# Simplex Revisado

## Desvantagens do simplex por quadros

Complexidade de uma única iteração simplex por quadros:

- Introdução de uma variável na base→ $O(n)$
- Tirar uma variável da base → $O(m)$
- Atualização/pivoteamento no quadro/tableau → $O(mn)$

Problemas com isso:

- Tempo: estamos fazendo operações que não são realmente necessárias
- Espaço: precisamos armazenar o quadro inteiro: $O(mn)$ números de ponto flutuante
- Matrizes esparsas: a maioria dos problemas tem matrizes esparsas (muitos zeros) e matrizes esparsas poderiam ser manipuladas eficientemente porém o simplex padrão tem o efeito "*fill-in*" ou seja, matrizes esparsas são perdidas (PS: Quando uma posição zero em uma matriz esparsa se torna diferente de zero, isso é chamado de "*fill-in*" e queremos evitar isso.)
- acumulação de erros de ponto flutuante nas iterações

Diversas maneiras de melhorar as "armadilhas" acima levam a uma versão matricial do simplex. Para reduzir os efeitos gerados por estes problemas usa-se o **Simplex Revisado**.

| | |
|---|---|
| $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ <br> sa $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, \dots, m$ <br> $x_j \ge 0, j - 1, \dots, n$ | $\max Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ <br> sa $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ <br> $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ <br> $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$ <br> $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ |

Em cada iteração, o algoritmo simplex passa de uma solução básica viável para outra. Para cada solução viável básica tem-se:

| | |
|---|---|
| • $B = \{1, \dots, m\}$ índice das variáveis básicas | • $N = \{m+1, \dots, m+n\}$ |
| • $\mathbf{x_B} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ | • $\mathbf{x_N} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}\}$ |
| • $\mathbf{A_B} = [a_1, \dots, a_m]$ matriz base → $\exists B^{-1}$ | • $\mathbf{A_N} = [a_{m+1}, \dots, a_{m+n}]$ |
| • $\mathbf{x_N} = 0$ | • $\mathbf{x_B} \ge 0$ |

$$
\begin{aligned}
&Ax = A_N x_N + A_B x_B = b \\
&A_B x_B = b - A_N x_N \\
&x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\
&Z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
&Z \quad = c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N \\
&\qquad = c_B^T A_B^{-1} b + \left( \underbrace{c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N}_{\bar{c}_N} \right) x_N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\
&Z = \left( c_N^T - c_B^T \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\bar{A}_N} \right) x_N + 0 x_B + c_B^T A_B^{-1} b
\end{aligned}
$$

Na forma de quadro/tableau, para uma solução viável básica correspondente a B tem-se:

$$
\left[\begin{array}{cc:c} c_N^T & c_B^T & 0 \\ \hdashline A_N & A_B & b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c:c:c} c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N & 0 & c_B^T A_B^{-1} b \\ \hdashline A_B^{-1} A_N & I & A_B^{-1} b \end{array}\right]
$$

Não é necessário calcular $\overline{A}_N = A_B^{-1} A_N$ em cada iteração!!!! A continuidade da execução do algoritmo simplex depende unicamente de $\bar{c}_N = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

## Simplex Revisado: motivação

Ao resolver um problema de programação linear num computador pelo simplex por quadros, é necessário armazenar a tabela simplex na memória do computador, o que pode não ser viável para problemas muito grandes. Também é necessário atualizar toda a tabela durante cada iteração.

O método simplex revisado, que é uma modificação do método original, é mais econômico no computador, pois calcula e armazena apenas informações relevantes e necessárias para testar e/ou melhorar a solução 'atual'. O simplex só precisa:

i) dos custos reduzidos negativos;

ii) das colunas do pivot e do rhs (b) para executar o teste do bloqueio.

Em qualquer iteração, estas informações podem ser obtidas diretamente das equações originais utilizando a matriz inversa da base atual.

O simplex revisado reduz significativamente o número total de cálculos a cada iteração. Essencialmente, o método simplex revisado, ao invez de atualizar todo o quadro, calcula apenas os coeficientes necessários para identificar o elemento pivot. Primeiro, os custos reduzidos devem ser determinados para escolher a variável que vai entrar na base. A variável que deixa a base é determinada via teste do bloqueio, de modo que apenas os coeficientes atualizados da coluna da variável de entrada e os valores atuais do rhs (b) são necessários. Desta forma, o método simplex revisado usa informações apenas para: i) calcular os custos reduzidos; e ii) para executar o teste do bloqueio.

