UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PESQUISA OPERACIONAL
Dualidade

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Dualidade

A cada problema de programação linear (problema de programação linear **primal**) corresponde um outro (**dual**) formando o <u>par de problemas duais:</u>

pl primal $\longleftrightarrow$ pl dual

Dualidade – contextualização 1

Deseja-se produzir 3 diferentes molhos a partir da mistura de *catchup* e mostarda. A quantidade disponível de *catchup* é 80 unidades e de mostarda é 30 unidades.

Seja o programa linear a seguir que consiste em definir as quantidades ótimas x_1, x_2 e x_3 dos molhos do tipo 1, 2 e 3 que consistem em diferentes misturas do *catchup* e mostarda.

$$
\begin{aligned}
\max\ Z = \quad & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\
s.a \quad & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema da produção pl primal (PP)

Problema de Programação linear **PRIMAL**

Dualidade – contextualização 1

Suponha que um comprador propõe adquirir toda a matéria prima de fábrica, interrompendo a produção:

- Uma unidade de *catchup* custará $y_1 \geq 0$
- Uma unidade de mostarda custará $y_2 \geq 0$

Os valores de compra y_1 e y_2 serão fixados arbitrariamente pelo comprador. Entretanto o dono da fábrica pretende assegurar "certa vantagem" para que não saia no prejuízo.

Qual o preço mínimo de venda destes ingredientes (visão do vendedor)**?**

Dualidade – contextualização 1

$$\max Z = \boxed{10x_1} + 7x_2 + 15x_3$$

$$s.a \quad \boxed{5x_1} + 4x_2 + x_3 \leq 80$$

$$\boxed{2x_1} + 3x_2 + 5x_3 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Para produzir 1 unidade do primeiro molho, usa-se 5 unidades de *catchup* e 2 unidades de mostarda. Esta unidade produzida é vendida por 10 unidades monetárias.

Portanto, vale a pena vender estas 5 unidades de *catchup* e esta 1 unidade de mostarda se o comprador pagar pelo menos 10 unidades monetárias

$$5y_1 + 2y_2 \geq 10$$

Dualidade – contextualização 1

$$
\begin{aligned}
\max\ Z = \quad & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\
s.a \quad & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 80 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

→ **Problema da produção**
pl primal (PP)

<u>"VANTAGEM"</u>

$$
\begin{cases}
5y_1 + 2y_2 \geq 10 \\
4y_1 + 3y_2 \geq 7 \\
y_1 + 5y_2 \geq 15
\end{cases}
$$

Dualidade – contextualização 1

O desembolso do comprador será $D = 80y_1 + 30y_2$

O comprador poderá minimizá-lo manipulando adequadamente os valores unitários das matérias primas y_1 e y_2

Problema do comprador (Dual-PD)

$$
\begin{aligned}
\min\ D = \quad & 80y_1 + 30y_2 \\
s.a \quad & 5y_1 + 2y_2 \geq 10 \\
& 4y_1 + 3y_2 \geq 7 \\
& y_1 + 5y_2 \geq 15 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema da produção ppl dual (PD)

Primal e Dual

$$\begin{aligned} \max\ Z = \quad & 10x_1 + 7x_2 + 15x_3 \\ s.a \quad & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 80 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ D = \quad & 80y_1 + 30y_2 \\ s.a \quad & 5y_1 + 2y_2 \ge 10 \\ & 4y_1 + 3y_2 \ge 7 \\ & y_1 + 5y_2 \ge 15 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & Z(x) = cx \\ \text{s.a} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & D(y) = yb^{\mathrm{T}} \\ \text{s.a} \quad & A^{\mathrm{T}}y \ge c^{\mathrm{T}} \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

ppl **primal** (PP)

ppl **dual** (PD)

Dualidade – contextualização 2

Quer-se consumir quantidades de determinados alimentos de tal forma a satisfazer as necessidades mínimas de nutrientes exigidas a um custo mínimo, problema este ilustrado pelo quadro seguinte.

