O método Simplex por Quadros

Objetivo: Método Simplex na resolução de pl via quadros.

Algoritmo simplex

Seja um pl de maximização com n variáveis e m restrições (na forma padrão)

Passo 0: O problema está na forma padrão.

Passo 1: Se $\bar{c}_j \geq 0$ j = 1,...,n, então a solução atual é ótima e **pare**. Se **continuarmos** é porque $\exists \bar{c}_e < 0$, j = 1,...,e,...n.

Passo 2: Escolha a variável que entra na base (através de): $\bar{c}_K = \min_{j=1,\ldots,n}\{\bar{c}_j, \bar{c}_j < 0\}$.

Passo 3: Escolha a variável que sairá da base: $\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{LK}} = \min_{i=1,\ldots,m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iK}}, \bar{a}_{iK} > 0\right\}$. Se $\bar{a}_{iK} \leq 0, \forall i$, então o pl é ilimitado.

Passo 4: Substitua a variável básica da linha L pela variável x_K e execute o pivoteamento no coeficiente $\bar{a}_{LK}$.

Passo 5: Vá ao **Passo 1**.

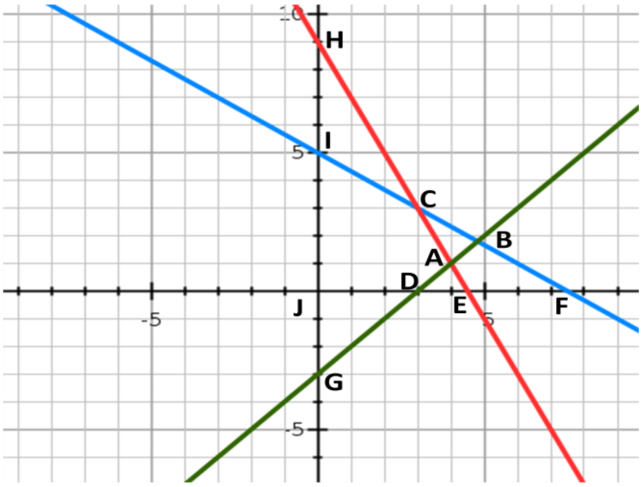
Exemplo 1

Seja o pl

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 5x + 3y \\ \text{sa} & 2x + 3y \leq 15 \\ & 2x + y \leq 9 \\ & x - y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

pl na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 5x + 3y \\ \text{sa} & 2x + 3y + F_1 = 15 \\ & 2x + y + F_2 = 9 \\ & x - y + F_3 = 3 \\ & x, y, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{array}$$



Relação entre forma algébrica do Método Simplex e Simplex por quadros

Iteração 0

Simplex algébrico

$X_B = \{F1, F2, F3\}, X_N = \{x, y\}$

$$\begin{cases} F1 = 15 - 2x - 3y \\ F2 = 9 - 2x - y \\ F3 = 3 - x + y \end{cases}$$

$\overline{Z} - \mathbf{5}x - 3y + 0F1 + 0F2 + 0F3 = 0$

Simplex por quadros

Base	x	y	F1	F2	F3	b
Z	-5↓	-3				0
F1	2	3	1			15
F2	2	1		1		9
F3	1	-1			1	3→

Iteração 1

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**
* Var que entra na base: **x**
* Var que sai da base?

$$\begin{cases} F1 = 15 - 2x \geq 0 \\ F2 = 9 - 2x \geq 0 \\ F3 = 3 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{15}{2} \\ x \leq \frac{9}{2} \\ \mathbf{x \leq \frac{3}{1} \Rightarrow x = 3} \end{cases}$$

$\rightarrow (x, y, F1, F2, F3) = (3,0,9,3,0)$

F3 sai da base

* $X_B = \{F1, F2, x\}, X_N = \{F3, y\}$

$$\begin{cases} F_1 + 5y - 2F3 = 9 \\ F_2 + 3y - 2F3 = 3 \\ x - y + F_3 = 3 \end{cases}$$

$*Z = 0X1 - 8y + +0F1 + 0F2 + 5F3 = 15$

Simplex por quadros

Base	x	y	F1	F2	F3	b
Z		-8↓			5	15
F1		5	1		-2	9
F2		3		1	-2	3→
x	1	-1			1	3

Iteração 2

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**
* Var que entra na base: **y**
* Var que sai da base?

