PROGRAMAÇÃO LINEAR

Modelagem/Formulação

Prof. Volmir Wilhelm

Curitiba, Paraná, Brasil

Programação Linear

Principais etapas

- Definição do problema
- Construção do modelo –> **modelagem/formulação**
- Solução do modelo –> **simplex**
- Validação do modelo
- Implementação da solução
- Avaliação final

Formulação - Programa Linear-PL

Etapas para a modelagem/formulação de um programa linear

- Entenda o problema
- Descreva o objetivo
- Defina as variáveis de decisão
- Escreva a função objetivo
- Descreva as restrições
- Escreva as restrições em termos das variáveis de decisão e dicione as restrições de não-negatividade

Formulação - Programa Linear-PL

Etapas para a modelagem/formulação de um programa linear

i. Variáveis de decisão

ii. Função objetivo

iii. Restrições

Formulação - Programa Linear-PL

- Maximizar ou minimizar uma função linear
- Sujeito a um conjunto de restrições lineares (igualdades ou desigualdades)
- Variáveis reais que podem assumir "qualquer" valor

Formulação - Exemplo 1

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

Entenda o problema; Descreva o objetivo; Defina as variáveis de decisão, Escreva a função objetivo; Escreva as restrições em termos das variáveis de decisão; Adicione as restrições de não-negatividade

Entendendo o problema

	Cadeiras	Poltronas	Camarotes
Preço de Compra	R$ 8,00	R$ 15,00	R$ 100,00
Conforto	5	7	20

→ Gasto: R$ 1200,00 (máximo)
→ Quantos assentos comprar: 40 (pelo menos)

Descrevendo o objetivo

Maximixar o conforto -> conforto depende dos assentos -> descobrir quanto de cada tipo de assento comprar

Definindo nas variáveis de decisão

x_cadeiras: quantidade de cadeiras a ser comprado
x_poltronas: quantidade de poltronas a ser comprado
x_camarote: quantidade de camarotes a ser comprado

Formulação - Exemplo 1

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

Entenda o problema; Descreva o objetivo; Defina as variáveis de decisão, Escreva a função objetivo; Escreva as restrições em termos das variáveis de decisão; Adicione as restrições de não-negatividade

	Cadeiras	Poltronas	Camarotes
Preço de Compra	R$ 8,00	R$ 15,00	R$ 100,00
Conforto	5	7	20

→ Gasto: R$ 1200,00 (máximo)
→ Quantos assentos comprar: 40 (pelo menos)

Definindo nas variáveis

x_cadeiras: quantidade de cadeiras a ser comprado
x_poltronas: quantidade de poltronas a ser comprado
x_camarote: quantidade de camarotes a ser comprado

Escrevendo a função objetivo

C(x_cadeiras, x_poltronas, x_camarotes) = C = 5x_cadeiras + 7x_poltronas + 15x_camarotes

Descrevendo e escrevendo as restrições em função das variáveis

Quantidade que Guilherme pode gastar: 8x_cadeiras + 15x_poltronas + 100x_camarotes ≤ 1200
Quantidade de assentos que Gui precisa comprar : x_cadeiras + x_poltronas + x_camarotes ≥ 40

Formulação - Exemplo 1

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

Entenda o problema; Descreva o objetivo; Defina as variáveis de decisão, Escreva a função objetivo; Escreva as restrições em termos das variáveis de decisão; Adicione as restrições de não-negatividade

Adicionando as restrições de não-negatividade das variáveis

x_cadeiras, x_poltronas, x_camarotes $\geq$ 0

Programa Linear-pl

maximize	C=5x_cadeiras	+ 7x_poltronas	+	15x_camarotes		
sujeito a	8x_cadeiras	+ 15x_poltronas	+	100x_camarotes	$\leq$	1200
	x_cadeiras	+ x_poltronas	+	x_camarotes	$\geq$	40
	x_cadeiras,	x_poltronas,		x_camarotes	$\geq$	0

Resolução de Programas Lineares

Resolução?

Resolução de Programas Lineares
Linguagens e Solvers

https://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Linear_Programming_Kit

Modeling *tools*	AIMMS, **AMPL** , APMonitor, ECLiPSe-CLP, GEKKO, GAMS, GNU MathProg, JuMP, LINDO, OPL, Mathematica, OptimJ, PuLP, Pyomo, TOMLAB, Xpress Mosel, ZIMPL
LP, MILP *solvers*	APOPT, ANTIGONE, Artelys Knitro, BCP, CLP, CBC, CPLEX, FortMP, GCG, GLOP, GLPK/GLPSOL, LINDO, **Lp_solve**, LOQO, Mathematica, MINOS, MINTO, MOSEK, NAG, SCIP SoPlex, Octeract Engine, SYMPHONY, Xpress , Optimizer, GUROBI

Resolução de Programas Lineares
Solver e Linguagens

SOLVER DO EXCEL
https://www.youtube.com/watch?v=pzYnuq3fEQA
https://www.youtube.com/watch?v=qII415B86yM
https://www.youtube.com/watch?v=LLFw21bNLJM

Solver LpSolve IDE
https://www.youtube.com/watch?v=sWhYRauuvEA
https://www.youtube.com/watch?v=NRU3bIk06Qk
https://www.youtube.com/watch?v=GnuDLvnFKtM

AMPL (*A Mathematical Programming Language*)
https://ampl.com/try-ampl/download-a-free-demo/
https://www.youtube.com/watch?v=-yzrc6BVYTk
https://www.youtube.com/watch?v=hrqsflMu4z8
https://www.youtube.com/watch?v=6XBoPbfsk_M

Resolução de Programas Lineares na nossa disciplina

1. Ativar o solver do Excel (link)

2. Baixar o LpSolve IDE (link) e instalar

3. Baixar demo do AMPL IDE (link win32, link win64) e descompactar

4. Baixar o LpSolve a ser usado com AMPL (link) e descompactar

5. Adicionar o arquivo lpsolve.exe no AMPL IDE - *"To make this possible, a driver program is needed: lpsolve(.exe). This program must be put in the AMPL directory and AMPL can call the lpsolve solver. That is all."* (lpsolve.exe baixado no item 4.)

