II. Programação Linear (PL)

<u>Dualidade</u> – revisão e interpretação econômica

Seja o pl

$$\begin{aligned} &\max Z = 3x_1 + 5x_2 \\ &sa \qquad x_1 \le 4 \\ &\qquad\quad 2x_2 \le 12 \\ &\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Formulação do Problema de PL em termos de Atividades.
Exemplo Protótipo.

Atividade Principal
P_1*- *produção de portas por minuto

Atividade Auxiliar
P_3*- *não utilização da capacidade de produção da seção 1 por minuto

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + F_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$x_1,\ x_2,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \geq 0$$

Atividade Auxiliar
P_5*- *não utilização da capacidade de produção da seção 3 por minuto

Atividade Auxiliar
P_4*- *não utilização da capacidade de produção da seção 2 por minuto

Atividade Principal
P_2*- *produção de janelas por minuto

As variáveis correspondem aos níveis das atividades

Exemplo Protótipo. Problema Primal. Interpretação Econômica das Variáveis.

variáveis de decisão:

- x_1 - nível de produção de portas por minuto;
- x_2 - nível de produção de janelas por minuto;

unidade de medida: unidade física

variáveis de folga:

- F_1 - capacidade de produção não utilizada na 1ª seção, por minuto;
- F_2 - capacidade de produção não utilizada na 2ª seção, por minuto;
- F_3 - capacidade de produção não utilizada na 3ª seção, por minuto;

unidade de medida: unidade física

função objetivo $\rightarrow$ max:

Maximizar o lucro total por minuto.

unidade de medida: unidade monetária (R$)

Formulação do Problema de PL em termos de Atividades.
Exemplo Protótipo.

$\max Z = 3x_1 + 5x_2$

sa

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\\18\end{pmatrix}$$

$$x_1,\ x_2, F_1, F_2, F_3 \geq 0$$

Solução do Dual

	E_1	E_2	y_1	y_2	y_3	
Base	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z				3/2	1	36
f_1			1	1/3	-1/3	2
x_2		1		1/2	0	6
x_1	1			-1/3	1/3	2

Interpretação Econômica do Problema Dual. Preços Sombras.

o valor da f.o. traduz o valor total atribuído aos recursos

$$\min \quad W = 4\ y_1 + 12\ y_2 + 18\ y_3$$

As variáveis de decisão duais ***y_1 , y_2 , y_3*** *são valorizações unitárias a atribuir a cada recurso e podem ser interpretadas como a contribuição ao lucro total por cada unidade de recurso i utilizada. Estes são* ***preços internos****, também designados como* ***preços sombra***

$$y_1 + 3\,y_3 \geq 3$$

$$2\,y_2 + 2\,y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Interpretação Econômica do Problema Dual. Preços Sombras.

Preço sombra corresponde ao **custo de oportunidade de uma atividade**, que pode ser referido como sendo o seu verdadeiro preço econômico

Na pesquisa operacional, o **preço sombra** é a variação do valor objetivo da solução ótima de um problema de programação linear obtido através do relaxamento da restrição por uma unidade - é a **utilidade marginal** de relaxar a restrição.

Um exemplo **custo de oportunidade**: imagine uma fábrica que produzia 20 cadeiras por mês num mercado que absorvia totalmente esta produção. Diante de uma oportunidade de negócios, esta fábrica resolveu iniciar uma produção de um novo produto: mesas. Porém, ao alocar recursos para tal, descobriu que terá de deixar de produzir 2 cadeiras para suprir a demanda de 2 mesas. O custo de oportunidade está no valor perdido da venda das 2 cadeiras que deixaram de ser fabricadas. http://pt.wikipedia.org/wiki/Custo_de_oportunidade

Interpretação Econômica do Problema Dual. Preços Sombras.

$$\min \quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$sa \quad \begin{array}{rcl} y_1 + 3y_3 & \geq & 3 \\ 2y_2 + 2y_3 & \geq & 5 \\ y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Solução do Primal

	F_1	F_2	F_3	x_1	x_2	
Base	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	b
$-W$	2			2	6	36
y_3	1/3		1	-1/3	0	1
y_2	-1/3	1		1/3	-1/2	3/2

Formulação do Problema de PL em termos de Atividades.
Exemplo Protótipo.