$$\begin{cases} F1 = 9 - 5y \geq 0 \\ F2 = 3 - 3y \geq 0 \\ x = 3 + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{9}{5} \\ y \leq \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1 \\ y \geq \frac{3}{-1} \ \text{(sem efeito)} \end{cases}$$

$\rightarrow (x, y, F1, F2, F3) = (4,1,4,3,0)$

F2 sai da base

* $X_B = \{F1, y, x\}, X_N = \{F3, F2\}$

Simplex por quadros

Base	x	y	F1	F2	F3	b
Z				8/3	-1/3↓	23
F1			1	-5/3	4/3	4→
y		1		1/3	-2/3	1
x	1			1/3	1/3	4

$$\begin{cases} F_1 - \frac{5}{3}F2 + \frac{4}{3}F3 = 4 \\ y + \frac{1}{3}F2 - \frac{2}{3}F3 = 1 \\ x + \frac{1}{3}F2 + \frac{1}{3}F3 = 4 \end{cases}$$

$* \, Z + 0x + 0y + 0F1 + \frac{8}{3}F2 - \frac{1}{3}F3 = 23$

Iteração 3

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**

* Var que entra na base: **F3**

* Var que sai da base?

$$\begin{cases} F_1 = 4 - \frac{4}{3}F_3 \geq 0 \\ y = 1 + \frac{2}{3}F_3 \geq 0 \\ x = 4 - \frac{1}{3}F_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_3 \leq \frac{4}{\frac{4}{3}} \Rightarrow F_3 = 3 \\ F_3 \geq \frac{1}{-\frac{2}{3}} \\ F_3 \leq \frac{4}{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$\rightarrow (x, y, F1, F2, F3) = (3,3,0,0,3)$

F1 sai da base

$* \, X_B = \{F3, y, x\}, X_N = \{F3, y\}$

$$\begin{cases} F_3 + \frac{3}{4}F_1 - \frac{5}{4}F_2 = 3 \\ y + \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 = 3 \\ x - \frac{1}{4}F_1 + \frac{3}{4}F_2 = 3 \end{cases}$$

$* \, Z + 0x + 0y + \frac{1}{4}F1 + \frac{9}{4}F2 + 0F3 = 24$

Simplex por quadros

Base	x	y	F_1	F_2	F_3	b
Z			1/4	9/4		24
F_3			3/4	-5/4	1	3
y		1	1/2	-1/2		3
x	1		-1/4	3/4		3

Solução ótima!!!!!!

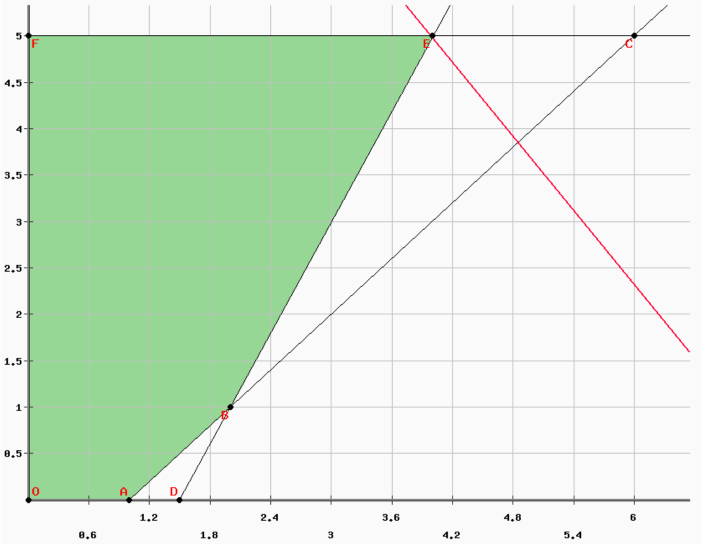
Exemplo 2

Seja o pl

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & Z = & 4X1 + 3X2 \\ \text{sa} & & X1 - X2 \leq 1 \\ & & 2X1 - X2 \leq 3 \\ & & X2 \leq 5 \\ & & X1, \quad X2 \geq 0 \end{array}$$