Formulação - Exemplo 1

Resolução usando Solver do Excel

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximize} & C=5x\_cadeiras & + & 7x\_poltronas & + & 15x\_camarotes \\
\text{sujeito a} & 8x\_cadeiras & + & 15x\_poltronas & + & 100x\_camarotes \leq 1200 \\
 & x\_cadeiras & + & x\_poltronas & + & x\_camarotes \geq 40 \\
 & x\_cadeiras, & & x\_poltronas, & & x\_camarotes \geq 0
\end{array}
$$

Variáveis						
Função Objetivo	5	7	15	0		
Restrição de R$	8	15	100	0	<=	1200
Restrição de Assentos	1	1	1	0	=>	40

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
E2	Função Objetivo	0	750

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
B1	x_cadeiras	150	0	5	1E+30	1,266666667
C1	x_poltronas	0	-2,375	7	2,375	1E+30
D1	x_camarote	0	-47,5	15	47,5	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
E3	Restrição de R$	1200	0,625	1200	1E+30	880
E4	Restrição de Assentos	150	0	40	110	1E+30

- Variável básica
- Limites dos coeficientes da função objetivo
- Limites dos valores de b
- Folgas
- Excessos

Formulação - Exemplo 1

Resolução usando LpSolve

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

$$
\begin{array}{llllll}
\text{maximize} & C=5x\_cadeiras & + & 7x\_poltronas & + & 15x\_camarotes \\
\text{sujeito a} & 8x\_cadeiras & + & 15x\_poltronas & + & 100x\_camarotes \leq 1200 \\
 & x\_cadeiras & + & x\_poltronas & + & x\_camarotes \geq 40 \\
 & x\_cadeiras, & & x\_poltronas, & & x\_camarotes \geq 0
\end{array}
$$

```
/* Objective function */
max: -5 x_cadeiras +7 x_poltronas +15 x_camarotes;

/* Constraints */
Restricao_Dinheiro: -8 x_cadeiras +15 x_poltronas +100 x_camarotes <= 1200;
Restricao_Assentos: -x_cadeiras +x_poltronas +x_camarotes >= 40;

/* Variable Bounds */
```

Variables	result
	750
x_cadeiras	150
x_poltronas	0
x_camarotes	0

Variables	from	till
objective	750	750
x_cadeiras	3,73333333333333	+inf
x_poltronas	-inf	9,375
x_camarotes	-inf	62,5

Variables	value
objective	750
x_poltronas	-2,375
x_camarotes	-47,5
x_cadeiras	0
Restricao_Dinheiro	0,625
Restricao_Assentos	0

- Variável básica
- Limites dos coef. na função objetivo
- Limites dos valores de b
- Folgas
- Excessos

Formulação - Exemplo 1

$$\begin{array}{llllllll}
\text{maximize} & C=5x_cadeiras & + & 7x_poltronas & + & 15x_camarotes & & \\
\text{sujeito a} & 8x_cadeiras & + & 15x_poltronas & + & 100x_camarotes & \leq & 1200 \\
 & x_cadeiras & + & x_poltronas & + & x_camarotes & \geq & 40 \\
 & x_cadeiras, & & x_poltronas, & & x_camarotes & \geq & 0
\end{array}$$

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
B1	x_cadeiras	150	0	5	1E+30	1,266666667
C1	x_poltronas	0	-2,375	7	2,375	1E+30
D1	x_camarote	0	-47,5	15	47,5	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
E3	Restrição de R$	1200	0,625	1200	1E+30	880
E4	Restrição de Assentos	150	0	40	110	1E+30

Comparação das respostas.

Variables	result
	750
x_cadeiras	150
x_poltronas	0
x_camarotes	0

Variables	from	till
objective	750	750
x_cadeiras	3,73333333333333	+inf
x_poltronas	-inf	9,375
x_camarotes	-inf	62,5

Variables	value
objective	750
x_poltronas	-2,375
x_camarotes	-47,5
x_cadeiras	0
Restricao_Dinheiro	0,625
Restricao_Assentos	0

Formulação - Exemplo 1

Resolução usando linguagem AMPL e diferentes Solvers

Num centro de convenções o espectador pode adquirir ingressos que dão direito a assento em cadeira ao custo de R$ 8,00, ou em poltrona ao custo de R$ 15,00. O espectador também pode comprar assento em camarote ao valor de R$ 100,00. Considere que o conforto de cada tipo de assento é assim mensurado: 5 para cadeira, 7 para poltrona e 20 para camarote. Sabendo que **Guilherme Henrique** tem disponível R$ 1.200,00 para comprar pelo menos 40 ingressos, quantos assentos de cada tipo comprou considerando que ele quer maximizar o conforto?

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & C = 5x\_cadeiras + 7x\_poltronas + 15x\_camarotes \\
\text{sujeito a } & 8x\_cadeiras + 15x\_poltronas + 100x\_camarotes \leq 1200 \\
& x\_cadeiras + x\_poltronas + x\_camarotes \geq 40 \\
& x\_cadeiras,\ x\_poltronas,\ x\_camarotes \geq 0
\end{aligned}
$$

```
ampl: model 0_exemplo_1.mod;
ampl: option solver cplex;
ampl: solve;
CPLEX 12.6.3.0: optimal solution; objective 750
1 dual simplex iterations (1 in phase I)
ampl:
```

```
ampl: model 0_exemplo_1.mod;
ampl: option solver gurobi;
ampl: solve;
Gurobi 8.1.0: optimal solution; objective 750
1 simplex iterations
ampl:
```

```
ampl: model 0_exemplo_1.mod;
ampl: option solver lpsolve;
ampl: solve;
LP_SOLVE 5.5.2.11: optimal, objective 750
2 simplex iterations
ampl:
```

```
/* Variable definitions */
var x_cadeiras >= 0;
var x_poltronas >= 0;
var x_camarotes >= 0;


/* Objective function */
maximize obj: +5*x_cadeiras +7*x_poltronas +15*x_camarotes;

/* Constraints */
Restricao_Dinheiro: +8*x_cadeiras +15*x_poltronas +100*x_camarotes <= 1200;
Restricao_Assentos: +x_cadeiras +x_poltronas +x_camarotes >= 40;
```

Formulação – Exemplo 2

O problema

Uma confeitaria produz dois tipos de bolos: chocolate e creme. Cada lote de bolo de chocolate é vendido com um lucro de 3 u.m. e os lotes de creme com um lucro de 1 u.m. Contratos com várias lojas impõem que sejam produzidos no mínimo 10 lotes de bolos de chocolate por dia e no mínimo 5 lotes de bolos de creme. O total de bolos fabricados nunca deve ser menor que 20. O mercado só é capaz de consumir até 40 lotes de bolos de creme e 60 de chocolate. As máquinas de preparação dos bolos disponibilizam 180 horas de operação, sendo que cada lote de bolo de chocolate consome 2 horas de trabalho e cada lote de bolos de creme 3 horas. Determinar o esquema de produção que maximize os lucros com a venda dos bolos.