	E_1	E_2	y_1	y_2	y_3	
Base	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z				3/2	1	36
f_1			1	1/3	-1/3	2
x_2		1		1/2	0	6
x_1	1			-1/3	1/3	2

	F_1	F_2	F_3	x_1	x_2	
Base	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	b
$-W$	2			2	6	36
y_3	1/3		1	-1/3	0	1
y_2	-1/3	1		1/3	-1/2	3/2

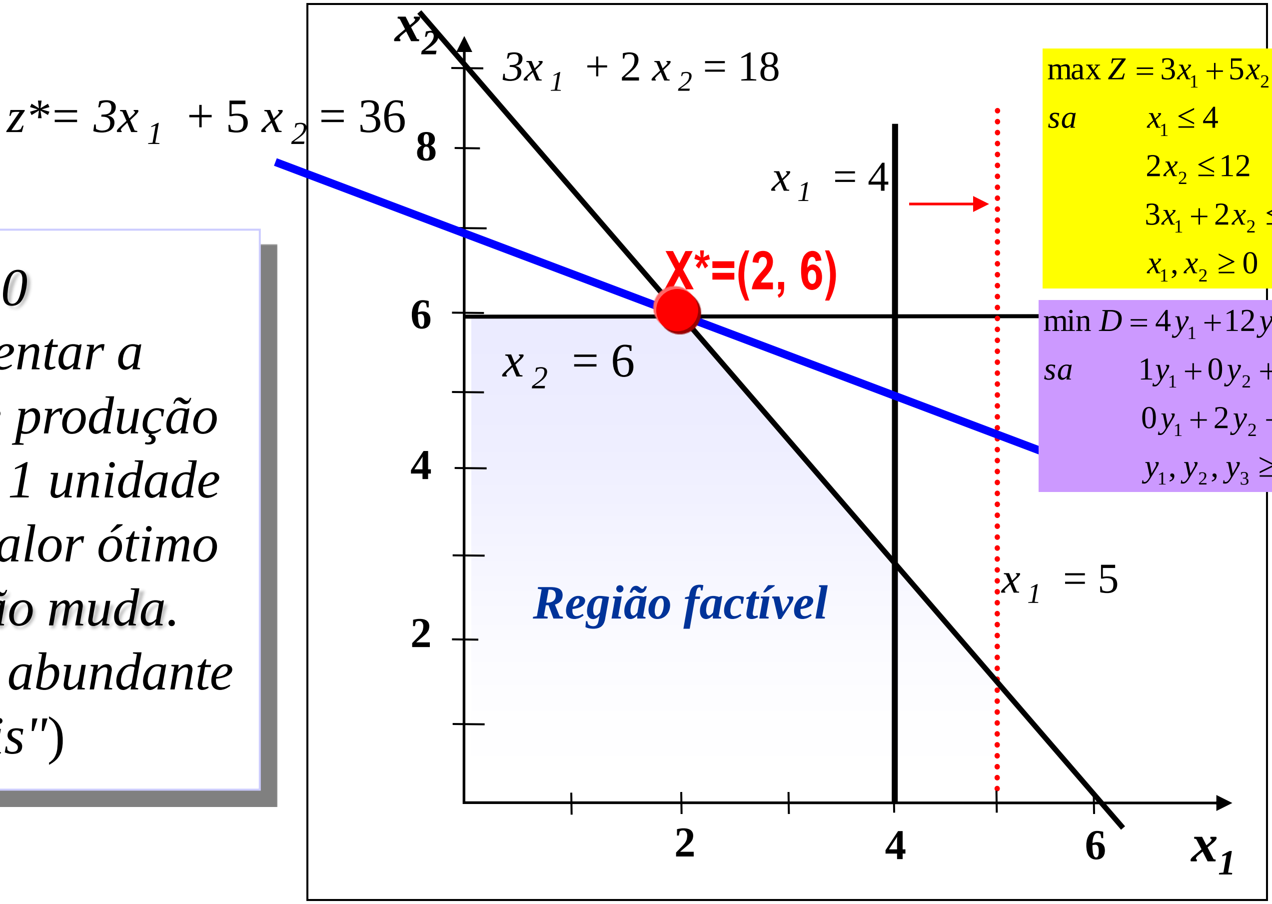
$Z^* = 36$	$W^* = 36$
$x_1^* = 2$	$y_1^* = 0$
$x_2^* = 6$	$y_2^* = 3/2$
$F_1^* = 2$	$y_3^* = 1$
$F_2^* = 0$	$E_1^* = 0$
$F_3^* = 0$	$E_2^* = 0$

Exemplo Protótipo: Recurso 1. Preços Sombras. Representação Gráfica.