## Algoritmo do Simplex Revisado

**Passo 0**: Escreva o pl na forma padrão e determine $x_B$ e $x_N$. Faça $B^{-1} = I$.

**Passo 1**: Calcule $\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N$. Se $\bar{c}_N \geq 0$, uma solução ótima foi alcançada e pare; caso contrário, vá para o **Passo 2**.

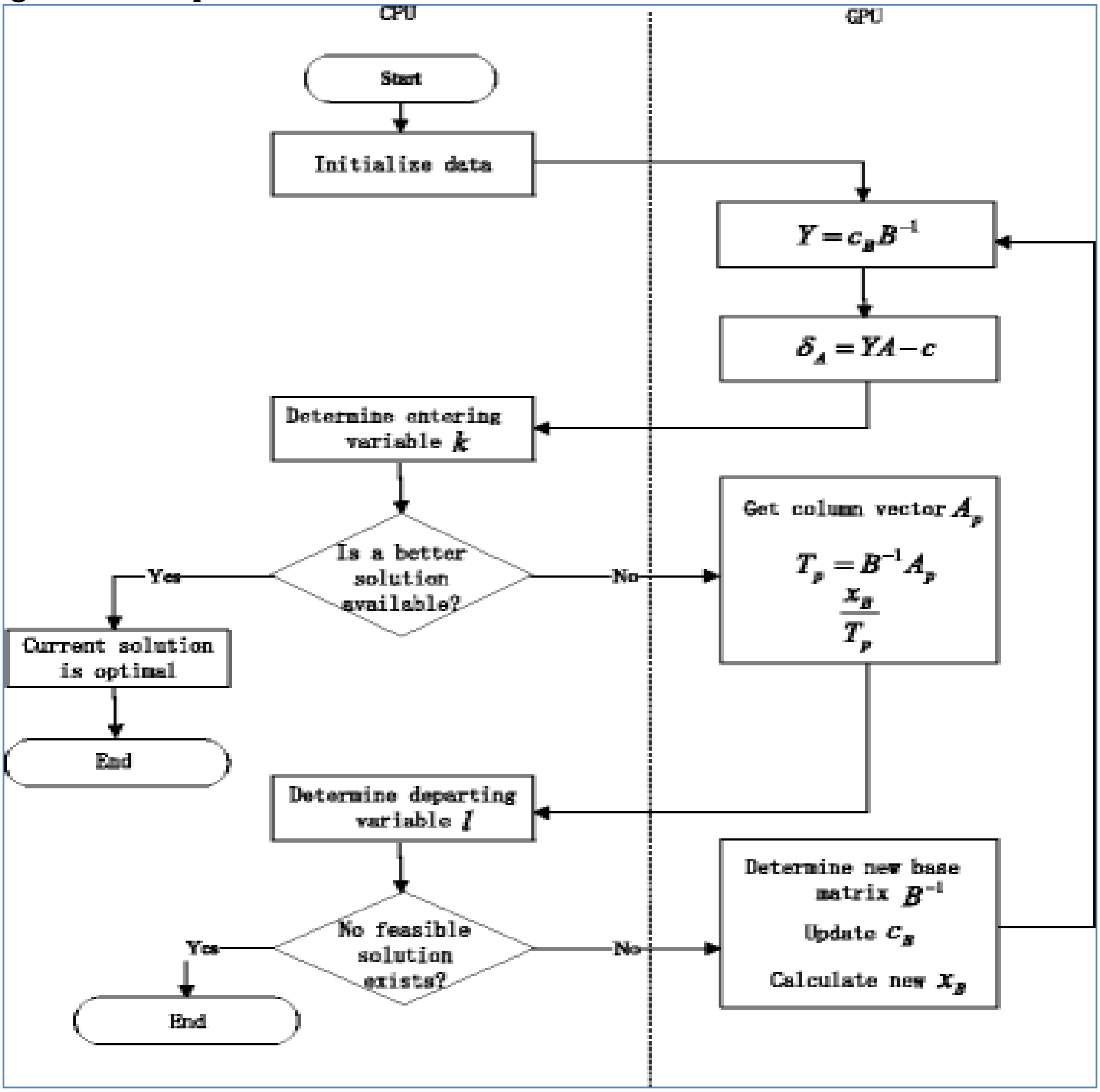
**Passo 2**: Determine a variável $x_K$ que entra na base: $\bar{c}_K = \min_i\{\bar{c}_i, \bar{c}_i < 0\}$.