pl na forma padrão

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & Z = & 4X1 + 3X2 \\ \text{sa} & & X1 - X2 + F1 = 1 \\ & & 2X1 - X2 + F2 = 3 \\ & & X2 + F3 = 5 \\ & & X1, \; X2, \; F1, F2, F3 \geq 0 \end{array}$$



http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en

Simplex algébrico

$X_B = \{F1, F2, F3\}, X_N = \{X1, X2\}$

$$\begin{cases} F1 = 1 - X1 + X2 \\ F2 = 3 - 2X1 + X2 \\ F3 = 5 - 0X1 - X2 \end{cases}$$

$\bar{Z} - \mathbf{4}X1 - 3X2 + 0F1 + 0F2 + 0F3 = 0$

Simplex por quadros

Base	X1↓	X2	F1	F2	F3	b	
Z	**−4**	−3				0	
←F1	1	−1	1			1	**1/1**
F2	2	−1		1		3	3/2
F3	0	1			1	5	---

Iteração 1

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**

* Var que entra na base: **X1**

* Var que sai da base?

$$\begin{cases} F1 = 1 - X1 \geq 0 \\ F2 = 3 - 2X1 \geq 0 \\ F3 = 5 - 0X1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{X1 \leq 1 \therefore X1 = 1} \\ X1 \leq 3/2 \\ X1 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$\rightarrow (X1, X2, F1, F2, F3) = (1,0,0,1,5)$

F1 sai da base

$* \; X_B = \{X1, F2, F3\}, X_N = \{F1, X2\}$

$$\begin{cases} X1 = 1 + X2 - F1 \\ F2 = 1 - X2 + 2F1 \\ F3 = 5 - X2 \end{cases}$$

$* \; \bar{Z} + 0X1 - \mathbf{7}X2 + 4F1 + 0F2 + 0F3 = 4$

Simplex por quadros

Base	X1	X2↓	F1	F2	F3	b	
Z		**−7**	4			4	
X1	1	−1	1			1	---
←F2		**1**	-2	1		1	**1/1**
F3		1	0		1	5	5/1

Iteração 2

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**

* Var que entra na base: **X2**

* Var que sai da base?

Simplex por quadros

Base	X1	X2	F1↓	F2	F3	b

$$\begin{cases} F1 = 1 + X1 \geq 0 \\ F2 = 1 - X2 \geq 0 \\ F3 = 5 - X2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X2 \to \infty \\ \mathbf{X2 \leq 1 \therefore X2 = 1} \\ X2 \leq 5 \end{cases}$$

$\rightarrow (X1, X2, F1, F2, F3) = (2,1,0,0,4)$

F2 sai da base

* $X_B = \{X1, X2, F3\}, X_N = \{F1, F2\}$

$$\begin{cases} X1 = 2 + F1 - F2 \\ X2 = 1 + 2F1 - F2 \\ F3 = 4 - 2F1 + F2 \end{cases}$$

* $\overline{Z} + 0X1 + 0X2 - 10F1 + 7F2 + 0F3 = 11$

Z			−**10**	7		11	
X1	1		−1	1		2	---
X2		1	−2	1		1	---
←F3			**2**	-1	1	4	**4/2**

Iteração 3

Simplex algébrico

* Solução ótima? **Não**

* Var que entra na base: **F1**

* Var que sai da base?

$$\begin{cases} X1 = 2 + F1 \geq 0 \\ X2 = 1 + 2F1 \geq 0 \\ F3 = 4 - 2F1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F1 \to \infty \\ F1 \to \infty \\ \mathbf{F1 \leq 2 \therefore F1 = 2} \end{cases}$$

$\rightarrow (X1, X2, F1, F2, F3) = (4,5,1,0,0)$

F3 sai da base

* $X_B = \{X1, X2, F1\}, X_N = \{F2, F3\}$

$$\begin{cases} X1 = 4 - \frac{1}{2}F2 - \frac{1}{2}F2 \\ X2 = 5 + 0F1 - F3 \\ F1 = 2 + \frac{1}{2}\ F2 - \frac{1}{2}F3 \end{cases}$$

* $\overline{Z} + 0X1 + 0X2 + 0F1 + 2F2 + 5F3 = 31$

Simplex por quadros

Base	X1	X2	F1	F2	F3	b
Z				2	5	31
X1	1			1/2	1/2	4
X2		1		0	1	5
F1			1	−1/2	1/2	2

Solução ótima!!!!!!