	Alimentos					Necessidades mínimas de nutrientes (g)
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Proteinas (g)	3	4	5	3	6	42
Sais minerais (g)	2	3	4	3	3	24
Custos (R$)	25	35	50	33	36	

$$
\begin{aligned}
\min\ Z = \quad & 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 36x_5 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema da dieta
pl primal (PP)

Dualidade – contextualização 2

Suponha que um vendedor de pílulas de proteínas e pílulas de sais minerais propõe substituir a dieta de alimentos expressa de acordo com a tabela, por uma dieta de pílulas, com as seguintes condições:

1 - a pílula de proteína (cada uma pesando 1g) custará w_1;
2 - a pílula de sais minerais (cada uma pesando 1g) custará w_2;
3 - os preços w_1 e w_2 serão fixados arbitrariamente;
4 - o vendedor garante que as pílulas terão preços iguais ou mais baratos que qualquer alimento;
5 - o vendedor pretende, é claro, maximizar sua renda de modo a satisfazer a necessidade da dieta.

Qual é o preço máximo de compra destas pílulas (visão do comprador)?

Dualidade – contextualização 2

O ganho do comprador será $D = 42w_1 + 24w_2$

O <u>comprador</u> poderá <u>maximizá-lo</u> manipulando adequadamente os valores unitários das pílulas w_1 e w_2

<u>Problema do vendedor (Dual-PD)</u>

$$\begin{aligned} \max\ D &= 42w_1 + 24w_2 \\ s.a \quad & 3w_1 + 2w_2 \le 25 \\ & 4w_1 + 3w_2 \le 35 \\ & 5w_1 + 4w_2 \le 50 \\ & 3w_1 + 3w_2 \le 33 \\ & 6w_1 + 3w_2 \le 36 \\ & w_1, w_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Problema da dieta
pl dual (PD)

Primal e Dual

$$\min\ Z = 25x_1 + 35x_2 + 50x_3 + 33x_4 + 36x_5$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 \geq 42$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 \geq 24$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\max\ D = 42w_1 + 24w_2$$
$$s.a\quad 3w_1 + 2w_2 \leq 25$$
$$4w_1 + 3w_2 \leq 35$$
$$5w_1 + 4w_2 \leq 50$$
$$3w_1 + 3w_2 \leq 33$$
$$6w_1 + 3w_2 \leq 36$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\min\ Z(x) = cx \\ &\text{s.a}\quad Ax \geq b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\max\ D(w) = wb^{\mathrm{T}} \\ &\text{s.a}\quad A^{\mathrm{T}}w \leq c^{\mathrm{T}} \\ &\qquad\quad w \geq 0 \end{aligned}$$

ppl **primal** (PP)

ppl **dual** (PD)

Dualidade – Propriedades

A cada modelo de pl corresponde um outro modelo, denominado de dual. Por exemplo:

$$
\begin{array}{llllll}
\max Z = & c_1x_1 + & \ldots + & c_nx_n & \\
\text{s.a} & a_{11}x_1 + & \ldots + & a_{1n}x_n & \le b_1 \\
 & a_{21}x_1 + & \ldots + & a_{2n}x_n & \le b_2 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + & \ldots + & a_{mn}x_n & \le b_m \\
 & x_1 \ge 0 & & x_n \ge 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\min D = & b_1y_1 + & \ldots + & b_my_m & \\
\text{s.a} & a_{11}y_1 + & \ldots + & a_{m1}y_m & \ge c_1 \\
 & a_{12}y_1 + & \ldots + & a_{m2}y_m + & \ge c_2 \\
 & & & & \\
 & a_{1n}y_1 + & \ldots + & a_{mn}y_m & \ge c_n \\
 & y_1 \ge 0 & & y_m \ge 0 &
\end{array}
$$

Observações:

- A função objetivo do dual é de minimização, e a do primal é de maximização;
- O elementos do vetor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (rhs) do primal formam a função objetivo do dual;
- Os elementos do vetor $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ do primal é o vetor rhs (b) do dual;
- As restrições do dual são do tipo $\geq$, e do primal são do tipo $\leq$;
- O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
- O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal;
- A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do dual.