**Passo 3**: Calcule $B^{-1}A_k$. Se $B^{-1}A_k \leq 0$, o pl é ilimitado, então pare; caso contrário, vá para o **Passo 4**.

**Passo 4**: Determine a variável $x_L$ que sai da base: $\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{LK}} = \min_j \left\{\frac{(B^{-1}b)}{(B^{-1}A_K)}, (B^{-1}A_K) > 0\right\}$.

**Passo 5**: Determine a nova inversa $B^{-1}$ a partir da $B^{-1}$ anterior. Reescreva $x_B$ e $x_N$ e vlte ao **Passo 1**.

## Fluxograma do Simplex Revisado




## Exemplo 1

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{sa} \quad -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{sa} \quad -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quadro inicial

| base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |

$$\left[\begin{array}{c:c:c} c_N^T & c_B^T & 0 \\ \hdashline A_N & A_B & b \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc:cccc:c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Após concluída a 2ª ITERAÇÃO do Simplex por quadros

| base | $x_3$ | $x_5$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| $x_1$ | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $x_4$ | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 |

$$\left[\begin{array}{c:c:c} c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N & 0 & c_B^T A_B^{-1} b \\ \hdashline A_B^{-1} A_N & I & A_B^{-1} b \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc:ccc:c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Variáveis básicas B={1, 2, 4}: $x_B$={$x_1$, $x_2$, $x_4$}. Não Básicas N={3, 5}: $x_N$={$x_3$, $x_5$}.

Do quadro inicial, após concluída a 2ª iteração:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = [-1 \quad -1 \quad 0] \;\; c_N^T = [0 \quad 0]$$

<u>2ª ITERAÇÃO via Simplex Revisado</u>

Temos $x_B$={$x_1$, $x_2$, $x_4$}, $x_N$={$x_3$, $x_5$} e já conhecemos $A_B^{-1}$ atualizada.

**i) Teste de otimalidade**

Para dar continuidade na execução do algoritmo simplex, precisamos calcular $\bar{c}_N = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

- <u>Passo 1</u>: calcular $\pi_N = A_B^{-1} A_N$
- <u>Passo 2</u>: calcular, então, $c_N^T - c_B^T \pi_N$

$$\rightarrow \pi_N = A_B^{-1} A_N \qquad \pi_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [\bar{A}_3 \quad \bar{A}_5]$$

$$\rightarrow \bar{c}_N = c_N^T - c_B^T \pi_N \quad \bar{c}_N = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 2] = [\bar{c}_3 \quad \bar{c}_5]$$

Como $\bar{c}_3 = -1$ e então a solução atual não é ótima (pois $\exists \bar{c}_j < 0$).

**ii) Variável que entra na base**

A escolha da variável $x_K$ que entra na base é feito via o teste $\bar{c}_K = \min_{j=1,\dots,n}\{\bar{c}_j, \bar{c}_j <$ *0*. Temos cN=−12=c3c5. Portanto cK=min*−1*=*−1* e desta forma K = 3 e $x_3$ entra na base.

**iii) Variável que sai da base** (Teste do Bloqueio)

Se $x_K$ entra na base, então a variável que sai da base é escolhida via teste do bloqueio, ou seja, $\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{LK}} = \min_{i=1,\dots,m}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{iK}}, \bar{a}_{iK} > 0\right\}$. Neste caso a variável básica da linha L sai da base.

Para executar o teste precisamos conhecer os valores atualizados de b e $A_K$, ou seja, $\bar{b}$ e $\bar{A}_K$. No nosso exemplo precisamos calcular apenas $\bar{b}$ ($\bar{A}_3$ já foi calculado anteriormente).

$$\bar{b} = bA_B^{-1} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{LK}} = \min\left\{-,-,\frac{2}{1}\right\} = 2$. O mínimo ocorre na 3ª restrição (L = 3) e $x_4$ sai da base.

Depois desta escolha temos: B={1, 2, 3}, $x_B$={$x_1$, $x_2$, $x_3$} e N={4, 5}, $x_N$={$x_4$, $x_5$}. Logo

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = [-1 \quad -1 \quad 0]$$

$$c_N^T = [0 \quad 0]$$

<u>3ª ITERAÇÃO via Simplex Revisado</u>

Primeiro vamos atualizar $A_B^{-1}$. Precisamos construir a matriz ampliada $\left[A_B^{-1} \;\vdots\; \bar{A}_3\right]$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \mathbf{1} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**i) Teste de otimalidade**

Calcular $\bar{c}_N = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$

$$\bar{c}_N = [0 \quad 0] - [-1 \quad -1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] = [\bar{c}_4 \quad \bar{c}_5]$$

Como $\bar{c}_N \geq 0$, então a solução atual é ótima.