Entendendo o problema

	Bolos de Chocolate	Bolos de creme
Preço de Venda (u.m.)	3	1
Produção mínima (u.)	10	5
Produção máxima (u.)	60	40
Preparação (h)	2	3

Produção total de bolos: 20 (no mínimo)
Total de horas de preparação disponível: 180h (no máximo)

...cont⇒

...continuação

Formulação – Exemplo 2

Descrevendo o objetivo

Maximixar o lucro -> produzindo o máximo possível dentro das limitações -> descobrir quantas unidades de lotes de cada tipo de bolo produzir

Produção total de bolos: 20 (no mínimo)
Total de horas de preparação disponível: 180h (no máximo)

Definindo nas variáveis de decisão

x1: quantidade de lotes do bolo de CHOCOLATE a ser produzido
x2: quantidade de lotes do bolo de CREME a ser produzido

Escrevendo a função objetivo

$L(x1, x2) = L = 3x1 + x2$

	Bolos de Chocolate	Bolos de creme
Preço de Venda (u.m.)	3	1
Produção mínima (u.)	10	5
Produção máxima (u.)	60	40
Preparação (h)	2	3

Descrevendo as restrições e escrevendo-as em função das variáveis

Quantidade mínima de lotes de bolo de CHOCOLATE a ser produzido:	$x1 \geq 10$
Quantidade máxima de lotes de bolo de CREME a ser produzido:	$x2 \geq 5$
Quantidade máxima de lotes de bolo de CHOCOLATE a ser produzido:	$x1 \leq 60$
Quantidade mínima de lotes de bolo de CREME a ser produzido:	$x2 \leq 40$
Quantidade total de lotes de bolo a ser produzido:	$x1 + x2 \geq 20$
Quantidade de horas disponíveis para produção dos bolos:	$2x1 + 3x2 \leq 180$

...cont⇒

...continuação

Formulação – Exemplo 2

Adicionando as restrições de não-negatividade das variáveis

$x1, x2 \geq 0$

Produção total de bolos: 20 (no mínimo)
Total de horas de preparação disponível: 180h (no máximo)

Programa Linear-pl

maximize $Z = 3x1 + x2$

sujeito a

$x1 \geq 10$

$x2 \geq 5$

$x1 \leq 60$

$x2 \leq 40$

$x1 + x2 \geq 20$

$2x1 + 3x2 \leq 180$

$x1, x2 \geq 0$

	Bolos de Chocolate	Bolos de creme
Preço de Venda (u.m.)	3	1
Produção mínima (u.)	10	5
Produção máxima (u.)	60	40
Preparação (h)	2	3

...continuação

Formulação – Exemplo 2

Resolução usando Solver do Excel

maximize $Z = 3x1 + x2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x1 &\geq 10 \\
x2 &\geq 5 \\
x1 + x2 &\geq 20 \\
x1 &\leq 60 \\
x2 &\leq 40 \\
2x1 + 3x2 &\leq 180 \\
x1,\ x2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Variáveis ->					
Função Objetivo	3	1	0		
Mínimo Choco	1	0	0	>=	10
Mínimo Creme	0	1	0	>=	5
Mínino total	1	1	0	>=	20
Máximo Choco	1	0	0	<=	60
Máximo Creme	0	1	0	<=	40
Máximo horas	2	3	0	<=	180

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
D2	Função Objetivo	200	200

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
B1	x_chocolate	60	0	3	1E+30	2,333333333
C1	x_creme	20	0	1	3,5	1

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permissível Acréscimo	Permissível Decréscimo
D3	Mínimo Chocolate	60	0	10	50	1E+30
D4	Mínimo Creme	20	0	5	15	1E+30
D5	Mínino Total	80	0	20	60	1E+30
D6	Máximo Choco	60	2,333333333	60	22,5	30
D7	Máximo Creme	20	0	40	1E+30	20
D8	Máximo horas	180	0,333333333	180	60	45

Formulação – Exemplo 2

...continuação

Resolução usando LpSolve

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{maximize} & Z = 3x1 & + & x2 & \\
\text{sujeito a} & x1 & & & \geq 10 \\
 & & & x2 & \geq 5 \\
 & x1 & + & x2 & \geq 20 \\
 & x1 & & & \leq 60 \\
 & & & x2 & \leq 40 \\
 & 2x1 & + & 3x2 & \leq 180 \\
 & x1, & & x2 & \geq 0
\end{array}
$$

```
/* Objective function */
max: 3x1 + 1 x2;
/* Restrictions */
minimo_Choco: x1 >= 10;
minimo_Creme: x2 >= 5;
minino_Total: x1 + x2 >= 20;
maximo_Choco: x1 <= 60;
maximo_Creme: x2 <= 40;
maximo_horas: 2x1 + 3x2 <= 180;
```

...continuação

Formulação – Exemplo 2

Resolução usando linguagem AMPL

maximize $Z = 3x1 + x2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x1 \quad\quad\quad & \geq 10 \\
x2 & \geq 5 \\
x1 + x2 & \geq 20 \\
x1 \quad\quad\quad & \leq 60 \\
x2 & \leq 40 \\
2x1 + 3x2 & \leq 180 \\
x1, \quad x2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

```
set bolo;

param lucro {bolo} > 0;
param horas {bolo} > 0;
param n_min {bolo} >= 0;
param n_max {j in bolo} >= n_min[j];

var x {j in bolo} >= n_min[j], <= n_max[j];

maximize Lucro_Total:  sum {j in bolo} lucro[j] * x[j];

subject to Restricao {j in bolo}: n_min[j] <=  x[j] <= n_max[j];
subject to Maximo: sum {j in bolo} x[j] >= 20;
subject to Horas: sum {j in bolo} horas[j] * x[j] <= 180;

data;

set bolo := Choco Creme;

param:   lucro n_min  n_max :=
   Choco  3      10    60
   Creme  1       5    40;

param      horas :=
   Choco  2
   Creme  3;
```