Relação entre Primal e Dual

Primal (max)	$\rightarrow$	**Dual** (min)
restrição k é $\leq$		$y_k \geq 0$
restrição k é $=$		y_k livre
restrição k é $\geq$		$y_k \leq 0$
$x_p \geq 0$		restrição p é $\geq$
x_p é livre		restrição p é $=$
$x_p \leq 0$		restrição p é $\leq$
Dual (max)	$\leftarrow$	**Primal** (min)

Dualidade – exemplos

Primal:
$$\begin{aligned} \max Z = \ & 2x_1 && +3x_2 \\ s.a \quad & -x_1 && +2x_2 \le 4 \\ & x_1 && +x_2 \le 6 \\ & x_1, && x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Dual:
$$\begin{aligned} \min D = \ & 4y_1 && +6y_2 \\ s.a \quad & -y_1 && +y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 && +y_2 \ge 3 \\ & y_1, && y_1 \ge 0 \end{aligned}$$

Primal:
$$\begin{aligned} \max Z = \ & 2x_1 && +3x_2 \\ s.a \quad & -x_1 && +2x_2 \le 4 \\ & x_1 && +x_2 = 6 \\ & x_1, && x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dual:
$$\begin{aligned} \min D = \ & 4y_1 && +6y_2 \\ s.a \quad & -y_1 && +y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 && +y_2 \ge 3 \\ & && y_1 \ge 0; \quad y_2 \text{ livre} \end{aligned}$$

Primal:
$$\begin{aligned} \max Z = \ & 2x_1 && +3x_2 \\ s.a \quad & -x_1 && +2x_2 \le 4 \\ & x_1 && -3x_2 \ge 9 \\ & x_1 && +x_2 \le 6 \\ & x_1, && x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Dual:
$$\begin{aligned} \min D = \ & 4y_1 && +9y_2 && 6y_3 \\ s.a \quad & -y_1 && +y_2 && +y_3 \ge 2 \\ & 2y_1 && -3y_2 && y_2 \ge 3 \\ & y_1, && y_3 \ge 0 && y_2 \le 0 \end{aligned}$$

Primal:
$$\begin{aligned} \max Z = \ & 2x_1 && +3x_2 \\ s.a \quad & -x_1 && +2x_2 \le 4 \\ & x_1 && +x_2 \le 6 \\ & && x_1 \ge 0; \quad x_2 \text{ livre} \end{aligned}$$

Dual:
$$\begin{aligned} \min D = \ & 4y_1 && +6y_2 \\ s.a \quad & -y_1 && +y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 && +y_2 = 3 \\ & y_1, && y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Primal (max)	→	**Dual** (min)
restrição *k* é ≤		$y_k \ge 0$
restrição *k* é =		y_k livre
restrição *k* é ≥		$y_k \le 0$
$x_p \ge 0$		restrição *p* é ≥
x_p é livre		restrição *p* é =
$x_p \le 0$		restrição *p* é ≤
Dual (max)	←	**Primal** (min)

TEOREMAS

Teorema Fraco da Dualidade

Seja x um valor viável do (PP), isto é:

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Seja y um valor viável de (PD), isto é:

$$A^T y \geq c^T$$
$$y \geq 0$$

Então:

$$Z(x) \leq D(y)$$

continua ...

$b^T y - c^T x$ é o gap da dualidade associado a x e y viáveis primal e dual

Teorema Fraco da Dualidade

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{ll} \max & Z = c^T x \\ \text{sa} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & D = b^T y \\ \text{sa} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Teorema: Se x e y são soluções viáveis para o par de problemas primal e dual, então $Z \leq D$.

Dem.: $Z = c^T x \leq \left(A^T y\right)^T x = y^T Ax \leq y^T b = b^T y \Rightarrow Z \leq D$

Corolário

Se x^* e y^* são soluções viáveis de (PP) e (PD) tal que

$$Z(x^*) = c^T x^* = y^* b^T = D(y^*)$$

então x^* e y^* são soluções ótimas do (PP) e (PD).

continua ...

Corolário

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{llcll} \max & Z = c^T x & \qquad & \min & D = b^T y \\ \text{sa} & Ax \leq b & & \text{sa} & A^T y \geq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0 \end{array}$$

Corolário: Se x^* e y^* são soluções viáveis para o par de pl's primal e dual, tais que $Z^* = D^*$, então elas constituem soluções ótimas.