Problemas de programação linear – casos especiais

i) PL com única solução

maximizar $Z = x1 + 3x2$
sa $-x1 + x2 \leq 1$
$x1 + x2 \leq 2$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

maximize $Z - x1 - 3x2 = 0$
sa $-x1 + x2 + F1 = 1$
$x1 + x2 + F2 = 2$
$x1, x2, F1, F2 \geq 0$

Base	x1	x2↓	F1	F2	b	
Z	−1	**−3**				min
F1	−1	1	1		1	1→
F2	1	1		1	2	2

Base	x1↓	x2	F1	F2	b	
Z	**−4**		3		3	min
x2	−1	1	1		1	---
F2	2		−1	1	1	1/2→

Base	x1	x2	F1	F2	b
Z			1	2	5
x2		1	1/2	1/2	3/2
x1	1		−1/2	1/2	1/2

ii) PL com múltiplas soluções

minimizar $Z = -x1 - x2$
sa $x1 + x2 \leq 6$
$x1 - x2 \leq 4$
$-x1 + x2 \leq 4$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

maximize $Z = x1 + x2$ (max $Z - x1 - x2 = 0$)
sa $x1 + x2 + F1 = 6$
$x1 - x2 + F2 = 4$
$-x1 + x2 + F3 = 4$
$x1, x2, F1, F2, F3 \geq 0$

Base	x1↓	x2	F1	F2	F3	b	
Z	**−1**	−1					min
F1	1	1	1			6	6
F2	1	−1		1		4	4→
F3	−1	1			1	4	---

Base	x1	x2	F1	F2	F3	b	
Z		**−2↓**		1		4	min
F1		2	1	−1		2	1→
X1	1	−1		1		4	---
F3		0		1	1	8	---

Base	x1	x2	F1	F2	F3	b
Z			1	**0↓**		6
X2		1	1/2	−1/2		1
X1	1		1/2	1/2		5
F3			0	1	1	8

iii) PL com solução ilimitada

maximizar $Z = 36x1 + 30x2 - 3x3 - 4x4$
sa $x1 + x2 - x3 \leq 5$
$6x1 + 5x2 - x4 \leq 10$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0, x4 \geq 0$

max $Z = 36x1 + 30x2 - 3x3 - 4x4$
sa $x1 + x2 - x3 + F1 = 5$
$6x1 + 5x2 - x4 + F2 = 10$
$x1, x2, x3, x4, F1, F2 \geq 0$

Base	x1↓	x2	x3	x4	F1	F2	b	
Z	**–36**	–30	3	4				min
F1	1	1	–1	0	1		5	5
F2	6	5	0	–1		1	10	5/3→

Base	x1	x2	x3	x4↓	F1	F2	b	
Z		0	3	**–2**		6	60	min
F1		1/6	–1	1/6	1	–1/6	10/3	20→
x1	1	5/6	0	–1/6		1/6	5/3	---

Base	x1	x2	x3↓	x4	F1	F2	b
Z		2	**–9**		12	4	100
x4		1	–6	1	6	–1	20
x1	1	1	–1		1	0	5

iv) PL com solução degenerada

minimizar $Z = -5x1 - 2x2$
sa $2x1 + x2 \leq 6$
$4x1 - x2 \leq 12$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0$

maximizar $-Z = 5x1 + 2x2$
sa $2x1 + x2 + F1 = 6$
$4x1 - x2 + F2 = 12$
$x1, x2, F1, F2 \geq 0$