Alguns resultados/exibições do AMPL

Modelo
ampl:Model 0_exemplo_2.mod;

Solver
ampl:Option solver gurobi;

Resolver
ampl: solve;

Display

ampl: option omit_zero_rows 1; %não mostra variáveis nulas
ampl: option display_precision 0; %usa várias casas decimais
ampl: option display_precision 3; %pode variar o número de dígitos
ampl: display x;

ampl: printf "O lucro total eh $%6.2f.\n",
ampl? lucro_total;

ampl: display x.lb, x, x.ub, x.slack; %lower and upper bounds

Alguns resultados/exibições do AMPL

Display

ampl: show; %nomes e componentes do modelo
ampl: show vars; %quais variáveis
ampl: show Lucro_Total; %mostra a função objetivo (sem expandir)
ampl: expand Limites; %mostra as restrições denominadas de Limites

https://ampl.com/BOOK/CHAPTERS/15-display.pdf

Formulação de Problemas Clássicos

1. Problema da mistura
2. Problemas de alocação de recursos
3. Problemas de planejamento da produção
4. Problema de programação de projetos
5. Problemas de gestão financeira
6. Problema de escalonamento de horários
7. Problema de transporte
8. Problema de designação
9. Problemas de corte
10. Problemas da mochila

1 - Problema de Mistura

Exemplo

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela a seguir ilustra a quantidade proporção de cada material na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação, assim como a disponibilidade de cada matéria prima (em toneladas) e os preços de venda por tonelada de cada liga.

	Liga 1	**Liga 2**	**Disponibilidade**
Cobre	0,50	0,2	**16 ton**
Zinco	0,25	0,3	**11 ton**
Chumbo	0,25	0,5	**15 ton**
Preço (R$)	**3000**	**5000**	

Construa o modelo matemático com o objetivo de maximizar o lucro.

...cont⇒

...continuação

1 - Problema de Mistura

Modelagem

i) **Variáveis de decisão:**

x_1: quantidade produzida da liga 1 (em toneladas)

x_2: quantidade produzida da liga 2 (em toneladas)

ii) **Equações**

Função objetivo:

maximizar $Z = 3000x_1 + 5000x_2$

Restrições

Disponibilidade das matérias primas:

$0{,}50x_1 + 0{,}2x_2 \leq 16$ (cobre)

$0{,}25x_1 + 0{,}3x_2 \leq 11$ (zinco)

$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 15$ (chumbo)

Todas as quantidades produzidas são não-negativas:

$x_1, x_2 \geq 0$

iii) **Programa Linear-PL**

$$
\begin{array}{lll}
\max & Z = 3000x_1 + 5000x_2 & \\
\text{sa} & 0{,}50x_1 + 0{,}2x_2 \leq 16 & \text{(cobre)} \\
 & 0{,}25x_1 + 0{,}3x_2 \leq 11 & \text{(zinco)} \\
 & 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 \leq 15 & \text{(chumbo)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

...cont⇒

1 - Problema de Mistura

...continuação (AMPL)

```
# Conjunto de Objetos
set LIGA; # produtos
set MATERIAPRIMA; # materia prima
#
param lucro{LIGA} >= 0; # preço de venda de cada liga
param disposi{MATERIAPRIMA} >= 0; # disponibilidade de mateira prima {cobre, zinco e chumbo}
param composto{MATERIAPRIMA, LIGA} >= 0; # ccomposicao de cada liga
#
var X{LIGA} >= 0; # unidades que serao produzidas de cada liga {Liga 1 e Liga 2}
# Funcao objetivo
maximize Lucro_Total: sum{i in LIGA} lucro[i]*X[i];
# Restricoes
subject to Disponibilidade{j in MATERIAPRIMA}: sum{i in LIGA}composto[j,i]*X[i] <= disposi[j];
#
data;
#
set LIGA := LIGA_1 LIGA_2;
set MATERIAPRIMA := COBRE ZINCO CHUMBO;
#
param: lucro :=
LIGA_1 3000
LIGA_2 5000;
#
param: disposi :=
COBRE 16
ZINCO 11
CHUMBO 15;
#
param composto :
       LIGA_1   LIGA_2 :=
COBRE  0.50    0.20
ZINCO  0.25    0.30
CHUMBO 0.25    0.50;
end;
```

Variables	result
	160000
X[LIGA_1]	20
X[LIGA_2]	20

2 - Problemas de Alocação de Recursos

Exemplo

No programa de produção para o próximo período, uma empresa poderá produzir 3 tipos de produtos: P1, P2 e P3. O quadro abaixo mostra os montantes demandados (em unidades) na produção.

Produto	Contribuição (lucro em $ por unidade)	Horas de trabalho	Horas de uso de máquina	Demanda máxima
P1	2100 $	6	12	800
P2	1200 $	4	6	600
P3	600 $	6	2	600

A empresa dispõe de 4800 horas de trabalho para o período; considerando o usos de três máquinas terá a disposição 7200 horas de horas de uso de máquina.

Construa o modelo matemático com o objetivo de maximizar o lucro.

...cont⇒

2 - Problemas de Alocação de Recursos

...continuação (AMPL)

```
set PRODUTOS;
set RECURSOS;
#
param lucro{PRODUTOS} >= 0;
param disposi{RECURSOS} >= 0;
param dem_max{PRODUTOS};
param uso{RECURSOS, PRODUTOS} >= 0;
#
var X{PRODUTOS} >= 0;
# Funcao objetivo
maximize Lucro_Total: sum{i in PRODUTOS} lucro[i]*X[i];
# Restricoes
subject to demanda_maxima{i in PRODUTOS}: X[i] <= dem_max[i];
subject to disponibilidade{j in RECURSOS}: sum{i in PRODUTOS}uso[j,i]*X[i] <= disposi[j];
#
data;
#
set PRODUTOS := P_1 P_2 P_3;
set RECURSOS := HORAS_TRABALHO HORAS_MAQUINA;
#
param: lucro :=
P_1 2100
P_2 1200
P_3  600;
#
param: disposi :=
HORAS_TRABALHO 4800
HORAS_MAQUINA 7200;
#
param: dem_max :=
P_1 800
P_2 600
P_3 600;
#
param uso :
                   P_1      P_2         P_3 :=
HORAS_TRABALHO     6        4           6
HORAS_MAQUINA      12       6           2;

end;
```

Variables	result
	1380...
X[P_1]	280
X[P_2]	600
X[P_3]	120

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Empresas de manufatura fabricam diversos tipos de produtos solicitados por diferentes clientes, muitas vezes em grandes quantidades, os quais devem estar prontos para entrega em diferentes datas previamente agendadas. Como as fábricas têm capacidades de produção limitadas (máquinas, mão de obra e outros), é necessário planejar a produção, isto é, decidir o que e quanto produzir (em outras palavras, dimensionar os lotes da produção) em cada período de um horizonte de planejamento.