<u>Resposta final</u>

Assim, temos de $\bar{b} = A_B^{-1}b$ e $\bar{Z} = c_B^T A_B^{-1} b$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ ou seja } (x_1, x_2, x_3) = (3,2,2) \qquad \bar{Z} = [1 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

**Exemplo 2**

| | |
|---|---|
| maximize $Z = 4X1 + 3X2$ | maximize $Z = 4X1 + 3X2$ |
| sa $\quad X1 - X2 \leq 1$ | sa $\quad X1 - X2 + F1 = 1$ |
| $\quad 2X1 - X2 \leq 3$ | $\quad 2X1 - X2 + F2 = 3$ |

$$X2 \leq 5 \qquad\qquad X2 + F3 = 5$$
$$X1, X2 \geq 0 \qquad\qquad X1, X2, F1, F2, F3 \geq 0$$

**Simplex por quadros**

| Base | X1↓ | X2 | F1 | F2 | F3 | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | **−4** | −3 | | | | 0 | |
| ←F1 | 1 | −1 | 1 | | | 1 | **1/1** |
| F2 | 2 | −1 | | 1 | | 3 | 3/2 |
| F3 | 0 | 1 | | | 1 | 5 | --- |

**Simplex revisado**

$X_B = \{F1, F2, F3\}, X_N = \{X1, X2\}$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N$$

$$\bar{c}_N = [-\mathbf{4}, -3]$$

Iteração 1

**Simplex por quadros**

| Base | X1 | X2↓ | F1 | F2 | F3 | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | **−7** | 4 | | | 4 | |
| X1 | 1 | −1 | 1 | | | 1 | --- |
| ←F2 | | 1 | -2 | 1 | | 1 | **1/1** |
| F3 | | 1 | 0 | | 1 | 5 | 5/1 |

**Simplex revisado**

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X1**

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{L1}} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, -\right\} = \frac{1}{1} (L = 1)$$

$\therefore$ **F1 sai da base**

$*\ X_B = \{X1, F2, F3\}, X_N = \{F1, X2\}$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$*\ \bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N \quad \bar{c}_N = [4, -\mathbf{7}]$

Iteração 2

**Simplex por quadros**

| Base | X1 | X2 | F1↓ | F2 | F3 | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | **−10** | 7 | | 11 | |
| X1 | 1 | | −1 | 1 | | 2 | --- |
| X2 | | 1 | −2 | 1 | | 1 | --- |
| ←F3 | | | **2** | -1 | 1 | 4 | **4/2** |

**Simplex revisado**

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X2**

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 5\end{bmatrix}$$

<table>
<tr><td></td><td>

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}_{L2}} = \min\left\{-, \frac{1}{1}, \frac{5}{1}\right\} = \frac{1}{1}(L = 2)$$

$\therefore$ **F2 sai da base**

$* \; X_B = \{X1, X2, F3\}, X_N = \{F1, F2\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$* \; \bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N \quad \bar{c}_N = [-\mathbf{10}, 7]$

</td></tr>
</table>

Iteração 3

<table>
<tr><td>Simplex por quadros</td><td>Simplex revisado</td></tr>
<tr><td>

| Base | X1 | X2 | F1 | F2 | F3 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | | 2 | 5 | 31 |
| X1 | 1 | | | 1/2 | 1/2 | 4 |
| X2 | | 1 | | 0 | 1 | 5 |
| F1 | | | 1 | –1/2 | 1/2 | 2 |

</td><td>

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **F1**

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_{F1} = B^{-1} A_{F1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}}{\bar{a}_{LF1}} = \min\left\{-, -, \frac{2}{4}\right\} = 2(L = 3)$$

$\therefore$ **F3 sai da base**

$* \; X_B = \{X1, X2, F1\}, X_N = \{F2, F3\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; \bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N \quad \bar{c}_N = [2, 5]$

