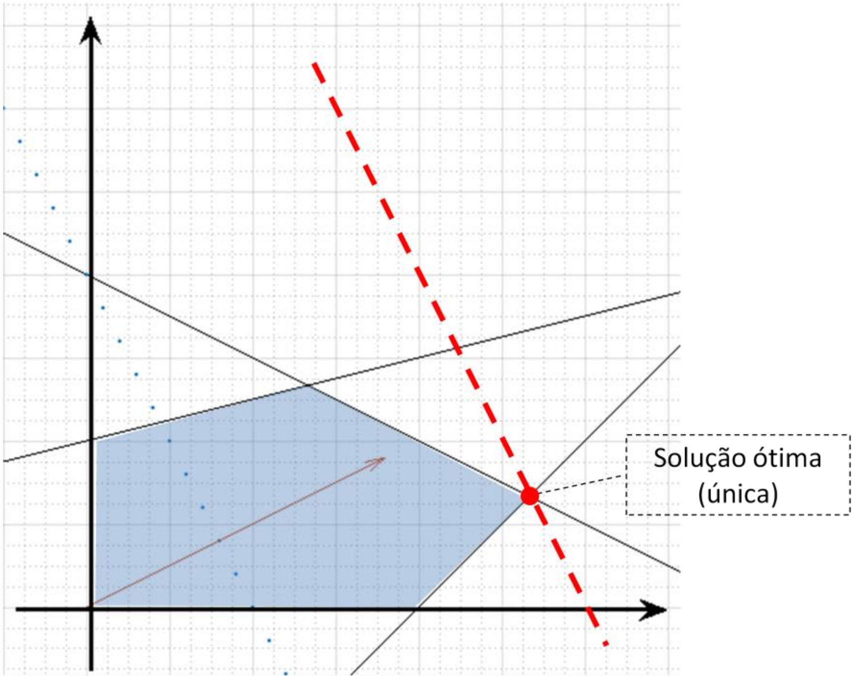
a) $\max Z = 6x1 + 3x2$

sa $2x1 + 4x2 \leq 8$

$-x1 + 4x2 \leq 4$

$x1 - x2 \leq 2$

$x1, x2 \geq 0$



Matlab: x = -4:0.1:4; y1 = (1/4)*(8 - 2*x); y2 = (1/4)*(4 + x); y3 = (-2 + x); z = (1/3)*(6 - 6*x); plot(x,y1,'k', x,y2,'k', x,y3,'k'); hold on; plot(x,z,'.'); grid on; axis square; ylim([-1 4]); xlim([-1 4]); grid minor; quiver(0, 0, 2, 1);

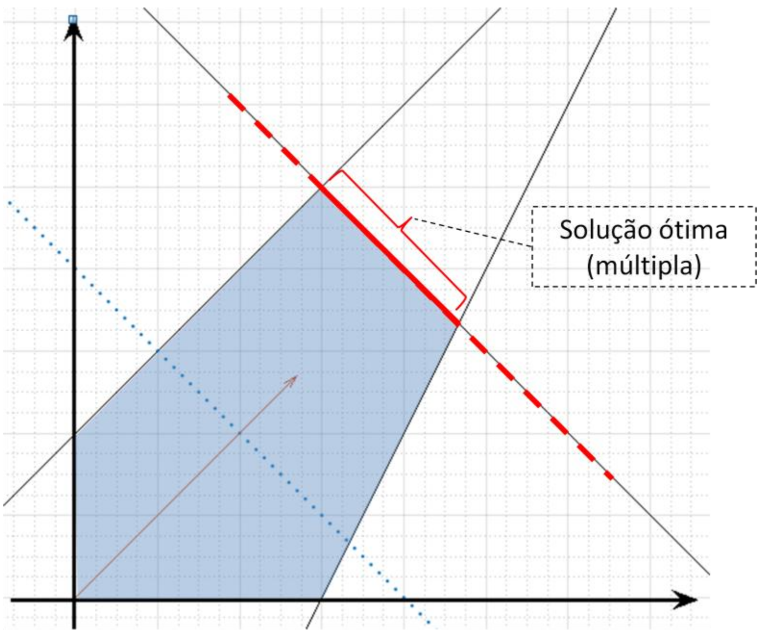
b) $\max Z = x1 + x2$

sa $x1 + x2 \leq 8$

$-4x1 + 4x2 \leq 8$

$2x1 - x2 \leq 6$

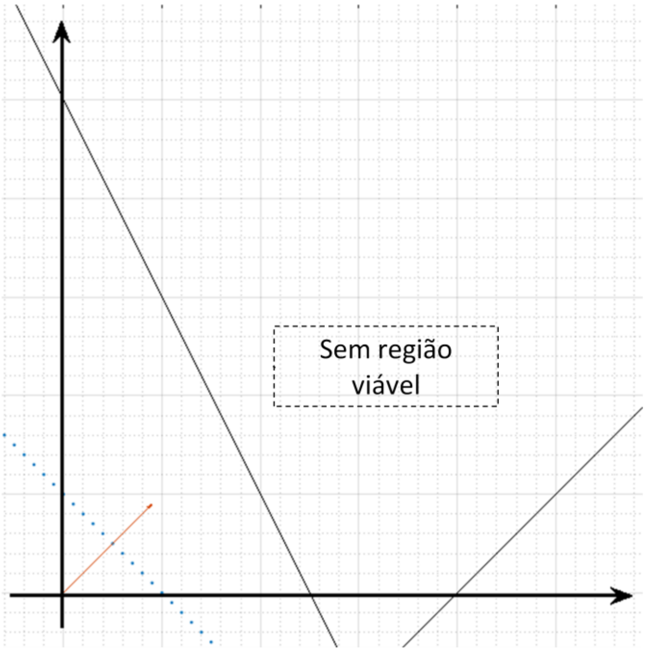
$x1, x2 \geq 0$



Matlab: x = -4:0.1:8; y1 = (1/1)*(8 - x); y2 = (1/4)*(8 + 4*x); y3 = (-6 + 2*x); z = (1/1)*(4 - 1*x); plot(x,y1,'k', x,y2,'k', x,y3,'k'); hold on; plot(x,z,'.'); grid on; axis square; ylim([-1 8]); xlim([-1 8]); grid minor; quiver(0, 0, 3, 3);