$y_1^* = 0$

Se incrementar a capacidade de produção da seção 1 em 1 unidade ($b_1 = 5$) *o valor ótimo* (z*=36) *não muda.*

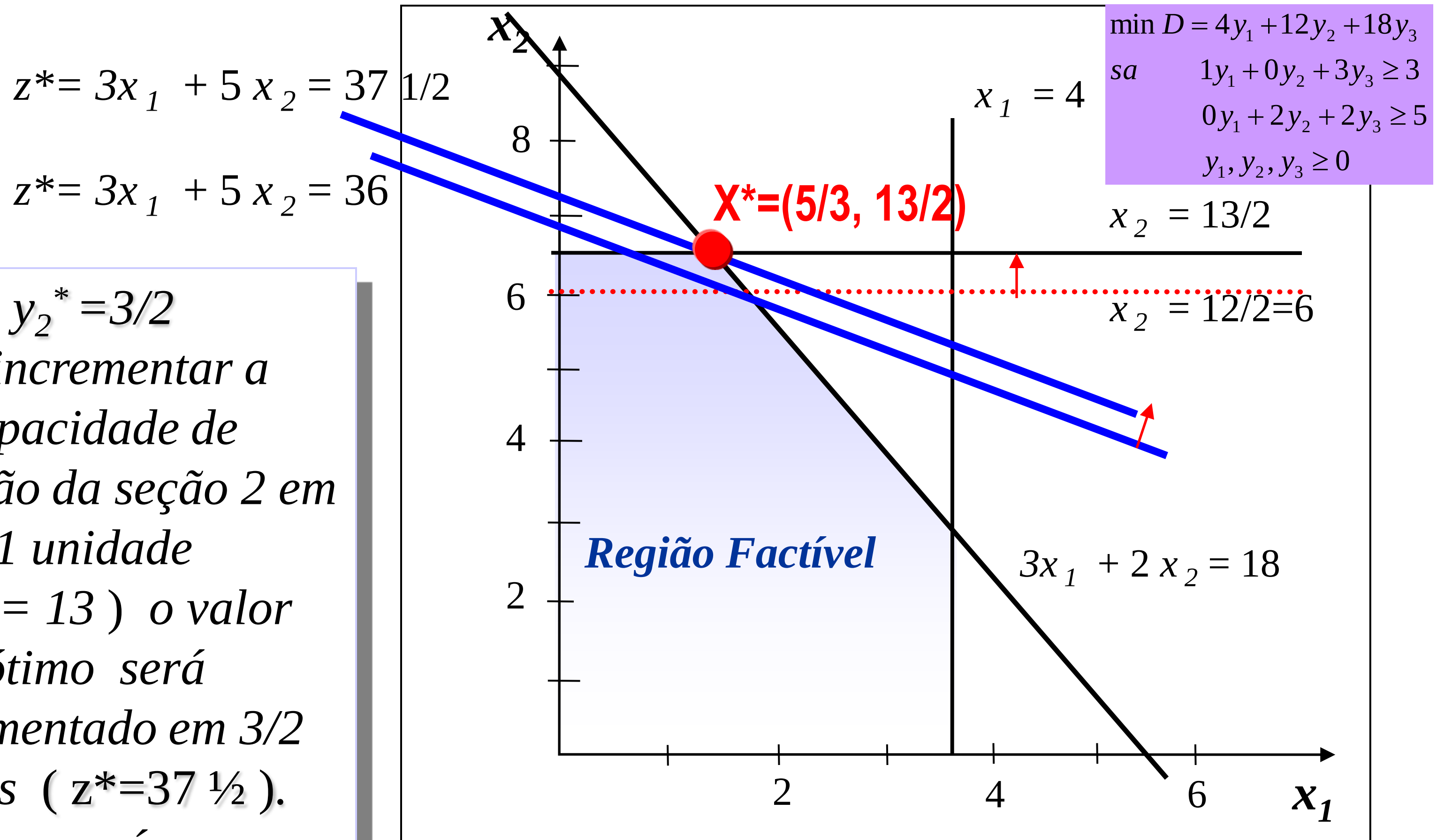
Este recurso é abundante (*"gratis"*)



$$\begin{aligned}
\max Z &= 3x_1 + 5x_2 \\
sa \quad & x_1 \le 4 \quad (y_1) \\
& 2x_2 \le 12 \quad (y_2) \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 18 \quad (y_3) \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min D &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\
sa \quad & 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \ge 3 \\
& 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Exemplo Protótipo: Recurso 2. Preços Sombras. Representação Gráfica.