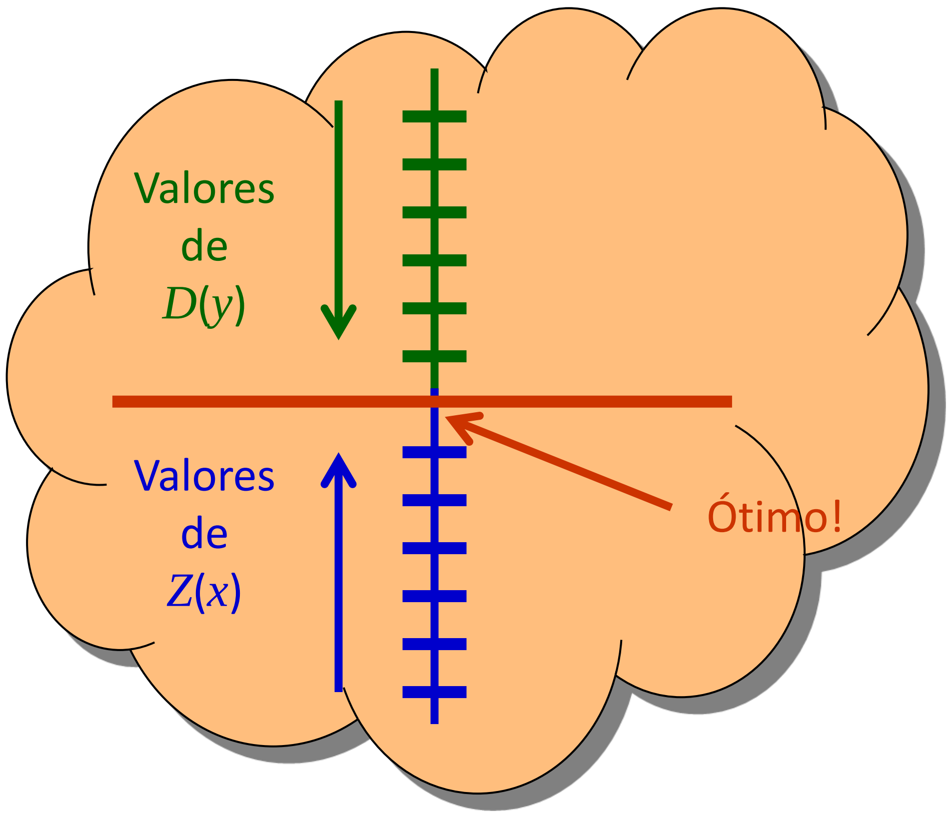
Dem.: Pela definição de solução ótima sabe-se que, se x^* e y^* são soluções ótimas, então $Z \leq Z^*$ e $D \geq D^*$. Por hipótese tem-se $Z^* = c^T x^* = b^T y^* = D^*$. Se y é uma solução viável do dual, do teorema anterior tem-se que $c^T x^* \leq b^T y$ e portanto (devido a hipótese) $b^T y^* \leq b^T y$. A demonstração é semelhante para uma solução viável do primal.

Assim para a soluções ótimas x^* e y^* do primal e dual temos

$$Z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = D^*$$

- PL primal é um problema de maximização
- PL dual é um problema de minimização

- O método simplex aplicado a (PP) evolui de uma solução básica viável para outra solução básica viável sempre no sentido de aumentar a função objetivo $Z(x)$



$\boxed{D(y)}$ Método simplex Aplicado a (PD)

$\geq$

$\boxed{Z(x)}$ Método simplex Aplicado a (PP)

- O método simplex aplicado a (PD) evolui uma de solução básica viável para outra solução básica viável sempre no sentido de diminuir a função objetivo D(y)

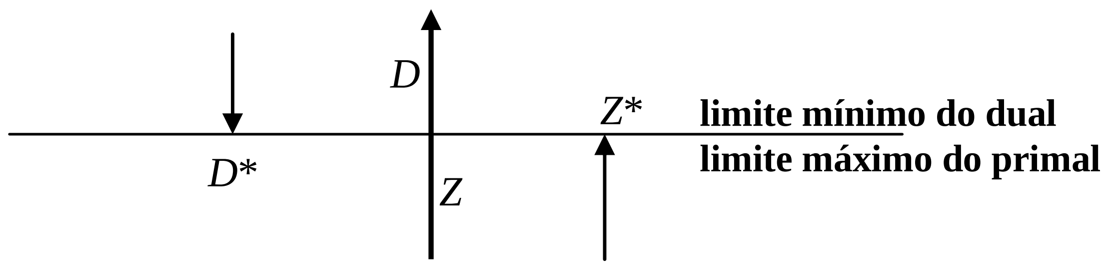
continua ...