</td></tr>
</table>

## Exemplo 3

$$\begin{aligned} &\max Z = X1 + X2 \\ &\text{sa} \quad -X1 + X2 \le 1 \\ &\quad X1 \le 3 \\ &\quad X2 \le 2 \\ &\quad X1, X2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max Z = X1 + X2 \\ &\text{sa} \quad -X1 + X2 + X_3 = 1 \\ &\quad X1 + X4 = 3 \\ &\quad X2 + X5 = 2 \\ &\quad X1, X2, X3, X4, X5 \ge 0 \end{aligned}$$

| Simplex por quadros | Simplex revisado |
|---|---|

| base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| X3 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | **---** |
| X4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 3/1 |
| X5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | --- |

$X_B = \{X3, X4, X5\}, X_N = \{X1, X2\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N$

$\bar{c}_N = [-\mathbf{1}, -1]$

Iteração 1

| Simplex por quadros | Simplex revisado |
|---|---|

| Base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | b | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | **-1** | | 1 | | 3 | |
| X3 | | 1 | 1 | 1 | | 4 | 4/1 |
| X1 | 1 | 0 | | 1 | | 3 | --- |
| X5 | | 1 | | 0 | 1 | 2 | **2/1** |

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X1**

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{L1}} = \min\left\{-, \frac{3}{1}, -\right\} = \frac{3}{1} (L = 1)$$

$\therefore$ **X4 sai da base**

$*\ X_B = \{X3, X1, X5\}, X_N = \{X2, X4\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$*\ \bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N \quad \bar{c}_N = [-\mathbf{1}, 1]$

Iteração 2

| Simplex por quadros | Simplex revisado |
|---|---|

| Base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | | 1 | 1 | 5 |
| X3 | | | 1 | 1 | -1 | 2 |
| X1 | 1 | | | 1 | 0 | 3 |
| X2 | | 1 | | 0 | 1 | 2 |

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X2**

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_2 = B^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{L1}} = \min\left\{\frac{4}{1}, -, \frac{2}{1}\right\} = \frac{2}{1} (L = 3)$$

$\therefore$ **X5 sai da base**

$*\ X_B = \{X3, X1, X2\}, X_N = \{X4, X5\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \ \overline{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N \quad \overline{c}_N = [1, 10]$

## Exemplo 4

maximize Z = 4X1- 3X2 + 4X3
sa 4X1 - 3 X2 + X3 ≤ 3
X1 + X2 + X3 ≤ 10
2X1 + X2 - X3 ≤ 10
X1, X2, X3 ≥ 0

maximize Z = 4X1- 3X2 + 4X3
sa 4X1 - 3 X2 + X3 + X4 = 3
X1 + X2 + X3 + X5 = 10
2X1 + X2 - X3 + X6 = 10
X1, X2, X3 ≥ 0

**Simplex por quadros**

| base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | **-4** | 3 | -4 | | | | |
| X4 | 4 | -3 | 1 | 1 | | | 3 |
| X5 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 10 |
| X6 | 2 | 1 | -1 | | | 1 | 10 |

**Simplex revisado**

$X_B = \{X4, X5, X6\}, X_N = \{X1, X2, X3\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\overline{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N$

$\overline{c}_N = [-2, 3, -\mathbf{4}]$

Iteração 1

**Simplex por quadros**

| base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 12 | -9 | | 4 | | | 12 |
| X1 | 4 | -3 | 1 | 1 | | | 3 |
| X5 | -3 | 4 | | -1 | 1 | | 7 |
| X6 | 6 | -2 | | 1 | | 1 | 13 |

**Simplex revisado**

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X1**

* Var que sai da base?

$$\overline{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\overline{b}_L}{\overline{a}_{L1}} = \min\left\{\frac{3}{4}, \frac{10}{1}, \frac{10}{2}\right\} = \frac{3}{4} (L = 1)$$

$\therefore$ **X4 sai da base**

$* \ X_B = \{X1, X5, X6\}, X_N = \{X2, X3, X4\}$

$$B=\begin{bmatrix}4&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{4}&1&0\\-\frac{1}{4}&0&1\end{bmatrix}, c_B=\begin{bmatrix}-4\\0\\0\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$* \ \overline{c}_N=(c_N-c_BB^{-1}N)X_N \quad \overline{c}_N=[0,-\mathbf{3},1]$

Iteração 2

**Simplex por quadros**

| base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | | 0 | **-3** | 1 | | | 3 |
| X3 | 1 | -3/4 | 1/4 | 1/4 | | | 3/4 |
| X5 | | 7/4 | 3/4 | -1/4 | 1 | | 37/4 |
| X6 | | 5/2 | -3/2 | -1/2 | | 1 | 17/2 |