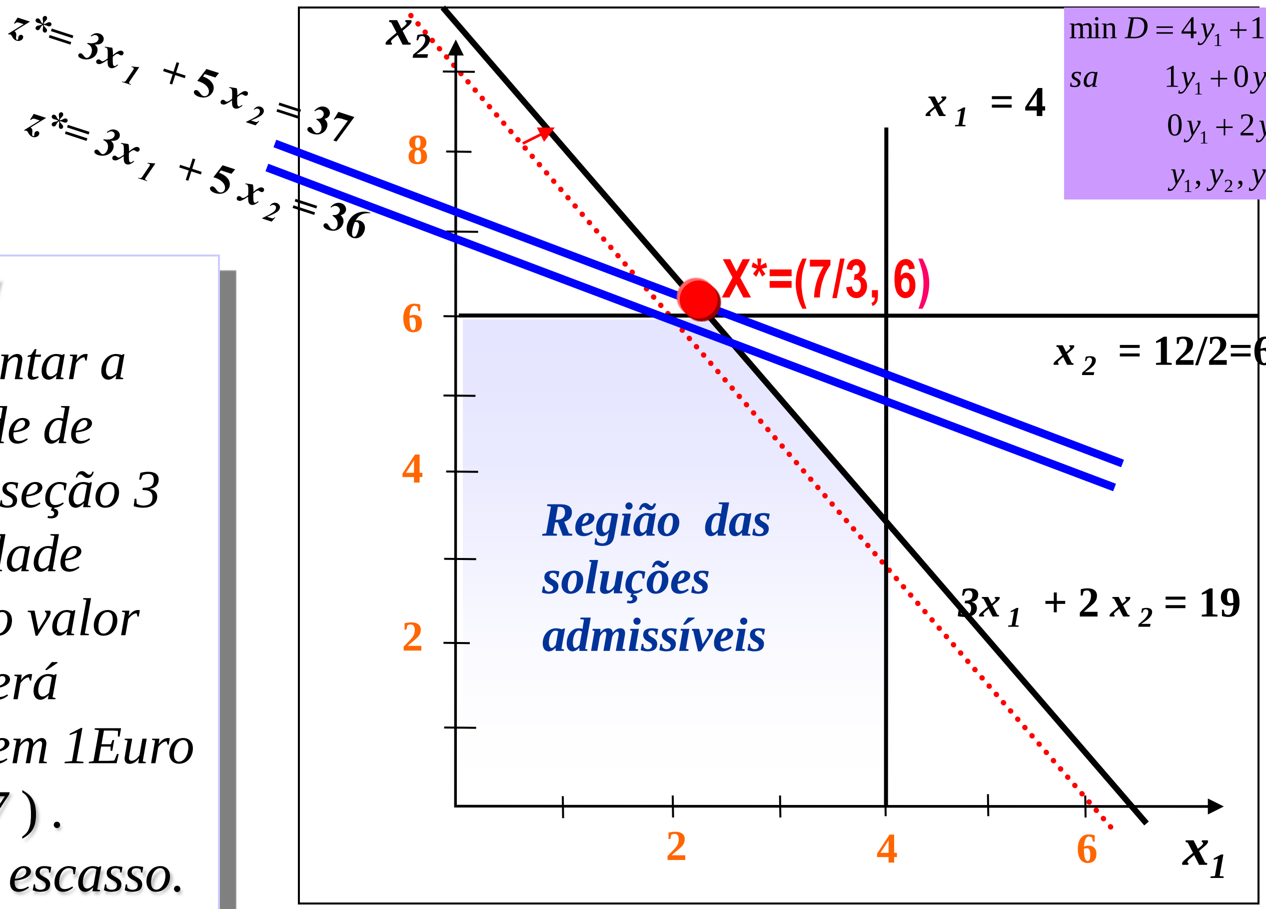


$$
\begin{aligned}
\min D &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\
sa \quad & 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3 \\
& 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$y_2^* = 3/2$

Se incrementar a capacidade de produção da seção 2 em 1 unidade ($b_2 = 13$) o valor ótimo será incrementado em 3/2 Euros (z=37 ½). Este recurso é escasso.*

Exemplo Protótipo. Recurso 3.
Preços Sombras. Representação Gráfica.



$$\min D = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$
$$sa \quad 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3$$
$$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$y_3^* = 1$

Se incrementar a capacidade de produção da seção 3 em 1 unidade ($b_3 = 19$) o valor ótimo será incrementado em 1Euro ($z^*=37$) .

Este recurso é escasso.