Teoremas e resolução de PL via determinação das soluções básicas viáveis

Um programa linear-pl é um problema de otimização no qual temos uma coleção de variáveis, que assumem valores reais, e queremos atribuir valores às variáveis que satisfaça uma coleção de desigualdades lineares e que maximize ou minimize uma determinada função objetivo (linear).

Quando resolvemos graficamente um pl de duas variáveis percebemos que o gradiente da função objetivo “nos obriga a ir até” a fronteira do conjunto de soluções viáveis. Ou seja, o gradiente indica (intuitivamente) que a solução ótima de um pl, se ela existir, sempre está na fronteira/borda do conjunto das soluções viáveis. Como a fronteira é composta por segmentos de reta, percebe-se que a solução ótima se encontra na interseção de retas que definem as regiões de “definição/abrangência” de restrições.

O método mais difundido para resolução de problemas de programação linear é o Simplex. O “funcionamento” do Simplex é baseado no fato de que a solução ótima, se ela existir, é uma dessas interseções. Estas interseções têm nomes especiais tais como *corner*, vértice, ponto extremo, solução básica.

Neste texto iremos apresentar teoremas fundamentais que garantem que Simplex encontra a solução ótima de um pl, se ela existir.

Forma padrão

O método Simplex é uma abordagem para determinar o valor ótimo de um programa linear. O método produz uma solução ótima que satisfaz as restrições e produz um valor Z máximo (se existir). Para usar o método Simplex, o pl precisa estar no formato padrão, onde variáveis de folga e/ou de excesso devem ser introduzidas.

Para um pl estar na forma padrão, há três requisitos: (1) deve ser um problema de maximização; (2) todas as restrições lineares devem estar no formato de igualdade; (3) todas as variáveis são não negativas. Esses requisitos sempre podem ser satisfeitos, transformando qualquer pl usando álgebra e substituições básicas. O formato padrão é necessário porque cria uma solução/ponto de partida ideal para utilizar o método Simplex de maneira eficiente.

1. Para transformar um pl de minimização em um pl de maximização, basta multiplicar os lados esquerdo e direito da função objetivo por −1.
   - Se temos min $Z = c_1x_1 + c_2x_2+...+c_nx_n$ substituímos por max $-Z = -x_1c_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$
   - Por exemplo se temos min $Z = 2x_1 - 3x_2$, escrevemos max $-Z = -2x_1 + 3x_2$.
2. Variáveis de folga são variáveis adicionais (não negativas) introduzidas nas restrições para transformar desigualdades do tipo "menor ou igual a" para restrições de igualdade. Variáveis de folga sempre entram com coeficiente +1.
   - Se temos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n \leq b_i$, substituímos por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n + F_i = b_i$, e adicionamos $F_i \geq 0$
   - Por exemplo se temos $4x_1 - x_2 \leq 6$, escrevemos $4x_1 - x_2 + F = 6$, $F \geq 0$
3. Variáveis de excesso são variáveis adicionais (não negativas) que são introduzidas para transformar desigualdade do tipo "maior ou igual a" em restrições de igualdade. As variáveis de excesso são introduzidas com coeficiente −1.
   - Se temos $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n \geq b_i$, substituímos por $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 +...+ a_{in}x_n - E_i = b_i$, e adicionamos $E_i \geq 0$.
   - Por exemplo se temos $4x_1 - x_2 \geq 6$, escrevemos $4x_1 - x_2 - E = 6$, $E \geq 0$
4. Se temos variáveis negativas, devemos fazer uma mudança de variável, em todo o pl, substituindo-a por sua simétrica
   - Se temos $x_j \leq 0$, substituímos por $x_j = -x_j'$, e adicionamos $x_j' \geq 0$
5. Se temos variáveis livres (sem sinal), também devemos fazer uma mudança de variável, em todo o pl, substituindo-a pela diferença de duas variáveis positivos
   - Se temos x_j livre, substituímos por $x_j = x_j' - x_j''$, e adicionamos $x_j', x_j'' \geq 0$

Após efetuadas as operações, a forma padrão do pl é a seguinte ($b \geq 0$)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize } Z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \dots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Definições

Definição 1: Um conjunto S é dito convexo se, para quaisquer elementos x e y de S, tem-se que:

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S, \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

Definição 2: (Combinação Convexa) Uma combinação convexa é uma combinação linear em que os coeficientes de ponderação são não-negativos e somam um.