A necessidade de antecipação da fabricação de produtos (estocados de um período para o outro) acarreta em custos de estocagem e algumas dificuldades operacionais. No planejamento da produção, deseja-se determinar o tamanho dos lotes de produção, para atender a demanda na data solicitada e de modo que a soma dos custos de produção e estocagem seja mínima.

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 1

Uma empresa foi contratada por outra para fornecer 210 motores elétricos em Janeiro, 140 em Fevereiro, 180 em Março e 160 em Abril (admita-se que são fornecidos ao cliente no fim de cada mês).

A capacidade normal de produção é de 150 motores/mês e os custos de produção normal são 20, 22, 25 e 27 KPTE/motor (KPTE: *high radial load capacity*), em cada mês, respectivamente.

Utilizando horas extras a empresa consegue produzir um adicional de 30 motores/mês ao custo unitário de 25, 27,30 e 32 KPTE/motor, em cada mês do período.

A empresa pode ainda subcontratar a produção de qualquer quantidade de motores ao custo unitário de 30 KPTE em Jan/Fev e 35 KPTE em Mar/Abr.

Custos	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Custo Produção Horário Normal	20	22	25	27
Custo Produção Horário Extraordinário	25	27	30	32
Custo Produção por Subcontratação	30	30	35	35

Sabe-se que a capacidade de armazenagem da empresa apenas é suficiente para 220 motores. Em estoque existem 50 motores armazenados, sendo o custo de armazenamento de 0,5 KPTE/motor/mês.

Sabendo-se que a empresa se comprometeu a fornecer os motores no prazo (caso contrário incorrerá será penalizada por quebra de contrato), o Diretor de Produção pretende determinar o programa de produção que permita minimizar o custo total de produção e armazenagem (pelos quais ele é responsável !). Os motores são entregues no último dia do mês e o custo de estocagem incide sobre motores produzidos durante o mês e nos meses subsequentes.

...cont⇒

...continuação

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 1

Modelagem

I) VARIÁVEIS

	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Produção Horário Normal	x_1	x_4	x_7	x_{10}
Produção Horário Extraordinário	x_2	x_5	x_8	x_{11}
Produção por Subcontratação	x_3	x_6	x_9	x_{12}

II) EQUAÇÕES

- **Função Objetivo**

Custo_Final = Custo_Produção + Custo_Estocagem

Custo_Produção= $(20x_1+22x_4+25x_7+27x_{10})+(25x_2+27x_5+30x_8+32x_{11})+(30x_3+30x_6+35x_9+35x_{12})$

Custo_Estocagem = $0{,}5\times(x_1+x_2+x_3+50)$ + %(fim de janeiro)
$+\ 0{,}5\times(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-160)$ + %(fim de fevereiro)
$+\ 0{,}5\times(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-300)$ + %(fim de março)
$+\ 0{,}5\times(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}-480)$ + %(fim de abril)

...cont⇒

...continuação

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 1

Modelagem

- **Restrições**

i. Demanda

$x_1+x_2+x_3+50 \geq 210$ %(fim de janeiro)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-160 \geq 140$ %(fim de fevereiro)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-300 \geq 180$ %(fim de março)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}-480 \geq 160$ %(fim de abril)

ii. Capacidade de estoque

$x_1+x_2+x_3+50 \leq 220$ %(fim de janeiro)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-160 \leq 220$ %(fim de fevereiro)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9-300 \leq 220$ %(fim de março)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}-480 \leq 220$ %(fim de abril)

iii. Capacidade máxima em cada forma de produção (normal e extra)

$x_1, x_4, x_7, x_{10} \leq 150$ %(produção normal)

$x_2, x_5, x_8, x_{11} \leq 30$ %(produção em horário extra)

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 2

A empresa quer planejar a produção agregada para os próximos 6 meses. As encomendas previstas estão listados na tabela. Ao longo do período de 6 meses, as unidades podem ser produzidas em um mês e estocadas/armazenadas para satisfazer a procura de meses mais tarde. Devido a fatores sazonais, o custo de produção não é constante, como mostrado na tabela.

O custo de manter um item estocado por 1 mês é $ 4/unidade/mês. Itens produzidos e vendidos no mesmo mês não são colocados no estoque. O número máximo de unidades que podem ser mantidos em estoque é 250. O nível de estoque inicial no início do horizonte de planejamento é de 200 unidades; o nível estocado no fim do horizonte de planejamento deve ser 100. O problema é determinar a quantidade ideal para produzir em cada mês de modo que a demanda seja atendida enquanto minimiza o custo total de produção e de estocagem. Escassez não é permitida.

Mês	Demanda (unidades)	Custo da Produção ($/unid)
1	1300	100
2	1400	105
3	1000	110
4	800	115
5	1700	110
6	1900	110

...cont⇒

http://www.me.utexas.edu/~jensen/or_site/models/unit/lp_model/agg_plan/agg_pln.html

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 2

O problema de planejamento agregado é interessante não só porque representa uma importante aplicação de programação linear, mas porque ela também ilustra como problemas de planejamento multiperíodo são abordados. Para este modelo, usamos variáveis com subscritos e somatórios para simplificar a apresentação do modelo. Isso é muitas vezes útil para problemas multiperíodo e para outros problemas que têm aspectos semelhante.

