Simplex Duas Fases

Objetivo: Método Simplex duas fases e a resolução de pl

Quando usamos o método simplex duas fases?

a) Para restrições do tipo maior ou igual, a variável de excesso tem coeficiente negativo.
b) Restrições de igualdade não possuem variáveis de folga.
c) Se uma destas duas restrições (≥, =) fizer parte do pl, não há solução básica viável inicial conveniente para utilizar o Simplex e, portanto, o método duas fases é usado.

Para que possamos utilizar o simplex, geramos, então, uma solução básica artificial através da adição de **variáveis artificiais** em cada uma das restrições dos tipos "≥" e "=".

Fase I

Na fase I, com as variáveis originais e as artificiais tentamos encontrar um solução básica viável para o pl original, e para isto a variável artificial deve ser "conduzida" a zero. Para fazer isso, uma função objetivo artificial (W) é criada, que é a soma de todas as variáveis artificiais e esta função objetivo é minimizada sujeito às restrições do problema original usando o método simplex. No final da **Fase I**, surgem três casos:

i) Se o valor mínimo de $W^* \neq 0$ (uma variável artificial aparece na base em nível positivo) então o pl original não tem solução viável e o procedimento de otimização termina. **O pl é inviável**.
ii) Se o valor mínimo de $W^* = 0$ e nenhuma variável artificial aparecer na base, então uma solução básica viável para o pl original foi obtida. **O pl é viável**
iii) Se o valor mínimo de $W^* = 0$ e uma ou mais variáveis artificiais aparecerem na base em nível zero, então uma solução viável para o pl original existe e deve ser gerada. Devemos cuidar dessa variável artificial e garantir que ela nunca fique positiva durante os cálculos da **Fase II**. **O pl é viável**

Quando a **Fase I** resulta em ii) ou iii), seguimos para a **Fase II** para encontrar uma solução ótima para o pl original.

Fase II

A solução básica viável encontrada no final da **Fase I** agora é usada como uma solução inicial para o pl original. Significa que o quadro final da **Fase I** se torna o quadro inicial para a **Fase II** na qual a função objetivo artificial é substituída pela função objetivo original. O método simplex é então aplicado para chegar à solução ótima do pl.

Exemplo 1 (pl viável)

$$
\begin{aligned}
\min Z &= 4X_1 + 3X_2 + 9X_3 \\
\text{sa} \quad & 2X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 15 \\
& 1X_1 + 1X_2 + 1X_3 = 9/2 \\
& 6X_1 + 1X_2 + 6X_3 \geq 12 \\
& X_1, X_2, X3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Primeiro passamos o pl para a forma padrão, adicionando variáveis de excesso, de folga, e artificiais, onde necessário.

- Como a restrição 1 é do tipo '≤' é necessária a variável de folga F.
- Como a restrição 2 é do tipo '=' é necessária a variável de artificial A_1.
- Como a restrição 3 é do tipo '≥' é necessária a variável de excesso E e a variável artificial A_2.

$\min Z = 4\,X_1 + 3\,X_2 + 9\,X_3$ sa $\quad 2\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3 \leq 15$ $1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 = 9/2$ $6\,X_1 + 1\,X_2 + 6\,X_3 \geq 12$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$\max Z = -4\,X_1 -3\,X_2 -9\,X_3 + 0\,F + 0\,E + 0\,A_1 + 0\,A_2$ sa $\quad 2\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3 + 1\,F = 15$ $1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 + 1\,A_1 = 9/2$ $6\,X_1 + 1\,X_2 + 6\,X_3 -1\,E + 1\,A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$

$\min W = 1\,A_1 + 1\,A_2$ sa $2\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3 + F = 15$ $1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 + 1\,A_1 = 9/2$ $6\,X_1 + 1\,X_2 + 6\,X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$	$\max -W = -1\,A_1 - 1\,A_2$ sa $2\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3 + F = 15$ $1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 + 1\,A_1 = 9/2$ $6\,X_1 + 1\,X_2 + 6\,X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$	$\max -W + 1\,A_1 + 1\,A_2 = 0$ sa $2\,X_1 + 4\,X_2 + 6\,X_3 + F = 15$ $1\,X_1 + 1\,X_2 + 1\,X_3 + 1\,A_1 = 9/2$ $6\,X_1 + 1\,X_2 + 6\,X_3 - E + A_2 = 12$ $X_1, X_2, X_3, F, E, A_1, A_2 \geq 0$

Fase I

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	A_1↓	A_2↓	b
-W						1	1	
F	2	4	6	1				15
	1	1	1			**1**		9/2
	6	1	6		-1		**1**	12