Base	x1↓	x2	F1	F2	b	
Z	**–5**	–2				min
F1	2	1	1		6	3→
F2	4	–1		1	12	3

Base	x1	x2	F1	F2	b
Z		1/2	5/2		15
X1	1	1/2	1/2		3
F2		–3	–2	1	**0**

v) PL com ciclagem https://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6300/Lectures/lec13.pdf

max $Z = 10x1 - 57x2 - 9x3 - 24x4$
sa $0,5x1 - 5,5x2 - 2,5x3 + 9x4 \leq 0$
$0,5x1 - 1,5x2 - 0,5x3 + x4 \leq 0$
$x1 \leq 1$
$x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0, x4 \geq 0$

max $Z - 10x1 + 57x2 + 9x3 + 24x4 = 0$
sa $0,5x1 - 5,5x2 - 2,5x3 + 9x4 + F1 = 0$
$0,5x1 - 1,5x2 - 0,5x3 + x4 + F2 = 0$
$x1 + F3 = 1$
$x1, x2, x3, x4, F1, F2, F3 \geq 0$

Base	x1↓	x2	x3	x4	F1	F2	F3	b	
Z	**–10**	57	9	24					min
x1	1/2	–11/2	–5/2	9	1			0	0→
F2	1/2	–3/2	–1/2	1		1		0	0
F3	1						1	1	1

Base	x1	x2↓	x3	x4	F1	F2	F3	b	
Z		**−53**	−41	204	20			0	min
x1	1	−11	−5	18	2			0	---
F2		4	2	-8	−1	1		0	0→
F3		11	5	−18	−2		1	1	1/11

Base	x1	x2	x3↓	x4	F1	F2	F3	b	
Z			**−29/2**	98	27/4	53/4		0	min
x1	1		1/2	-4	−3/4	11/4		0	0→
x2		1	1/2	-2	−1/4	1/4		0	0
F3			−1/2	4	3/4	−11/4	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4↓	F1	F2	F3	b	
Z	29			**−18**	−15	93		0	min
x3	2		1	-8	−3/2	11/2		0	---
x2	−1	1		2	1/2	-5/2		0	0→
F3	1			0	0	0	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4	F1↓	F2	F3	b	
Z	20	9			**−21/2**	141/2		0	min
x3	-2	4	1		1/2	-9/2		0	0→
x4	−1/2	1/2		1	1/4	-5/4		0	0
F3	1	0			0	0	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4	F1	F2↓	F3	b	
Z	−22	93	21			**−24**		0	min
F1	−4	8	2		1	-9		0	---
x4	1/2	-3/2	−1/2	1		1		0	0→
F3	1	0	0			0	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	b
Z	**−10**	57	9	24				0
F1	1/2	−11/2	−5/2	9	1			0
F2	1/2	-3/2	−1/2	1		1		0
F3	1	0	0	0			1	1

PARA EVITAR CILAGEM, UTILIZE A REGRA DE BLAND

Choose the entering basic variable xj such that j is the smallest index with $\bar{c}_j < 0$. Also choose the leaving basic variable i with the smallest index (in case of ties in the ratio test). https://people.orie.cornell.edu/dpw/orie6300/Lectures/lec13.pdf

Base	x1↓	x2	x3	x4	F1	F2	F3	b	
Z	**−10**	57	9	24					min
x1	1/2	−11/2	−5/2	9	1			0	0→
F2	1/2	−3/2	−1/2	1		1		0	0
F3	1						1	1	1

Base	x1	x2↓	x3	x4	F1	F2	F3	b	
Z		**−53**	−41	204	20			0	min
x1	1	−11	−5	18	2			0	---
F2		4	2	−8	−1	1		0	0→
F3		11	5	−18	−2		1	1	1/11

Base	x1	x2	x3↓	x4	F1	F2	F3	b	
Z			**−29/2**	98	27/4	53/4		0	min
x1	1		1/2	−4	−3/4	11/4		0	0→
x2		1	1/2	−2	−1/4	1/4		0	0
F3			−1/2	4	3/4	−11/4	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4↓	F1	F2	F3	b	
Z	29			**−18**	−15	93		0	min
x3	2		1	−8	−3/2	11/2		0	---
x2	−1	1		2	1/2	−5/2		0	0→
F3	1			0	0	0	1	1	---

Base	x1	x2	x3	x4	F1↓	F2	F3	b	
Z	20	9			**−21/2**	141/2		0	min
x3	−2	4	1		1/2	−9/2		0	0→
x4	−1/2	1/2		1	1/4	−5/4		0	0
F3	1	0			0	0	1	1	---