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i \ge 0, \forall i$$

Definição 3: (Combinação Estritamente Convexa) Uma combinação estritamente convexa é uma combinação linear em que os coeficientes de ponderação somam 1 (um) e são estritamente positivos.

Teorema 1: Considere um subconjunto convexo $S \subseteq R^n$. Qualquer ponto situado no segmento que une dois pontos distintos contidos em S pode ser expresso por uma combinação convexa destes dois pontos.

Lema 1: O conjunto dos pontos representáveis por combinações convexas é a união dos pontos representáveis por combinações estritamente convexas com os pontos extremos.

Teorema 2: A intersecção de dois conjuntos convexos resulta em um conjunto convexo.

Definição 4: (Ponto Extremo) Um ponto pertencente a uma região convexa é dito ser um ponto extremo se não puder ser expresso através de uma combinação estritamente convexa de dois pontos distintos.

Definição 5: (Ponto Extremo) Um ponto extremo em um conjunto convexo S é um ponto pertencente a S que não está no interior de nenhum segmento de reta contido em S.

Pontos extremos também são chamados de vértices. Nesta disciplina, as duas nomenclaturas serão usadas indistintamente.

Definição 6: Solução Viável – Um vetor x que satisfaz as restrições de um problema de programação linear é denominado de solução viável ou factível. Um vetor que não satisfaz alguma restrição é chamado de solução inviável. O conjunto de todas as soluções viáveis forma a região viável ou região factível.

Definição 7: Matriz Base – Se a submatriz $B_{m\times m}$ da matriz A é não singular, isto é, o seu determinante é não nulo, então $B_{m\times m}$ é denominada de matriz base.

Definição 8: Variável Básica e **Variável Não Básica** – As m variáveis correspondentes às m colunas da matriz base $B_{m\times m}$ são denominadas de variáveis básicas (x_B). As demais são as variáveis não básicas (x_N).

Definição 9: Solução Básica – Uma <u>solução básica</u> é qualquer solução x que satisfaz Ax=b obtido fixando as variáveis não básicas igual a zero (x_N=0). Se a solução básica for tal que x ≥ 0, então diz-se que a solução é <u>básica viável</u>.

Seja um sistema com m equações e n variáveis. Considere uma partição básica A = [B N] e a seguinte solução obtida ao se fixar as n – m variáveis de x_N em zero:

$$\begin{cases} x_B^* = B^{-1}b \\ x_N^* = 0 \end{cases}$$

A solução $x^* = [x_B^*, x_N^*]$ assim obtida é chamada **solução básica**. Se $x_B^* = B^{-1}b \geq 0$, dizemos que x^* é uma **solução básica viável**. Se $x_B^* = B^{-1}b > 0$, dizemos que x^* é uma **solução básica viável não degenerada**.

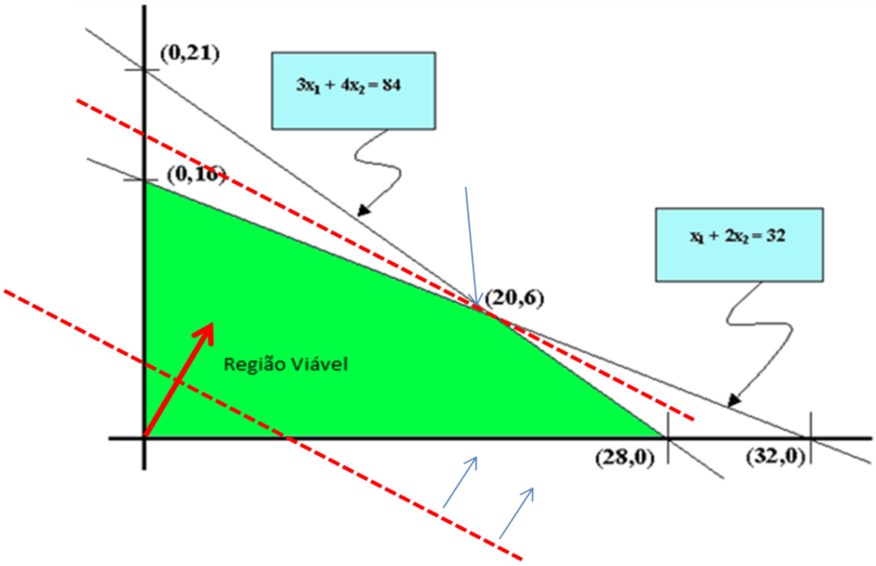
<u>Exemplo</u>: Seja o pl na forma geral e na forma padrão