Variáveis de decisão:

x_i: quantidade produzida (em unidades) no mês i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$
y_i: quantidade estocada (em unidades) no mês i, $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$

Parâmetros:

d_i: quantidade demandada (em unidades) no mês i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$
y_0: estoque inicial (200 unidades estocadas ao iniciar a produção do 1)
y_6: estoque final (100 unidades estocadas no final do mês 6)

Equações:

Conservação do fluxo: Um requisito básico em problemas de planejamento de produção é que o produto ou material deve ser conservado. No nosso caso, este leva à seguinte restrição $y_{t-1} + x_t = d_t + y_t$, t = 1, ..., 6 que afirma que a demanda no mês t devem ser atendidas pela produção no mês t mais a variação líquida no estoque. ($y_0 = 200$, $y_6 = 100$)

Estoque máximo: restrição de limite superior sobre os níveis de estoque $y_t \leq 250$, t = 1, ..., 6

Função Objetivo: Min $Z = (100x_1 + 105x_2 + 110x_3 + 115x_4 + 110x_5 + 110x_6) + (4y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 4y_5 + 4y_6)$

...cont⇒

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 2

De forma genérica

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left(c_{it}x_{it} + h_{it}y_{it}\right)$$

s.a

$$y_{i(t-1)} + x_{it} - y_{it} = d_{it},\ t = 1,\dots,T,\ i = 1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_{it} \le R_t,\ t = 1,\dots,T$$

$$y_{it} \le est_{it},\ t = 1,\dots,T,\ i = 1,\dots,n$$

$$x_{it} \ge 0, y_{it} \ge 0,\ t = 1,\dots,T,\ i = 1,\dots,n$$

onde

- n - número de produtos
- T - número de períodos
- d_{it} - demanda do produto i no período t
- r_i - quantidade do recurso necessária para a produção de uma unidade do item i
- R_t - quantidade disponível do recurso no período t
- est_{it} - A capacidade de estocagem do produto i no período t
- c_{it} - custo de fabricar uma unidade do produto i no período t
- h_{it} - custo de estocar uma unidade do produto i no final do período t

http://www.me.utexas.edu/~jensen/or_site/models/unit/lp_model/agg_plan/agg_pln.html

3 - Problemas de Planejamento da Produção

- Em muitos casos, a produção de um item necessita a produção anterior de um outro item (p.ex. computador - placa mãe).
- Podemos estocar no final de cada período y_{it}.
- Itens intermediários podem ter demanda exterior (p.ex. teclado).

Exemplo 3 – Produção Multiestágio

Considere uma fábrica que produz n itens e deseja planejar sua produção para os próximos T períodos de tempo. São conhecidos:

- n - número de itens
- T - número de períodos
- d_{it} - demanda externa do item i no período t
- b_{ij} - quantidade do item j para a produção de uma unidade do item i
- R_{kt} - quantidade disponível do recurso k no período t
- r_{ki} - quantidade do recurso k necessária para a produção de uma unidade do item i
- c_{it} - custo de fabricar uma unidade do item i no período t
- h_{it} - custo de estocar uma unidade do item i no final do período t

...cont⇒

...continuação

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 3

Modelagem

$$\min \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left(c_{it}x_{it} + h_{it}y_{it}\right)$$

$$\text{s.a} \quad y_{i(t-1)} + x_{it} - y_{it} = d_{it} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{jt},\; t = 1,\dots,T,\; i = 1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ki}x_{it} \le R_{kt},\; k = 1,\dots,K,\; t = 1,\dots,T$$

$$x_{it} \ge 0, y_{it} \ge 0,\;\; t = 1,\dots,T,\; i = 1,\dots,n$$

- **n - número de itens**
- **T - número de períodos**
- **d_{it} - demanda externa do item i no período t**
- **b_{ji} - quantidade do item j para a produção de uma unidade do item i**
- **R_{kt} - quantidade disponível do recurso k no período t**
- **r_{ki} - quantidade do recurso k necessária para a produção de uma unidade do item i**
- **c_{it} - custo de fabricar uma unidade do item i no período t**
- **h_{it} - custo de estocar uma unidade do item i no final do período t**

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 4

Seja x_B o número de Bicicletas *mountain bike* e x_C o número de bicicletas de Corrida

maximize $Z = 15x_B + 10x_C$

s.a	$x_B \leq 2$	limite de produção 1
	$x_C \leq 3$	limite de produção 2
	$x_B + x_C \leq 4$	limite de produção de acabamento de metais
	$x_B, x_C \geq 0$	não negatividade

Suponha que possamos escolher entre usar a máquina de acabamento de metal original (3ª restrição) ou uma outra com restrição associada "$x_B + 1{,}5x_C \leq 6$".

Podemos alcançar esse efeito ao introduzir uma única variável binária (chamar de y) e usá-la nas duas restrições, ambas incluídas no modelo, da seguinte forma:

(1) $x_B + x_C \leq 4 + My$ (2) $x_B + 1{,}5x_C \leq 6 + M(1 - y)$

Se y = 0, apenas a restrição original mantém-se, e se y = 1, apenas a nova restrição é válida/ativada, exatamente o tipo de comportamento "UMA ou OUTRA" que queríamos.

...cont⇒

3 - Problemas de Planejamento da Produção

Exemplo 4

$$\text{maximize } Z = 15x_B + 10x_C$$
$$\text{s.a} \quad x_B \leq 2$$
$$x_C \leq 3$$
$$x_B + x_C \leq 4$$
$$x_B, x_C \geq 0$$

$$\text{maximize } Z = 15x_B + 10x_C$$
$$\text{s.a} \quad x_B \leq 2$$
$$x_C \leq 3$$
$$x_B + x_C \leq 4 + My$$
$$x_B + 1{,}5x_C \leq 6 + M(1 - y)$$
$$x_B, x_C \geq 0,\ y \in \{0, 1\}$$

```
set bicicletas; /*model bicicletas.mod;*/

param lucro {bicicletas} > 0;

var tipo {bicicletas} >= 0;
var ativa binary;

maximize Lucro_Total:  sum {j in bicicletas} lucro[j] * tipo[j];

subject to Limite_M: tipo['Mountain'] <= 2;
subject to Limite_C: tipo['Corrida'] <= 3;
subject to MaximoAtiva: sum {j in bicicletas} tipo[j] <= 4 + 1000000000*(ativa);
subject to MaximoNaoAtiva: tipo['Mountain'] + tipo['Corrida'] <= 6 + 1000000000*(1-ativa);


data;

set bicicletas := Mountain Corrida;


param       lucro :=
   Mountain  15
   Corrida   10;
```

```
ampl: display tipo, ativa, Lucro_Total;
tipo [*] :=
 Corrida   3
Mountain   2
;

ativa = 1
Lucro_Total = 60
```

4 - Problema de Programação de Projetos

- Tarefas competem por recursos e possuem precedência.
- Uma tarefa dura um certo tempo.
- Um projeto pode ter inúmeras tarefas.
- Deseja-se saber a ordem de um conjunto de tarefas de tal forma a obter o menor tempo para conclusão do projeto.
- Busca determinar a ordem em que um conjunto de atividades é realizada, minimizando o tempo para conclusão.