Base	x1↓	x2	x3	x4	F1	F2	F3	b	
Z	**−22**	93	21			−24		0	min
F1	−4	8	2		1	−9		0	---
x4	1/2	−3/2	−1/2	1		1		0	0→
F3	1	0	0			0	1	1	---

Base	x1	x2	x3↓	x4	F1	F2	F3	b	
Z		27	**−1**	44		20		0	min
F1		−4	−2	8	1	−1		0	---
x1	1	−3	−1	2		2		0	---
F3		3	1	−2		−2	1	1	1→

Base	x1	x2	x3	x4	F1	F2	F3	b
Z		30		42		18	1	1
F1		2		4	1	−5	2	2
x1	1	0		0		0	1	1
x3		3	1	−2		−2	1	1

Algumas considerações em relação ao método simplex

Numa etapa da iteração do método simplex para resolver um programa linear-pl, a primeira tarefa é selecionar o elemento pivô (variável que entra na base). A coluna do pivô é determinada pela escolha de uma coluna cuja entrada na linha do Z do quadro seja negativa. Qualquer uma dessas colunas servirá, embora na prática normalmente selecionemos a coluna encontrando a entrada negativa na linha da função objetivo com o maior valor absoluto.

Uma vez que a coluna do pivô foi escolhida, a linha do pivô é selecionada examinando as razões das entradas na última coluna (coluna b) do quadro e os elementos positivos correspondentes na coluna do pivô. A linha do pivô é aquela para a qual essa razão é a menor.

Quando todos os elementos na coluna do pivô forem não positivos, a função objetivo Z é ilimitada e o pl não tem solução ótima.

Suponha que alguns dos elementos na coluna do pivô sejam positivos, mas que haja um "empate" entre duas ou mais razões do valor mínimo. Nesse caso, podemos escolher qualquer uma das linhas associadas como a linha pivô. Depois de aplicar o procedimento de eliminação Gauss-Jordan, duas (ou mais) das variáveis que estavam na base se tornarão zero. No entanto, apenas uma das variáveis saiu da base (o determinado pela linha do pivô); as outras permanecem na base. Nesse caso, é possível que a iteração não aumente o valor de Z; pode permanecer inalterado.

Há outra situação em que a iteração não melhora o valor de Z. Suponha que uma determinada entrada na coluna pivô seja positiva, mas a entrada na última coluna do quadro na linha associada seja 0. Isso acontecerá apenas se uma das variáveis básicas tem valor 0 neste estágio. Então, a razão mínima será 0 para que essa variável seja escolhida para sair da base. A variável que entra na base permanecerá igual a 0 e o valor de Z não mudará quando o procedimento de Gauss-Jordan for implementado. Geometricamente, não teremos nos movido para um novo vértice com essa iteração, mas apenas mudado de ideia sobre quais variáveis chamar de "básicas".

O termo degenerescência é usado para indicar uma situação em que temos uma solução básica viável em que pelo menos uma das variáveis básicas tem valor 0. A degenerescência ocorre com bastante frequência na solução de problemas de programação linear, mas normalmente não causa dificuldade. O algoritmo simplex pode ser continuado e depois de algumas iterações, o valor de Z começará a aumentar novamente.

É teoricamente possível, entretanto, que o valor de Z nunca aumente, mas que percorreremos repetidamente um conjunto de soluções básicas viáveis não ótimas. O método simplex, como o descrevemos, não pode impedir que isso aconteça. Imagine por um momento um conjunto de viabilidade no qual os vértices V3, V7 e V2 são todos adjacentes uns aos outros, mas o valor ótimo de Z ocorre no vértice V1. É possível que o algoritmo simplex nos leve de V3 para V7 para V2 e de volta para V3 novamente. Se isso ocorrer, repetiremos essas etapas indefinidamente e nunca alcançaremos o vértice ideal V1. Isso é ciclagem.

Exemplos construídos artificialmente de ciclagem sob o método simplex foram construídos, então a possibilidade teórica é real. Curiosamente, o ciclo nunca ocorreu em nenhum dos milhares de problemas de programação linear que surgem de situações do mundo real que foram resolvidas pelo método simplex. Entretanto, o método simplex pode ser modificado para evitar a possibilidade de ciclar através do uso da regra de Bland.