Corolário

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{lll} \max & Z = c^T x \\ sa & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} \min & D = b^T y \\ sa & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Corolário
Se tanto o primal como o problema dual admitem soluções factíveis, então ambos têm



soluções ótimas tais que *Z*=D**.

Resultados importantes:

i) Se o primal tende para o infinito, então o dual não tem solução viável;

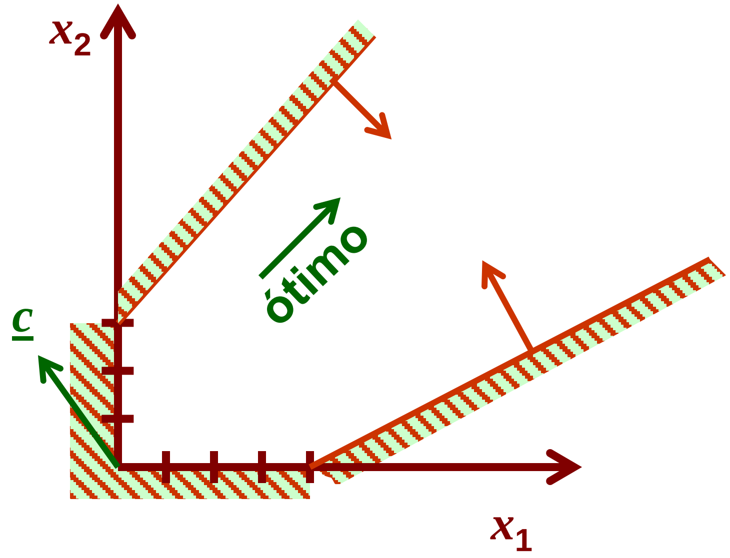
ii) Se o dual tende para menos infinito, então o primal não tem solução viável;

iii) É possível que ambos não tenham solução viável.

Corolário

Se um dos problemas tem valor ilimitado, então seu dual será inviável.

Exemplo

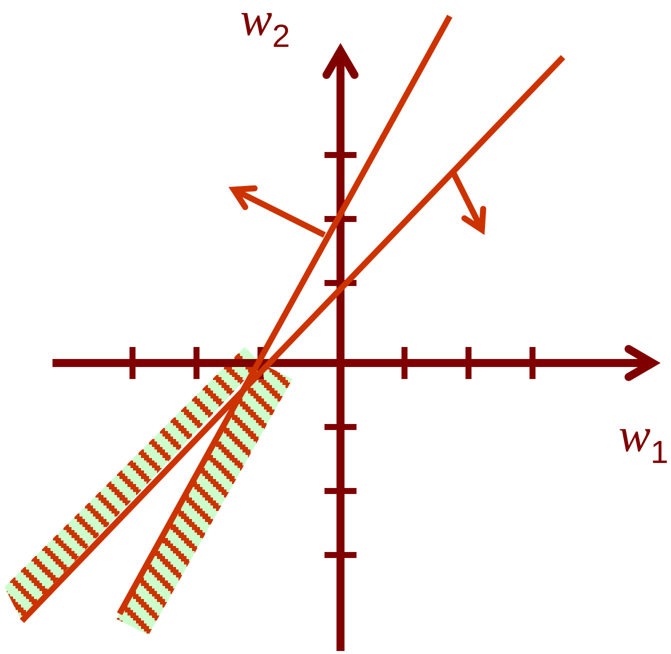


(PP)

$$
\begin{array}{ll}
\max & Z = -x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

continua ...

... continuação



(PD)

$$\begin{array}{ll} \min & D = 4\,w_1 + 3\,w_2 \\ \text{s.a} & w_1 - w_2 \geq -1 \\ & -2w_1 + w_2 \geq 2 \\ & w_1 \geq 0,\; w_2 \geq 0 \end{array}$$

<u>OUTRO RESULTADO</u>: Se um dos problemas do par primal-dual tem solução ótima finita,o outro também terá.