Base	X_1↓	X_2	X_3	F	E	A_1	A_2	b	
-W	-7	-2	-7	0	1			-33/2	min
F	2	4	6	1				15	15/2
A_1	1	1	1			1		9/2	9/2
A_2	**6**	1	6		-1		1	12	**12/6→**

Base	X_1	$X_2\downarrow$	X_3	F	E	A_1	A_2	b	
-W		-5/6	0	0	-1/6		7/6	-5/2	min
X_2		**11/3**	4	1	1/3		-1/3	11	**3→**
A_1		5/6	0		1/6	1	-1/6	5/2	3
X_1	1	1/6	1		-1/6		1/6	2	12

Base	X_1	X_2	X_3	F	$E\downarrow$	A_1	A_2	b	
-W			10/11	5/22	-1/11		12/11	0	min
X_2		1	12/11	3/11	1/11		-1/11	3	33
A_1			-10/11	-5/22	**1/11**	1	-1/11	0	**0→**
X_1	1		9/11	-1/22	-2/11		2/11	1	---

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	A_1	A_2	b
-W						1	1	0
X2		1	2	1/2		-1	0	3
E			-10	-5/2	1	11	-1	0
X1	1		-1	-1/2		2	0	3/2

Solução ótima ⇒ **Fim da Fase I.**

$W^*=A_1=A_2 = 0$ ⇒ Existe solução viável, assim podemos passar para a **Fase II** e resolver o pl original.

Fase II

Base	$X_1\downarrow$	$X_2\downarrow$	X_3	F	E	b
-Z	4	3	9			0
X_2		**1**	2	1/2		3
E			-10	-5/2	1	0
X_1	**1**		-1	-1/2		3/2

Base	X_1	X_2	X_3	F	E	b
-Z			7	1/2	0	-15
X_2		1	2	1/2		3
E			-10	-5/2	1	0
X_1	1		-1	-1/2		3/2

Solução ótima ⇒ **Fim da Fase II**

$X_1 = 3/2, X_2 = 3, X_3 = 0, Z = 15$

Exemplo 2 (pl inviável)

max $Z = 4X_1 + 3X_2$ sa $2X_1 + 4X_2 \leq 15$ $1X_1 + 1X_2 = 10$ $X_1, X_2 \geq 0$	max $Z = 4X_1 + 3X_2$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X1, X2, F, A \geq 0$	min $W = A$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X_1, X_2, F, A \geq 0$	max $-W + A = 0$ sa $2X_1 + 4X_2 + F = 15$ $1X_1 + 1X_2 + A = 10$ $X_1, X_2, F, A \geq 0$

Passamos o pl para a forma padrão, adicionando variáveis de excesso, de folga, e artificiais, onde necessário:

- Como a restrição 1 é do tipo '≤' é necessário a variável de folga F;
- Como a restrição 3 é do tipo '=' é necessário a variável artificial A.

Fase I

Base	X_1	X_2	F	A↓	b
-W				1	
F	2	4	1		15
	1	1		1	10

Base	X_1↓	X_2	F	A	b	
-W	-1	-1			-10	min
F	**2**	4	1		15	**15/2→**
A	1	1		1	10	10

Base	X_1	X_2	F	A	b
W		1	1/2		-5/2
X_1	1	2	1/2		15/2
A		-1	-1/2	1	5/2

Solução ótima ⇒ **Fim da Fase I.**

W*=-5/2 ⇒ Não existe **Fase II** (não existe solução viável para o pl original).

Exemplo 3 (pl viável)

maximizar Z = x1 + 3x2

sa −x1 + x2 ≤1

x2 ≥ 1

x1 + x2 = 2

x1, x2 ≥ 0

maximize Z – x1 – 3x2 = 0

sa –x1 + x2 + F = 1

x2 – E + A1 = 1

x1 + x2 + A2 = 2

x1, x2, F, E, A1, A2 ≥ 0

Base	x1	x2	F	E	A1↓	A2↓	b
-W					1	1	0
F	-1	1	1	0			1
A1	0	1		-1	1		1
A2	1	1		0		1	2

Base	x1	x2↓	F	E	A1	A2	b	
-W	-1	-2		1			-3	min
F	-1	1	1	0			1	1→
A1	0	1		-1	1		1	1
A2	1	1		0		1	2	2

Base	x1↓	x2	F	E	A1	A2	b	
-W	-3		2	1			-1	min
X2	-1	1	1	0			1	---
A2	1		-1	-1	1		0	0→
A3	2		-1	0		1	1	1/2