...cont⇒

http://wiki.icmc.usp.br/images/8/80/Aula3_ipo_mari.pdf

4 - Problema de Programação de Projetos

Exemplo

Uma empresa deseja construir pilares de uma edificação, tarefa constituída basicamente por oito atividades relacionadas na tabela abaixo. O projeto se inicia no instante 0.

Atividades	Descrição	Predecessor imediato	Duração (h)
A	Preparo da armadura	-	6
B	Preparo da forma	-	5
C	Lançamento da armadura	A	4
D	Lançamento da forma	B, C	2
E	Providências para concretagem	-	2
F	Aplicação do concreto	E, D	3
G	Cura do concreto	F	72
H	Desforma do pilar	G	3

...cont⇒

4 - Problema de Programação de Projetos

Exemplo

Modelagem

Variáveis

x_i: instante em que a atividade i, $i \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ será iniciada

Equações

Função Objetivo: (minimizar o tempo de conclusão do projeto)

minimizar $Z = x_H + 3$

Restrições

$x_C \geq x_A + 6;$

$x_D \geq x_B + 5; x_D \geq x_C + 4;$

$x_F \geq x_E + 2; x_F \geq x_D + 2;$

$x_G \geq x_F + 3;$

$x_H \geq x_G + 72;$

Atividades	Predecessor imediato	Duração (h)
A	-	6
B	-	5
C	A	4
D	B, C	2
E	-	2
F	E, D	3
G	F	72
H	G	3

PLI

minimizar $Z = x_H + 3$

sa $x_C \geq x_A + 6; x_D \geq x_B + 5; x_D \geq x_C + 4;$

$x_F \geq x_E + 2; x_F \geq x_D + 2; x_G \geq x_F + 3; x_H \geq x_G + 72;$

$x_i \in Z^+, i \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

5 - Problema de Gestão Financeira

- O Fluxo de Caixa é um instrumento de gestão que diz respeito à quantidade de dinheiro que entra e sai da empresa, em um período de tempo (diário, semanal, mensal, etc.);
- Estes problemas podem ser vistos como um objeto matemático com o objetivo de facilitar o estudo e os efeitos da análise de uma certa aplicação, que pode ser um investimento, empréstimo, financiamento, etc.;
- Modelos lineares também podem ser utilizados para apoiar decisões em problemas de gestão financeira, por exemplo, no gerenciamento do fluxo e caixa.
- Um dos objetivos é maximizar lucro da empresa otimizando o fluxo

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 1

Deseja-se investir \$14000. Foram identificadas 4 oportunidades de investimentos:

- Investimento 1 requer \$5000 e tem um valor presente de \$8000;
- Investimento 2 requer \$7000 e tem um valor presente de \$11000;
- Investimento 3 requer \$4000 e tem um valor presente de \$6000; e
- Investimento 4 requer \$3000 e tem um valor presente de \$4000.

Em quais investimentos deve-se aplicar o capital disponível de modo a maximizar o valor presente total?

Modelagem

Variáveis:

$x_i = 1$, se o investimento i for escolhido

$x_i = 0$, caso contrário.

$$\max Z = 8000x_1 + 11000x_2 + 6000x_3 + 4000x_4$$

$$\text{as} \quad 5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \leq 14000$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

...cont⇒

http://www.feg.unesp.br/~fmarins/po/slides/2o.s/PLinteira.pdf

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 1

Variáveis:

x_i = 1, se o investimento i for escolhido

x_i = 0, caso contrário.

$$\begin{aligned} \max Z &= 8000x_1 + 11000x_2 + 6000x_3 + 4000x_4 \\ \text{as} \quad & 5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \leq 14000 \\ & x_j \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Variantes

Suponha que há restrições adicionais:

- Pode-se investir em no máximo 2 negócios: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 2$;
- Se investir no negócio 2, deve-se investir no 4 também: $X_2 - X_4 \leq 0$;
- Se investir no negócio 1, não pode-se investir no 3: $X_1 + X_3 \leq 1$.

http://www.feg.unesp.br/~fmarins/po/slides/2o.s/PLinteira.pdf

Table 3.2: Formulation of logical conditions using binary variables

At most one of A, B,...,H	$a+b+c+d+e+f+g+h \leq 1$
Exactly two of A, B,...,H	$a+b+c+d+e+f+g+h=2$
If A then B	$b \geq a$
Not B	$\bar{b}=1-b$
If A then not B	$a+b \leq 1$
If not A then B	$a+b \geq 1$
If A then B, and if B then A	$a=b$
If A then B and C	$b \geq a$ and $c \geq a$
If A then B or C	$b+c \geq a$
If B or C then A	$a \geq b$ and $a \geq c$
	or alternatively: $a \geq \frac{1}{2} \cdot (b+c)$
If B and C then A	$a \geq b+c-1$
If two or more of B, C, D or E then A	$a \geq \frac{1}{3} \cdot (b+c+d+e-1)$
If M or more of N projects (B, C, D, ...) then A	$a \geq \frac{b+c+d+\ldots-M+1}{N-M+1}$

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 2

Deseja-se investir \$14.000, \$12.000 e \$15.000 em cada mês do próximo trimestre. Foram identificadas 4 oportunidades de investimento:

- Investimento 1 requer \$5.000, \$8.000 e \$2.000 no mês 1, 2 e 3, respectivamente, e tem um valor presente de \$18.000;
- Investimento 2 requer \$7.000 no mês 1 e \$10.000 no mês 3, tendo um valor presente de \$19.000;
- Investimento 3 requer \$4.000 no período 2 e \$6.000 no período 3, tendo um valor presente de \$12.000;
- Investimento 4 requer \$3.000, \$4.000 e \$5.000, tendo valor presente de \$15.000.