Forma geral

max Z = 50x1 + 80x2
sa x1 + 2x2 ≤ 32
3x1 + 4x2 ≤ 84
x1, x2 ≥ 0

Forma padrão

max Z = 50x1 + 80x2
sa x1 + 2x2 + F1 = 32
3x1 + 4x2 + F2 84
x1, x2, F1, F2 ≥ 0



Resolução gráfica

Uma vez que as restrições são em termos de desigualdades e o método simplex só lida com equações, vamos reescrever as restrições do tipo "≤" como equações através da introdução de variáveis de folga, F1 e F2:

x1 + 2x2 ≤ 32 3x1 + 4x2 ≤ 84

tornar-se

x1 + 2x2 + F1 = 32 3x1 + 4x2 + F2 = 84 (com F1 ≥ 0 e F2 ≥ 0)

F1 e F2 são novas variáveis que "são as folgas" entre os lados esquerdo e direito das desigualdades transformando-os em igualdades (equações)

Vamos construir a tabela das soluções básicas que mostra todas as soluções básicas das variáveis x1, x2, F1, F2. Como temos quatro variáveis e duas restrições, sempre teremos duas variáveis nulas; assim devemos atribuir 0 a todos os pares possíveis e resolver o sistema resultante

$$\begin{cases} x1 + 2x2 + F1 = 32 \\ 3x1 + 4x2 + F2 = 84 \end{cases}$$

x1	x2	F1	F2
0	0	F1	F2
0	x2	0	F2
0	x2	F1	0
x1	0	0	F2
x1	0	F1	0
x1	x2	0	0

Agora, usando as duas equações, resolvemos o sistema para as outras duas variáveis, obtendo

x1	x2	F1	F2	Solução Básica Viável?	Z
0	0	32	84	Sim	0
0	16	0	20	Sim	1280
0	21	-10	0	Não	---
32	0	0	-12	Não	---
28	0	4	0	Sim	1400
20	6	0	0	Sim	1480**

Note que algumas soluções básicas incluem variáveis negativas. Apenas as soluções com todas as variáveis positivas serão pontos extremos (vértices). Tais soluções são as **soluções básicas viáveis.**

- As variáveis fixadas em 0 são chamados de variáveis **não-básicas.**
- As variáveis usadas na resolução do sistema resultante são a **variáveis básicas.**
- Uma solução assim obtida é denominada de **solução básica.**
- Uma solução sem variáveis negativas é uma **solução básica viável**.

Principais teoremas

Teorema 1: A região viável de um programa linear-pl é convexa.

Teorema 2: A solução ótima de um pl é um ponto extremo.

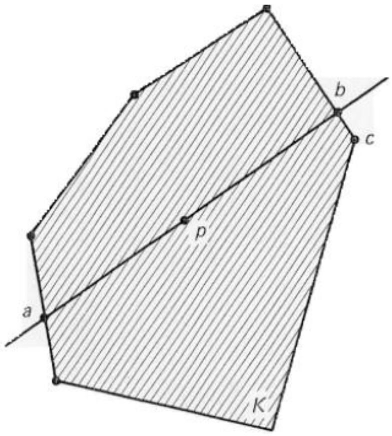
Teorema 3: Se existe solução viável então existe solução básica viável.

Teorema 4: A solução básica viável de um pl é um ponto extremo da região viável.

Teorema 5: O conjunto de soluções básicas viáveis de um pl é finito.