**Simplex revisado**

* Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X1**

* Var que sai da base?

$$\overline{A}_3=B^{-1}A_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{4}&1&0\\-\frac{1}{4}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\overline{b}=B^{-1}b\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\-\frac{1}{4}&1&0\\-\frac{1}{4}&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\10\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{37}{4}\\\frac{17}{2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\overline{b}_L}{\overline{a}_{L1}}=\min\left\{\frac{3/4}{1/4},\frac{37/4}{4/3},\frac{17/2}{-3/2}\right\}=\frac{3}{4}(L=1)$$

$\therefore$ **X1 sai da base**

$* \ X_B=\{X3,X5,X6\}, X_N=\{X1,X2,X4\}$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}, c_B=\begin{bmatrix}-4\\0\\0\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}-3&1&1\\1&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$* \ \overline{c}_N=(c_N-c_BB^{-1}N)X_N \quad \overline{c}_N=[12,-\mathbf{9},4]$

Iteração 3

| Simplex por quadros | Simplex revisado |
|---|---|
| | * Solução ótima? **Não** * Var que entra na base: **X2** |

| base | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 21/4 | | | 7/4 | 9/4 | | 111/4 |
| X3 | 7/4 | | 1 | 1/4 | 3/4 | | 33/4 |
| X2 | -3/4 | 1 | | -1/4 | 1/4 | | 7/4 |
| X6 | 9/2 | | | 1/2 | 1/2 | 1 | 33/2 |

* Var que sai da base?

$$\bar{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{L1}} = \min\left\{-, \frac{7}{4}, -\right\} = \frac{7}{4} (L = 2)$$

$\therefore$ **X5 sai da base**

$* \; X_B = \{X3, X2, X6\}, X_N = \{X1, X4, X5\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$* \; \bar{c}_N = (c_N - c_B B^{-1} N) X_N$$

$$\bar{c}_N = \left[\frac{21}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$$

## Exemplo 5

maximize $Z = 5X1 + 8X2 + 2X3$
sa $\quad 1X1 + 1X2 + 1X3 \geq 6$
$\quad 5X1 + 9X2 + 6X3 \leq 45$
$\quad X1, X2, X3 \geq 0$

maximize $Z = 4X1 - 3X2 + 4X3$
sa $\quad 1X1 + 1X2 + 1X3 - E = 6$
$\quad 5X1 + 9X2 + 6X3 \leq 45$
$\quad X1, X2, X3 \geq 0$

**Temos uma restrição do tipo "≥" → E agora?**

Vamos usar variável artificial e SIMPLEX DUAS FASES. **Questão**: Como usar SIMPLEX REVISADO?

## Observações

1. Em qualquer iteração podemos calcular o valor atualizado das colunas do quadro simplex pois conhecemos a inversa da matriz base ($B^{-1}$).

2. Da mesma forma, em qualquer iteração podemos calcular o valor atualizado do rhs.
3. Se desejarmos incluir uma nova coluna (variável não prevista no início do processso de otimização) podemos fazê-lo a qualquer momento (em particular após obtida a solução ótima).
4. Se desejarmos alterar coeficientes de uma coluna podemos avaliar o efeito desta alteração na base ótima.
5. Da mesma forma também podemos estudar o feito na base ótima se alterarmos o rhs.

## Exercício

| | |
|---|---|
| $\max Z = 2x_1 + 3x_2$<br>sa $x_1 + 2x_2 \leq 6$<br>$2x_1 + x_2 \leq 9$<br>$x_j \geq 0, j = 1,2$ | $\max Z = 2x_1 + 3x_2$<br>sa $x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$<br>$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$<br>$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4$ |

| base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 6 |
| $x_4$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 9 |

| base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | -1/2 | | 1/2 | | 9 |
| $x_2$ | 1/2 | 1 | 1/2 | | 3 |
| $x_4$ | 3/2 | | -1/2 | 1 | 6 |

| base | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|
| Z | | | 4/3 | 1/3 | 11 |
| $x_2$ | | 1 | 2/3 | -1/3 | 1 |
| $x_4$ | 1 | | -1/3 | 2/3 | 4 |

## Exercício 2

Seja

maximizar $50X_1 + 20\,X_2$

Sujeito a $2X_1 + 4X_2 \leq 400$

$100X_1 + 50X_2 \leq 8000$

$X_1 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$

a) Resolva o problema via simplex por quadros.

b) Resolva o problema via simplex revisado.