Teorema Forte da Dualidade

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{ll} \min & Z = c^T x \\ \text{sa} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & D = b^T y \\ \text{sa} & A^T y \leq c \\ & y \text{ livre} \end{array}$$

Seja $A = [N\ B]$ (somente B quadrada) e tal que $\exists B^{-1}$.

$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \ (\text{solução geral})$$

$$\bar{Z} = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \Rightarrow \bar{Z} = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \Rightarrow \bar{Z} = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$$

Seja x^* a solução ótima viável do problema primal. Então $(x_B^*, x_N^*) = (B^{-1}b, 0)$, e pode-se escrever

$$\bar{Z}^* = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N + 0^T x_B$$

continua ...

Teorema Forte da Dualidade

Teorema
Seja $X \neq \emptyset$ o conjunto das soluções viáveis do primal, e que $Z(x)$ $\exists$ e é finito/limitado. Então $\exists\, x^* \in X$ e $y^* \in Y$ tal que $c^T x^* = b^T y^*$.

Dem.: Vamos derivar uma solução para o dual a partir da solução ótima do primal.

Seja $y^T = c_B^T B^{-1}$. Desejamos provar que y^T é solução ótima do dual.

i) <u>y é uma solução viável do dual</u>

- $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - y^T N \Rightarrow \left(c_N^T - y^T N\right)^T \geq 0$ (da otimalidade de x^*).
  $\Rightarrow c_N - \left(y^T N\right)^T \geq 0 \Rightarrow c_N - N^T y \geq 0 \Rightarrow N^T y \leq c_N$ Portanto $\boxed{N^T y \leq c_N}$
- $\bar{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = c_B^T - \left(c_B^T B^{-1}\right) B = c_B^T - y^T B = 0 \Rightarrow y^T B \leq c_B^T \Rightarrow \left(c_B^T - y^T B\right)^T = 0$
  $\Rightarrow c_B - \left(y^T B\right)^T = 0 \Rightarrow c_B - B^T y = 0 \Rightarrow B^T y \leq c_B$. Portanto $\boxed{B^T y \leq c_B^T}$.

ii) <u>y é uma solução ótima do dual</u>

$y^T b = \left(c_B^T B^{-1}\right) b = c_B^T \left(B^{-1} b\right) = c_B^T x_B^* = c^T x^*$. Portanto $y = y^*$.

TEOREMA DA FOLGA COMPLEMENTAR

Quadro inicial

Base	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	b	
Z	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0	(0)
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1	(1)
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2	(2)
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m	(m)

Quadro ótimo

Base	x_1 ... x_j ... x_n	x_{n+1} x_{n+i} ... x_{n+m}	b	
Z	$\bar{c}_j = p_j - c_j$	$\bar{c}_{n+i} = p_{n+i}$		(0)
				(1)
				(2)
				...
				(m)

continua ...

... continuação

TEOREMA DA FOLGA COMPLEMENTAR

(**a**) O valor ótimo da variável y_i do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável de folga x_{n+i} do primal, isto é,

$$y_i^* = p_{n+i}^*, \ (i =,1,2,..., m)$$

(**b**) O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} do dual é igual ao coeficiente na linha **(0)** do quadro ótimo da variável x_j do primal, isto é,

$$y_{m+j}^* = p_j^* - c_j, \ (j = 1,2,..., n)$$

continua ...

... continuação

TEOREMA DA FOLGA COMPLEMENTAR

Sejam os problemas primal e dual.

$$\begin{array}{lll} \min & Z = c^T x \\ \text{sa} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \max & D = b^T y \\ \text{sa} & A^T y \leq c \\ & y \text{ livre} \end{array}$$

O Teorema Forte da Dualidade nos diz que a otimalidade é equivalente à igualdade no Teorema da Dualidade Fraca. Isto é, x resolve Primal-P e y resolve Dual-D se e somente se (x, y) é um par viável para o primal e dual e

$$c^T x = b^T y \Rightarrow c^T x = (Ax)^T y = b^T y \Rightarrow \boxed{c^T x = y^T Ax = b^T y}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Examinemos as consequências desta equivalência. Observe que a equação $c^T x = y^T Ax$ implica que

$$y^T Ax = c^T x \Rightarrow \left(y^T Ax - c^T x\right)^T = 0 \Rightarrow (Ax)^T y - x^T c = 0 \Rightarrow x^T A^T y - x^T c = 0 \Rightarrow x^T\left(A^T y - c\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Em adição, a viabilidade do primal e do dual implica que

$$x_j \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0 \text{, para j=1,2,...,n.}$$

Da demonstração do Teorema Fraco da Dualidade temos $Z = c^T x \leq \left(A^T y\right)^T x = y^T Ax \leq y^T b = b^T y$. Do corolário do Teorema Fraco da Dualidade temos que se x e y são soluções ótimas, então ocorre a igualdade, ou seja, $c^T x = y^T Ax = b^T y$.

continua ...

