PESQUISA OPERACIONAL

Análise de Sensibilidade

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Análise de Sensibilidade

- Interpretação geométrica de análise de sensibilidade
- Os preços-sombra – variáveis duais
- Alterando na função objetivo o coeficiente de uma variável
- Alterar o vetor do lado direito (b)
- Alterando a coluna de uma variável
- Adicionando uma nova atividade

(Capítulo 6 do livro de Bazaraa, Jarvis, and Sherali.)

Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade está preocupada com a forma como as mudanças nos parâmetros de um pl afetam a solução ótima.

Em muitas aplicações, os valores de parâmetros do pl mudam. Se um parâmetro for alterado, a análise de sensibilidade nos permite determinar a nova solução ótima sem resolver o problema de novo.

Ela nos permite determinar quais as mudanças nos coeficientes não alteram a solução.

O conhecimento de análise de sensibilidade permite que um analista determine o impacto das mudanças sobre o valor ótimo da função objetivo.

Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade está interssada em estudar os efeitos na solução ótima se ocorrerem mudanças nos parâmetros de um pl.

maximize	$z = 3x_1 + 2x_2$	(Função objetivo)
sujeito a		
	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Restrição de acabamento)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Restrição de carpintaria)
	$x_1 \leq 40$	(Limite de soldadores)
	$x_1 \geq 0$	(Restrição de sinal)
	$x_2 \geq 0$	(Restrição de sinal)

Solução ótima: $z = 180$, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$

Quais os efeitos na solução ótima será afetada se ocorrerem alterações nos coeficientes na função objetivo, ou alterações em alguns valores do vetor b, ou alterações nos a_{ij}?

Análise de Sensibilidade

maximize	$z = 3x_1 + 2x_2$	(Função objetivo)
sujeito a		
	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Restrição de acabamento)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Restrição de carpintaria)
	$x_1 \leq 40$	(Limite de soldadores)
	$x_1 \geq 0$	(Restrição de sinal)
	$x_2 \geq 0$	(Restrição de sinal)

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z	-3	-2				
x_3	2	1	1			100
x_4	1	1		1		80
x_5	1	0			1	40

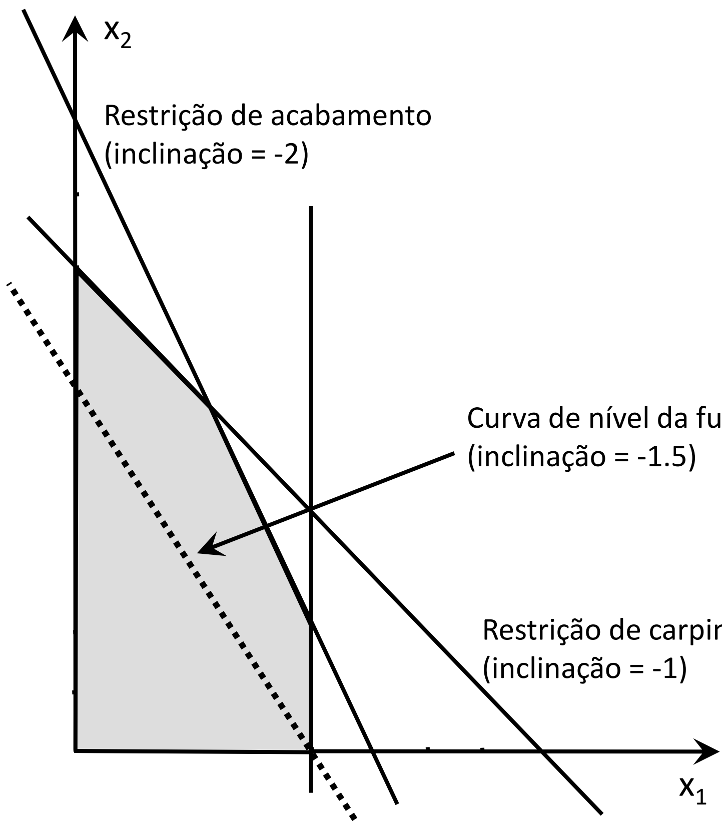
Quadro ótimo (após 4 iterações)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z			**1**	**1**		180
x_2		1	-1	2		60
x_5			-1	1	1	20
x_1	1		1	-1		20