Em suma, o que queremos provar é que se a região é viável então temos pelo menos uma solução básica viável. Iremos provar que toda solução básica viável é um extremo e que se a solução ótima existir ela é uma solução básica.

Teorema 1: (Região Viável é Convexa) Num problema de programação linear, a região viável é um conjunto convexo.



$$\begin{cases} a \in S \\ b \in S \\ p = \lambda a + (1-\lambda) b \in S, \end{cases} \quad 0 \le \lambda \le 1 \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_m = b_m \end{cases} \Rightarrow S$$

<u>Demonstração</u>: Seja S o conjunto formado pelos pontos x tais que Ax=b, x≥0. Vamos demonstrar que o conjunto S é convexo. Sejam x1,x2∈S; precisamos mostrar que x=αx1+(1−α)x2 ∈ S, 0≤α≤1. Sejam x1 e x2 tal que Ax1=b e Ax2=b e x1,x2≥0. Ax=A[αx1+(1−α)x2]=αAx1+(1−α)Ax2=αb+(1−α)b=b. Uma vez que x1,x2≥0 e α≤1 então x = αx1 + (1 – α)x2 ≥ 0.■

Teorema 2: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto convexo do **Teorema 1**.

<u>Demonstração</u>: Seja Z(x) a função objetivo que toma o valor máximo M no ponto x_0, então pode-se afirmar que $M = Z(x_0) \ge Z(x) \forall x \in S$. Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto *S*. Precisamos provar que x_0 é um desses pontos extremos. Suponha que x_0 não seja um ponto extremo de S. Então, ele pode ser obtido pela combinação convexa de seus pontos extremos: $x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i$ sendo $\alpha_i \ge 0$, i=1,2,...,p e $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ **->** **(a)**. Assim $Z(x_0) = Z\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i\right) = Z\left(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_p \bar{x}_p\right) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1) + Z(\alpha_2 \bar{x}_2) + \dots + Z\left(\alpha_p \bar{x}_p\right) = \alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_p Z(\bar{x}_M) = M$ **->** **(b)**. Consideremos o ponto extremo $\bar{x}_M$ definido pela relação $Z(\bar{x}_M) = max\, Z(\bar{x}_i)$, i=1,2,...,p **->** **(c)** Devido as relações (a) e (c) a relação (b) pode sofrer as seguintes modificações: $Z(x_0) \le \alpha_1 Z(\bar{x}_M) + \alpha_2 Z(\bar{x}_M) + \dots + \alpha_p Z(\bar{x}_M)$, ou seja, $Z(x_0) \le Z(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, isto é $Z(x_0) \le Z(\bar{x}_M)$. Mas tínhamos $M = Z(x_0) \ge Z(x)\ \forall x \in S$. Então é necessário ter $Z(x_0) = M = Z(\bar{x}_M)$ e fica provado que a solução ótima x_0 é um ponto extremo do conjunto convexo S. ■

Teorema 3: Se existir uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

Demonstração: Suponha que $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ é uma solução básica viável. Assim $x \geq 0$.

- Sem perda de generalidade, suponha que somente as primeiras p coordenadas de x são positivas, assim $x_1a_1 + \cdots + x_pa_p = b$ (1)
- Caso 1: se $a_1, \dots, a_p$ são linearmente independentes, então $p \leq m = \text{rank}(A)$.
  a. se $p = m$, então $B = [a_1, \dots, a_m]$ forma uma base e x é solução básica viável
  b. se $p < m$, então podemos encontrar $m - p$ colunas de $a_{p+1}, \dots, a_n$ para formar uma base B e x será uma solução básica viável.
- Caso 2: se $a_1, \dots, a_p$ são linearmente dependentes então $\exists\, y_1, \dots, y_p$ tal que algum $y_i > 0$ e $y_1a_1 + \cdots + y_pa_p = 0$. Deste fato e de (1) temos $(x_1 - \varepsilon y_1)a_1 + \cdots + (x_p - \varepsilon y_p)a_p = b$
- Para ε suficientemente pequeno temos $(\varepsilon > 0)$, $(x_1 - \varepsilon y_1) > 0, \dots, (x_p - \varepsilon y_p) > 0$.
- Visto que existe algum $y_i > 0$, fazendo $\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i} \mid i = 1, \dots, p, y_1 > 0\right\}$. então, as primeiras p componentes de $(x - \varepsilon y) \geq 0$ e pelo menos um deles é 0. Portanto, podemos reduzir p em pelo menos 1. Repetindo esse processo, ou chegamos ao Caso 1 ou $p = 0$. A última situação pode ser tratada como o Caso 1. ■

Teorema 4: (Solução Básica Viável é Ponto Extremo) A solução viável x é um ponto extremo de S se e somente se x é uma solução básica viável para S..