c) $\max Z = x1 + x2$

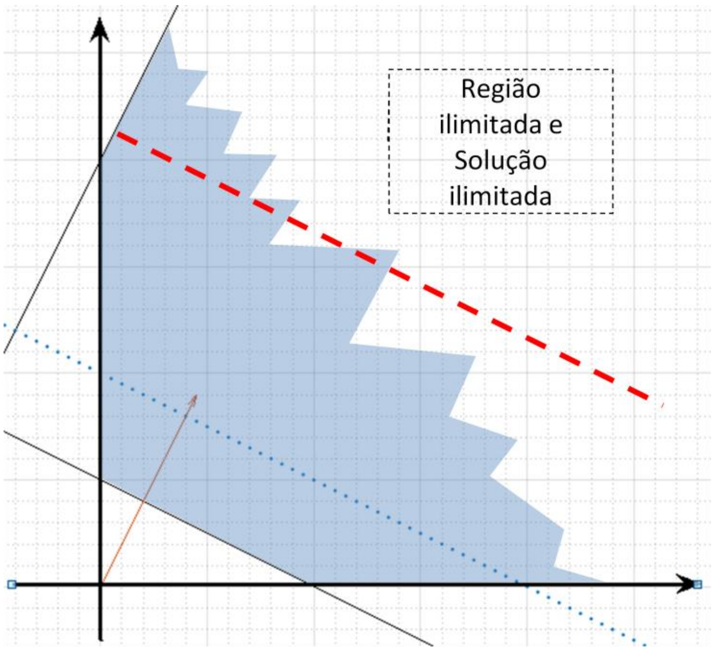
$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & 2x1 + x2 \leq 5 \\ & x1 - x2 \geq 4 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{aligned}$$



Matlab: x = -4:0.1:6; y1 = (1/1)*(5 - 2*x); y2 = (-1/1)*(4 - x); z = (1/1)*(1 - 1*x); plot(x,y1,'k', x,y2,'k'); hold on; plot(x,z,'.'); grid on; axis square; ylim([-1 6]); xlim([-1 6]); grid minor; quiver(0, 0, 1, 1);

d) $\max Z = x1 + 2x2$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & x1 + 2x2 \geq 2 \\ & -2x1 + x2 \leq 4 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{aligned}$$



Matlab: x = -2:0.1:6; y1 = (1/2)*(2 - 1*x); y2 = (1/1)*(4 + 2*x); z = (1/2)*(4 - 1*x); plot(x,y1,'k', x,y2,'k'); hold on; plot(x,z,'.'); grid on; axis square; ylim([-1 6]); xlim([-1 6]); grid minor; quiver(0, 0, 1, 2);

Sumário

Em um programa linear-pl, temos um conjunto de variáveis e queremos encontrar uma atribuição para as variáveis que satisfazem um determinado conjunto de (des)igualdades lineares e que maximize ou minimize uma determinada função objetivo linear. Uma atribuição que satisfaz as (des)igualdades é chamada de solução **viável**.

É possível que não exista uma solução viável para as (des)igualdades; nesse caso, chamamos o pl de **inviável**.

Se o pl for viável, é possível que seja de maximização e que haja soluções de lucro arbitrariamente alto, ou que seja de minimização e que haja soluções de custo arbitrariamente pequeno. Nesse caso, dizemos que o programa linear não é **limitado.**

Se o pl for viável e limitado, ele possui um **ótimo finito** e estamos interessados em encontrar uma solução viável de valor ótimo.

Graficamente percebemos que a solução ótima de um pl, se ela existir, está na fronteira/borda do conjunto das soluções viáveis. Em particular percebe-se que esta solução ótima encontra-se na interseção das retas que definem as regiões de "abrangência" de restrições.

Exercícios

Resolver graficamente PL´s

a) $\max Z = 3x1 + 2x2$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & x1 \leq 12 \\ & x1 + 3x2 \leq 45 \\ & 2x1 + x2 \leq 30 \\ & x1 \geq 0, x2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) $\max Z = 13x1 + 5x2 - 125$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & 15x1 + 7x2 \leq 1200 \\ & 25x1 + 45x2 \leq 900 \\ & x1 \leq 37 \\ & x2 \leq 14 \\ & x1, x2 \geq 0 \end{aligned}$$

c) $\max Z = (103/6)x + (388/15)y$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & 13x + 19y \leq 2400 \\ & 20x + 29y \leq 2100 \\ & x \geq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

d) $\min Z = 10a + 11b$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & a + b \geq 11 \\ & a - b \leq 5 \\ & 7a + 12b \geq 35 \\ & a \geq 0 \ b \geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \max Z = \ & 50x_1 + 20x_2 \\ s.a \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ & 100x_1 + 50x_2 \leq 8000 \\ & x_1 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \max Z = \ & x_1 + 2x_2 \\ s.a \quad & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \max Z = \ & 5x_1 + 2x_2 \\ s.a \quad & x_1 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$