Preços-sombra -> valor das variáveis duais

Análise de Sensibilidade

Mudanças em z



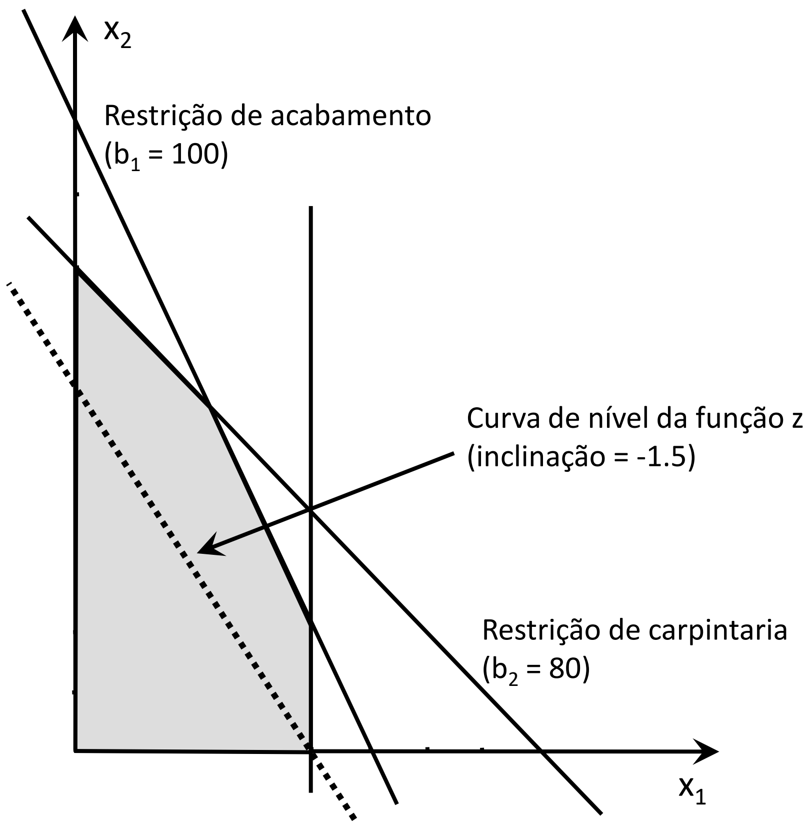
Função Objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2$

Como mudança em c_1 afetará a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo?

Como mudança em c_2 afetará a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo?

Análise de Sensibilidade

Mudanças no vetor b



Função Objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2$

Como mudança em b_1 afetará a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo?

Como mudança na b_2 afetará a solução ótima e o valor ótimo da função objetivo?

Preços-sombra (variáveis duais) indicam como o valor da função objetivo mudará se ocorrerer mudanças em b_i

Análise de Sensibilidade

Preços-sombra

Os preços-sombra são associados com as restrições de um pl.

O preço-sombra da i-ésima de um pl é o montante em que o valor ótimo de z (isto é, o valor da função objetivo) melhora se o lado direito da i-ésima restrição aumenta em uma unidade.

Esta definição pressupõe que alterar o lado direito da i-ésima restrição mantem a base atual ótima.

Qual é o preço sombra para a restrição de acabamento: o preço-sombra da restrição de acabamento é 1 (y_1 = 1). Isso indica que se a quantidade de horas destinadas ao acabamento subir de 100 para 101 horas, o valor da função objetivo aumentará de 180 para 181.

Análise de Sensibilidade

Exemplo

maximize $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

sujeito a

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ (restrição de placas de madeira)

$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20$ (restrição de acabamento-h)

$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8$ (restrição de carpintaria-h)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	F_3	b
z	-60	-30	-20				
f_1	8	6	1	1	0	0	48
f_2	4	2	1,5	0	1	0	20
f_3	2	1,5	0,5	0	0	1	8

Quadro ótimo (após 2 iterações)

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	b
Z		5			10	10	280
f_1		-2		1	2	-8	24
x_3		-2	1		2	-4	8
x_1	1	1,25			-0,5	1,5	2

Do quadro ótimo

$$x_B = \{x_1, x_3, f_1\}$$

$$x_N = \{x_2, f_2, f_3\}$$

$$\begin{cases} z = 240 \\ x_1 = 2 \\ x_3 = 8 \\ f_1 = 24 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$y = \{0{,}10{,}10\}$ preços-sombra

Análise de Sensibilidade

Exemplo

maximize $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

sujeito a

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_B = \{f_1, x_3, x_1\}$$

$$x_N = \{x_2, f_2, f_3\}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\overline{Z} = c_B x_B + c_N x_N = c_B\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N x_N = c_B B^{-1}b + \underbrace{\left(c_N - c_B B^{-1}N\right)}_{\text{Coeficientes atualizados das variáveis não básicas}} x_N$$

Análise de Sensibilidade

Mudanças em coeficientes da função objetivo

i) Variável Não Básica: $c_2 = c_2'$ ($z = 60x_1 + c_2'x_2 + 20x_3$)

$$\overline{Z} = c_B B^{-1} b + \left(c_N - c_B B^{-1} N\right) x_N \qquad \overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_N = \{x_2, f_2, f_3\} \qquad c_N = [-30,0,0] \qquad c_B = [0,-20,-60]$$

$$\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N = [-c_2',0,0] - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\overline{c_N} = [-c_2',0,0] - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 5/4 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\overline{c_N} = [-c_2',0,0] - [-35,-10,-10] \geq 0 \Rightarrow -c_2' + 35 \geq 0 \Rightarrow c_2' \leq 35$$

<u>Conclusão</u>: se $c_2' \leq 35$, então a base ótima não muda.