Demonstração: (⇒) Seja x um ponto extremo de S. Suponhamos por contradição que x não é solução básica. Suponhamos, então que suas $p > m$ primeiras componentes são positivas ($x_1a_1 + \cdots + x_pa_p = b$ pois $x \in S$). Seja $y = [y_1, \dots, y_p]$, com $y \neq 0$ tal que $y_1a_1 + \cdots + y_pa_p = 0$. Visto que $x_1, \dots, x_p > 0$ por hipótese, $\exists\, \varepsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que $(x + \varepsilon y) \in S$ e $(x - \varepsilon y) \in S$, visto que $A(x \pm \varepsilon y) = Ax \pm A(\varepsilon y) = Ax \pm \varepsilon(Ay) = b + 0 = b$ e que $(x \pm \varepsilon y) \geq 0$. Portanto $x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$ e portanto x não é extremo. Isto é uma contradição e portanto x é solução básica viável.

(⇐) Seja x uma solução básica associada a submatriz base $B \in R^{m\times m}$, com B não singular. Então, sem perda de generalidade, suponha que $x = (x_B, x_N)$ com $x_i=0$ para $i=m+1,\dots,n$. Logo, $Ax=Bx_B=b$. Por contradição suponhamos que x não seja ponto extremo ou vértice de S, então $\exists y,z \in S$ tal que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, $\alpha \in [0, 1]$ e $y \neq z$ pois $x \neq 0$. Como $x_i=0$ $i=m+1,\dots,n$, então $\alpha y_i=0$ e $(1-\alpha)z_i=0$ para $i=m+1,\dots,n$, e portanto $y_i = z_i = 0$ $i=m+1,\dots,n$. Logo $y=(y_B, 0)$ e $z=(z_B, 0)$. Como $y, z \in S$, $Ay=b$ e $Az=b$, e portanto $By_B=b$ e $Bz_B=b$.

Portanto $0 = b - b = By_B - Bz_B = B(y_B - z_B) \rightarrow B(y_B - z_B)=0$. Como B é não singular, então $y_B = z_B$.. Isso é uma contradição pois por hipótese $y \neq z$, e portanto x é um extremo. ■

Teorema 5: (O Número de Soluções Básicas é Finito) A coleção de todas as soluções básicas formam um conjunto finito.

$$C_m^n = m!/n!\,(m-n)!$$

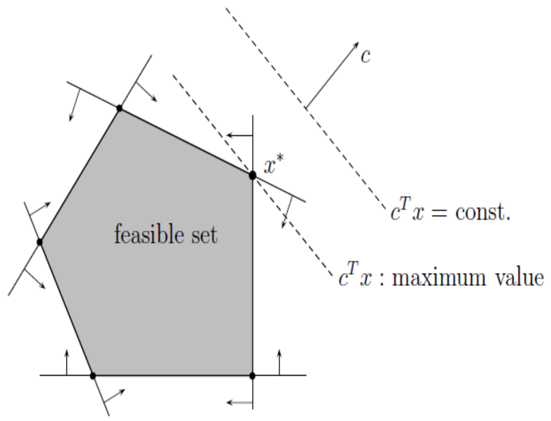
Teorema 6: (Múltiplas soluções) Se um valor ótimo da função objetivo é atingido em mais de um ponto extremo, cada combinação convexa desses pontos extremos também fornece o valor ótimo da função objetivo.