... continuação

TEOREMA DA FOLGA COMPLEMENTAR

Então

$$x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0 \text{, para j=1,2,...,n,}$$

e portanto, a única maneira de manter (2) é se

$$x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j = 0 \text{, para j=1,2,...,n,}$$

ou equivalentemente

$$x_j = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \text{, para j=1,2,...,n. } \ldots\ldots (3)$$

De forma similar do Teorema Forte da Dualidde e do Teorema Fraco da Dualidade, temos

$$c^T x = b^T y \Rightarrow c^T x = y^T A x = b^T y \Rightarrow y^T A x = b^T y \Rightarrow b^T y - y^T A x = 0 \Rightarrow y^T b - y^T (Ax) = 0$$

$$y^T (b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0$$

Novamente, da viabilidade do dual e do primal, temos

$$y_i \geq 0 \text{ e } 0 \leq b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \text{, para i=1,2,...,m,}$$

e portanto deveremos ter

$$y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = 0 \text{, para i=1,2,...,m,}$$

ou de forma equivalente

continua ...

... continuação

TEOREMA DA FOLGA COMPLEMENTAR

$y_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$, para i=1,2,...,m. .... (4)

Combinando (3) e (4), pode-se enunciar o Teorema da Folga Complementar.

Teorema: O vetor $x \in R^n$ resolve o Primal-P e o vetor $y \in R^m$ resolve o Dual-D se e somente se x é viável para P e y é viável para D e:

i) ou $x_j = 0$ ou $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, para j=1,2,...,n; e

ii) ou $y_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$, para i=1,2,...,m.

Corolário: O vetor $x \in R^n$ resolve o primal se e somente se x é viável para P e existir um vetor $y \in R^m$ viável para D e tal que

i) para cada i ∈ {1, 2, ..., m}, se $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i < b_i$, então $y_i = 0$; e

ii) para cada j ∈ {1, 2, ..., n}, se $x_j > 0$, então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$.

Da demonstração do Teorema Fraco da Dualidade temos $Z = c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T A x \leq y^T b = b^T y$. Do corolário do Teorema Fraco da Dualidade temos que se x e y são soluções ótimas, então ocorre a igualdade, ou seja, $c^T x = y^T A x = b^T y$.

continua ...

... continuação

Uso do **teorema da folga complementar** para determinar a solução ótima do dual a partir da solução ótima do primal (e vice-versa).

$$\begin{array}{ll} \max\ Z = & 10x_1 + 7x_2 + 14x_3 \\ s.a & 5x_1 + 4x_2 + x_3 \le 85 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\ D = & 85y_1 + 30y_2 \\ s.a & 5y_1 + 2y_2 \ge 10 \\ & 4y_1 + 3y_2 \ge 7 \\ & y_1 + 5y_2 \ge 14 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

	E_1*	E_2*	E_3*	y_1*	y_2*	
Primal	x_1	x_2	x_3	F1	F2	*b*
*Z**	0	8	11	0	5	150
F_1*	0	-3,5	-11,5	1	-2,5	10
x_1*	1	1,5	2,5	0	0,5	15

	F_1*	F_2*	x_1*	x_2*	x_3*	
Dual	y_1	y_2	E_1	E_2	E_3	*b*
D	10	0	15	0	0	-150
E3*	11,5	0	-2,5	0	0	11
y_2*	2,5	1	-0,5	0	0	5
E2*	3,5	0	-1,5	1	0	8

*D**=150
y_1*=0
y_2*=5
E_1*=0
E_2*=8
E_3*=11

*Z**=150
x_1*=15
x_2*=0
x_3*=0
F_1*=10
F_2*=0