Análise de Sensibilidade

Mudanças em coeficientes da função objetivo

ii) Variável Básica: $c_3 = c_3'$ ($z = 60x_1 + 30x_2 + c_3'x_3$) $\overline{c_N} = c_N - c_B' B^{-1} N$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_N = \{x_2, f_2, f_3\} \quad c_N = [-30,0,0] \quad c_B = [0, c_3', -60]$$

$$\overline{c_N} = c_N - c_B' B^{-1} N = [-30,0,0] - [0,-c_3',-60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\overline{c_N} = [-30,0,0] - [0,-c_3',-60] \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 5/4 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \overline{c_N} = [-30,0,0] - [2c_3'-75, -2c_3'+30, 4c_3'-90] \geq 0$$

$$\begin{cases} -2c_3' + 75 \geq 30 \\ 2c_3' - 30 \geq 0 \\ -4c_3' + 90 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3' \leq 45/2 \\ c_3' \geq 15 \\ c_3' \leq 45/2 \end{cases} \Rightarrow 15 \leq c_3' \leq 45/2$$

<u>Conclusão</u>: se $15 \leq c_3' \leq 45/2$, então a base ótima não muda.

Análise de Sensibilidade

<u>Mudanças em coeficientes do lado direito</u>

i) Faixa de variação de um único coeficiente para não mudar a base

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow b' = \begin{bmatrix} 48 \\ b_2' \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ b_2' \\ 8 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{cases} 48 + 2b_2' - 64 \geq 0 \\ 0 + 2b_2' - 32 \geq 0 \\ 0 - 1/2 b_2' + 12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b_2' \geq 16 \\ 2b_2' \geq 32 \\ 1/2 b_2' \leq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2' \geq 8 \\ b_2' \geq 16 \Rightarrow 16 \leq b_2' \leq 24 \\ b_2' \leq 24 \end{cases}$$

<u>Conclusão</u>: se $16 \leq b_2' \leq 24$, então a base ótima não muda.

Análise de Sensibilidade

Mudanças em coeficientes do lado direito

ii) Mudança em um (ou mais) coeficientes

Solução Inviável!!!!!!

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow b'' = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 32 \end{bmatrix} \qquad \bar{b}'' = B^{-1}b'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -168 \\ -88 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$Z'' = 520$$

$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

Método Dual Simplex

Quadro ótimo

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	b
z		5			10	10	520
f_1		-2		1	2	-8	-168
x_3		-2	1		2	-4	-88
x_1	1	1,25			-0,5	1,5	38
max		-2,5				-1,25	

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	b
z		2,5		1,25	12,5		310
f_3		0,25		-0,125	-0,25	1	21
x_3		-1	1	-0,5	1		-4
x_1	1	0,875		0,188	-0,125		6,5
max		-2,5		-2,5			

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	b
z			2,5	0	15		300
f_3			0,25	-0,25	0	1	20
x_2		1	-1	0,5	-1		4
x_1	1		0,875	-0,25	0,75		3

Análise de Sensibilidade

<u>**Mudanças em coeficientes do lado direito**</u>

Alterar o lado direito não afeta as condições de otimalidade da solução, **mas pode afetar a viabilidade da solução**.

Enquanto que o lado direito de cada restrição no quadro ótimo permanecer não negativo, a base atual permanece viável e ótima.

Se algum elemento do lado direito for negativo, a base atual será inviável, sendo então necessário usar o método dual simplex para procurar viabilidade primal.

Análise de Sensibilidade

Adicionando uma nova atividade – novo produto com preço de venda definido

Suponha que a empresa está considerando fabricar banquinhos.

Um banquinho é vendido por R$ 15,00 e requer uma placa de madeira, 1 hora de acabamento, e uma hora de carpintaria. Caso a empresa fabricar qualquer fezes?

Novo pl

$$\text{maximize} \quad z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4$$

sujeito a

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + 1x_4 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1x_4 \leq 20$$
$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 + 1x_4 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Como resolver o problema modificado a partir do quadro ótimo?

Análise de Sensibilidade

Adicionando uma nova atividade – novo produto com preço de venda definido

Precisamos verificar se x_4 entra na base. $(z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4)$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A_4} = B^{-1}A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_4} = -c_4 - c_B B^{-1}A_4 = -15 - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c_4} = -15 - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

Conclusão: como, $\overline{c_4} > 0$, x_4 não entra na base e portanto o produto não será fabricado.

Análise de Sensibilidade

<u>Adicionando uma nova atividade – novo produto sem preço de venda definido</u>

Suponha que a empresa determinar o preço de venda de cada banquinho para que a produção seja efetuada/lucarativa. $(z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + c_4x_4)$

$$\overline{c_4} = -c_4 - c_B B^{-1} A_4 = -c_4 - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\overline{c_4} = -c_4 - [0,-20,-60] \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} < 0$$

$$\overline{c_4} = -c_4 + 20 < 0 \Rightarrow -c_4 < -20 \Rightarrow c_4 > 20$$

<u>Conclusão</u>: para qualquer $c_4 > 20$, x_4 entrará na base e o produto (banquinhos) será fabricado.