Demonstração: Seja a função objetivo $Z(x) = c^T x$ que assume o valor ótimo Z^* nos pontos extremos y_1 e y_2, ou seja, $Z^* = c^T y_1 = c^T y_2$. Seja $x_0 = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$. Então, $x_0 \in S$ pois S é um conjunto convexo, e $c^T x_0 = \lambda c^T y_1 + (1-\lambda)c^T y_2 = Z^*$. Portanto, x_0 também é uma solução ótima do pl.■

Sumário: se a região é viável então existe solução básica viável. Se existir, a solução ótima é uma solução básica viável.

Resolução de um pl via determinação das soluções básicas viáveis

Baseado nos teoremas anteriores, uma maneira prática de resolver pequenos problemas de programação linear, seria verificar o valor da função objetivo nos pontos extremos (Soluções Básicas) do polígono de soluções viáveis.



Considere um pl na forma padrão: max{$c^T x$: $Ax = b$, $x \geq 0$}. Uma solução viável é qualquer $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a matriz $A_{m\times n}$ possui rank(A)=m, portanto A possui m colunas linearmente independentes. Para alguma escolha de m colunas linearmente independentes de A, chamadas colunas básicas, uma solução básica é qualquer x tal que $Ax = b$ com as n – m variáveis não básicas nulas. As variáveis básicas assumirão valor $x_B = B^{-1}b$, onde as colunas de B são as colunas básicas de A. Se além disso $x \geq 0$, x é uma solução básica viável.

Então, para resolver um pl utilizando o método das soluções básicas, deveremos seguir o seguinte procedimento

(a) Encontre todas as soluções básicas (viáveis e inviáveis)

(b) Para cada solução básica viável calcule o respectivo valor da função objetivo;

(c) A solução básica viável com o maior valor da função objetivo é a ótima.

Exemplo de resolução via método das soluções básicas viáveis

Seja o pl

$$\begin{array}{rl} \max Z = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sa} & 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2, x_2 \geq 0 \end{array}$$

pl na forma padrão

$$\begin{array}{rl} \max Z = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sa} & 2x_1 + 3x_2 + F_1 = 15 \\ & 2x_1 + x_2 + F_2 = 9 \\ & x_1 - x_2 + F_3 = 3 \\ & x_2, x_2, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{array}$$

Considerando a forma de escrever max{$c^T x$: Ax = b, x≥0}, temos

$$c = [5\ \ 3],\ b = [15\ \ 9\ \ 3]^T,\ x = [x_1\ \ x_2\ \ F_1\ \ F_2\ \ F_3],\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo as restrições temos

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} F_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para obter uma solução básica, deveremos primeiro escolher 3 colunas linearmente independentes. Estas colunas são denominadas de base (B), e as variáveis associadas a estas colunas, x_B, são as variáveis básicas. As demais variáveis são as não básicas (designadas por x_N). As colunas das variáveis não básicas (N) não serão utilizadas na resolução do sistema e para "desativar" estas colunas (na resolução do sistema Ax=b) basta fazer $x_N = 0$. Portanto, ao invés de resolver o sistema Ax = b, que tem 3 linhas e 5 colunas, iremos resolver $Bx_B = b$, que conta com 3 linhas e 3 variáveis.

Originalmente queremos resolver $Ax = b \Rightarrow (Bx_B + Nx_N) = b$, mas como temos $x_N = 0$, então resolveremos o sistema menor $Bx_B = b$. Basta, calcular B^{-1} e termos $x_B = B^{-1}b$.

Cálculo das soluções básicas do exemplo. Como há m = 3 linhas e n = 5 variáveis (ou seja, 5 colunas), temos $C_5^3 = 10$ opções de escolher a matriz B (e logo x_B).