Base	x1	x2	F	E↓	A1	A2	b	
-W			-1	-2	3		-1	min
x2		1	0	-1	1		1	1/2→
x1	1		-1	-1	1		0	----
A2			1	2	-2	1	1	----

Base	x1	x2	F	E	A1	A2	b
-W					1	1	0
x2		1	1/2		0	1/2	3/2
x1	1		-1/2		0	1/2	1/2
E			1/2	1	-1	1/2	1/2

Base	x1	x2	F	E	b
Z	-1	-3			0
x2		1	1/2		3/2
x1	1		-1/2		1/2
E			1/2	1	1/2

Base	x1	x2	F	E	b
Z			1		0
x2		1	1/2		3/2
x1	1		-1/2		1/2
E			1/2	1	1/2

Exemplo 4 (pl inviável)

minimize $Z = 2x1 + x2$

sa $x1 + 2x2 \leq 8$

$3x1 + 2x2 = 12$

$x1 + 3x2 \geq 13$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

maximize $Z = -2x1 - x2$ (maximize $Z + 2x1 + x2 = 0$)

sa $x1 + 2x2 + F1 = 8$

$3x1 + 2x2 + A1 = 12$

$x1 + 3x2 - E + A2 = 13$

$x1, x2, F1, F2, F3 \geq 0$

Base	x1	x2	F	E	A1↓	A2↓	b
Z					1	1	
F	1	2	1	0	0	0	8
A1	3	2		0	1	0	12
A2	1	3		-1	0	1	13

Base	x1	x2↓	F	E	A1	A2	b	
Z	-4	-5		1			-25	min
F	1	2	1	0			8	4→
A1	3	2		0	1		12	6
A2	1	3		-1		1	13	13/3

Base	x1↓	x2	F	E	A1	A2	b	
Z	-3/2		5/2	1			-5	min
x2	1/2	1	1/2	0			4	8
A1	2		-1	0	1		4	2→
A2	-1/2		-3/2	-1		1	1	----

Base	x1	x2	F	E	A1	A2	b
Z			7/4	1	3/4		-2
x2		1	3/4	0	-3/10		3
x1	1		-1/2	0	1/2		2
A2			-7/4	-1	1/4	1	2

Exercícios

Resolver os PL's

max $L = 0{,}3x1 + 0{,}5x2$

sa $2x1 + x2 \leq 2$

$x1 + 3x2 \leq 3$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

min $C = 10x1 + 12x2$

sa $x1 + x2 \leq 20$

$x1 + x2 \geq 10$

$5x1 + 6x2 \geq 54$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

max $Z = 4x1 + 3x2$

sa $3x1 + 4x2 \leq 12$

$x1 + x2 \geq 4$

$4x1 + 2x2 \leq 8$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

max $W = 2x1 - x2$

sa $x1 - x2 \leq 1$

$2x1 + x2 \geq 6$

$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

max $U = x1 + x2$
sa $x1 - x2 \geq 1$
$-x1 + x2 \geq 1$
$x1 + 2x2 \leq 4$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 4x_1 + x_2 \\ \text{s. a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 = 12 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

maximizar $-X_1 - 7X_2 + 8X_3 + X_4$
sujeito a $X_1 + X_2 - X_3 + X_4 \leq 4$
$X_1 + X_3 \geq 9$
$X_2 + X_3 + X_4 \geq 6$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$

minimizar $3X_1 - 3X_2 + 7X_3$
sujeito a $X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$
$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \geq -5$
$5X_1 + 3X_2 \geq 2$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \mathbf{X_3 \leq 0}$

maximizar $-X_1 + X_2 - 3X_3$
sujeito a $X_1 + X_2 + X_3 \leq 25$
$X_1 + X_2 - X_3 \geq 10$
$5X_1 + 3X_2 = 100$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3$ livre

Dado o pl

$$\min z = -2x_1 - 3x_2$$
$$s.a \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 22 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Coloque-o na forma padrão (com todas as variáveis de folga, de excesso e artificiais):

b) Resolva pelo Simplex usando o método das duas fases (use somente os quadros abaixo para apresentar os tableaux): Apresente a solução de cada quadro ao lado dele, indicando variáveis básicas e não básicas. Cada Solução do quadro terá uma Letra, esta letra identificará o ponto na solução gráfica. Não é obrigatório usar todas as tabelas. Apresente os valores na forma de fração.

c) Resolva o problema graficamente Identificando as soluções encontradas nos quadros do SIMPLEX anteriormente calculado.

https://www.youtube.com/watch?v=CiLG14fsPdc&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=9

https://www.youtube.com/watch?v=_uhTN6KvCC8&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=10