1. $x_B = (x_1, x_2, F_1) \qquad x_N = (F_2, F_3) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow x = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0]$$

2. $x_B = (x_1, x_2, F_2) \qquad x_N = (F_1, F_3) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{9}{5} & 0 & -\frac{12}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

3. $x_B = (x_1, x_2, F_3) \qquad x_N = (F_1, F_2) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

4. $x_B = (x_1, F_1, F_2) \qquad x_N = (x_2, F_3) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0]$$

5. $x_B = (x_1, F_1, F_3) \qquad x_N = (x_2, F_2) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 6 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

6. $x_B = (x_1, F_2, F_3) \qquad x_N = (x_2, F_1) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & 0 & 0 & -6 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

7. $x_B = (x_2, F_1, F_2) \qquad x_N = (x_1, F_3) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [0 \quad -3 \quad 24 \quad 12 \quad 0]$$

8. $x_B = (x_2, F_1, F_3) \qquad x_N = (x_1, F_2) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

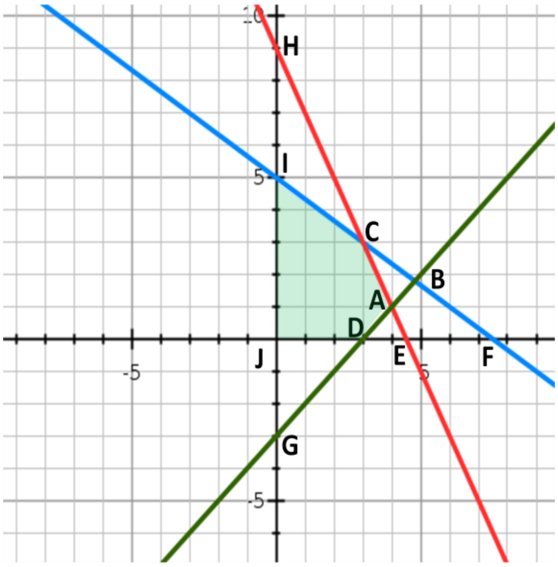
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [0 \quad 9 \quad -12 \quad 0 \quad 12]$$

9. $x_B = (x_2, F_2, F_3) \qquad x_N = (x_1, F_1) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [0 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 8]$$

10. $x_B = (F_1, F_2, F_3) \qquad x_N = (x_1, x_2) \qquad x = [B^{-1}b, 0]$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3]$$



Somente é solução básica viável se $x_B = B^{-1}b \geq 0$, ou seja

1: $x_B = (x_1, x_2, F_1) \qquad x = [4 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0] \qquad Z = 5x_1 + 3x_2 = 20 + 3 = 23$

3: $\mathbf{x_B = (x_1, x_2, F_3) \qquad x = [3 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 3]} \qquad \boldsymbol{Z = 5x_1 + 3x_2 = 15 + 9 = 24}$

4: $x_B = (x_1, F_1, F_2) \qquad x = [3 \quad 0 \quad 9 \quad 3 \quad 0] \qquad Z = 5x_1 + 3x_2 = 15 + 0 = 15$

9: $x_B = (x_2, F_2, F_3) \qquad x = [0 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad 8] \qquad Z = 5x_1 + 3x_2 = 0 + 15 = 15$

10: $x_B = (F_1, F_2, F_3) \qquad x = [0 \quad 0 \quad 15 \quad 9 \quad 3] \qquad Z = 5x_1 + 3x_2 = 0 + 0 = 0$

<u>**Curiosidade**</u>: Seja um pl com 200 restrições e 200 variáveis (que é considerado pequeno em comparação com a maioria dos casos reais para os quais o método simplex é utilizado). Neste caso temos 100 equações e 300 variáveis, que dará $C_{300}^{200} = 4\times10^{81}$ soluções básicas.

Se um computador calcula uma solução básica a cada milionésimo de segundo, demoraria $\approx 4\times10^{75}$ segundos para encontrar todas. Como o ano tem 60×60×24×365

= 31536000 = ~3×10^7 segundos a resolução irá demorar ≈$4/3\times10^{68}$ anos para concluir o cálculo. A idade do universo é de cerca de 20 bilhões = 20.000.000.000 = 2×10^{10} anos. Então precisaríamos 10^{58} anos do universo para resolver um pl pequeno.

Conclusão: praticamente é impossível resolver um pl com maiores dimensões via determinação de todas as soluções básicas.

https://www.youtube.com/watch?v=N4GxD63lqLc&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=NYZ206ccuzY&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=NYZ206ccuzY&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=cvRWORxDAY8&list=PLbxFfU5GKZz1Tm_9RR5M_uvdOXpJJ8LC3&index=5