Como realizar o investimento?

Variáveis:

$x_i = 1$, se o investimento no projeto i for escolhido

$x_i = 0$, caso contrário.

PL Binário:

$$\max Z = 18000x_1 + 19000x_2 + 12000x_3 + 15000x_4$$

$$\begin{aligned} \text{as} \quad & 5000x_1 + 7000x_2 + 3000x_4 \leq 14000 \\ & 8000x_1 + 4000x_3 + 4000x_4 \leq 12000 \\ & 2000x_1 + 10000x_2 + 6000x_3 + 5000x_4 \leq 15000 \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

http://www.feg.unesp.br/~fmarins/po/slides/2o.s/PLinteira.pdf

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 3

Considere uma empresa que gostaria de maximizar o retorno de seu fluxo de caixa ao final e um horizonte de planejamento de n períodos. A empresa tem boas previsões de fluxo de entrada e de saída de caixa no início de cada período.

Dados:

e_t: entrada de caixa no <u>início</u> do período t, t=1,...,n

s_t: saída de caixa no <u>início</u> do período t, t=1,...,n

Apenas estão disponíveis duas opções de investimento do dinheiro do caixa no início de cada período:

(1) Deixar parte ou todo dinheiro no próprio caixa durante todo período, com taxa de juros α

(2) Utilizar parte ou todo dinheiro em uma aplicação financeira com menor liquidez do que a opção 1 (isto é, resgate restrito), porém com taxa de juros β, $\beta > \alpha$ (p.ex. fundos de ações, títulos públicos etc.)

As conversões entre as opções 1 e 2 podem ser realizadas apenas do início de cada período t. Os custos unitários de conversão (p.ex. impostos, taxas de administração, etc.) são:

$c_{1,2}$: custo de mudar da opção 1 para a opção 2

$c_{2,1}$: custo de mudar da opção 2 para a opção 1

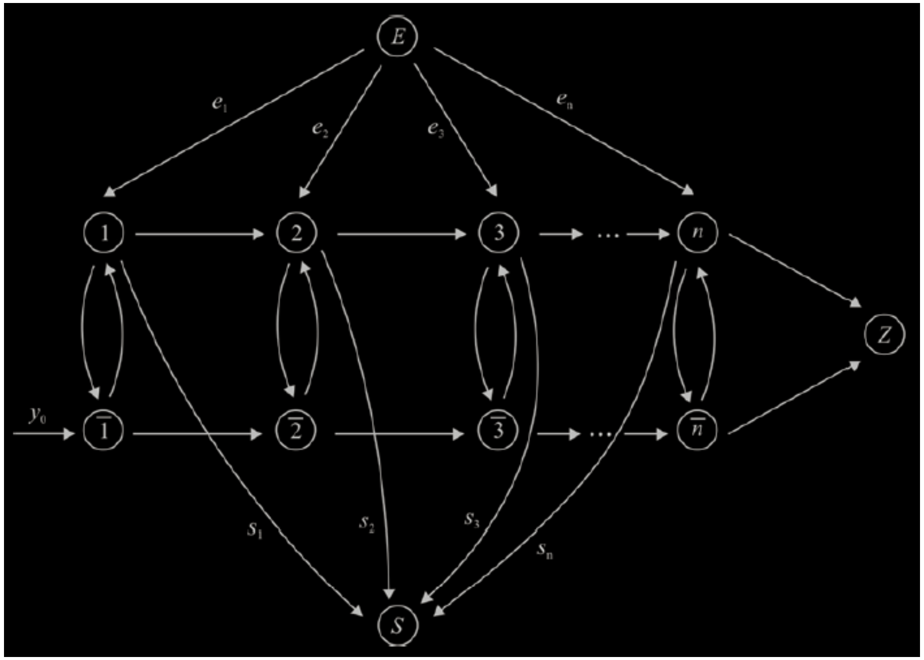
- No início do horizonte de planejamento, a empresa dispõe de y_0 unidades monetárias aplicadas na opção 2

...cont⇒

...continuação

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 3



Rede de fluxos de dinheiro

- O nó E simboliza a entrada de caixa (origem das contas a receber de clientes)
- O nó S simboliza a saída de caixa (destino das contas a pagar aos fornecedores)
- Os nós 1,2, ..., n e os nós $\bar{1}$, $\bar{2}$, ..., $\bar{n}$ simbolizam os inícios dos períodos para as opções de investimento 1 e 2, respectivamente
- O nó Z representa o final do planejamento

...cont⇒

...continuação

5 - Problema de Gestão Financeira

Exemplo 3

Como a empresa deseja maximizar o retorno do seu fluxo no final do horizonte de planejamento, o objetivo é maximizar a soma dos fluxos de dinheiro de n para Z e de $\bar{n}$ para Z.

<u>Variáveis</u>

$f_{i,j}$: fluxo de dinheiro do nó i para o nó j.

O fluxo de dinheiro ocorre entre nós específicos:

- de i para i+1 (dinheiro mantido em caixa no período i com α de rendimento)
- de i para $\bar{i}$ (dinheiro aplicado no período i com taxas de administração de $c_{1,2}$)
- de $\bar{i}$ para i (dinheiro resgatado no período i com impostos de $c_{2,1}$)

P. ex., se i = 1 e j = 2 então $f_{1,2}$ é a quantia de dinheiro mantida em caixa no período 1 que corresponde a uma entrada de caixa no período 2 de $(1+\alpha)f_{1,2}$; ou se i = $\bar{1}$ e j = $\bar{2}$ então $f_{\bar{1},\bar{2}}$ é a quantia mantida na opção 2 no período 1, de modo que a quantia $(1+\beta)f_{\bar{1},\bar{2}}$ estará aplicada no período 2.

Deve-se notar que o total aplicado na opção 2 no período 2 é, além da quantia $(1+\beta)f_{\bar{1},\bar{2}}$ também a quantia $(1-c_{1,2})f_{2,\bar{2}}$ (em que $f_{2,\bar{2}}$ é a quantia de dinheiro que sai do caixa no período 2 para a opção 2, e $c_{1,2}$ é a taxa de administração) menos a quantia resgatada no período 2, dada por $f_{\bar{2},2}$. Isso nos leva a equação de balanço de fluxo

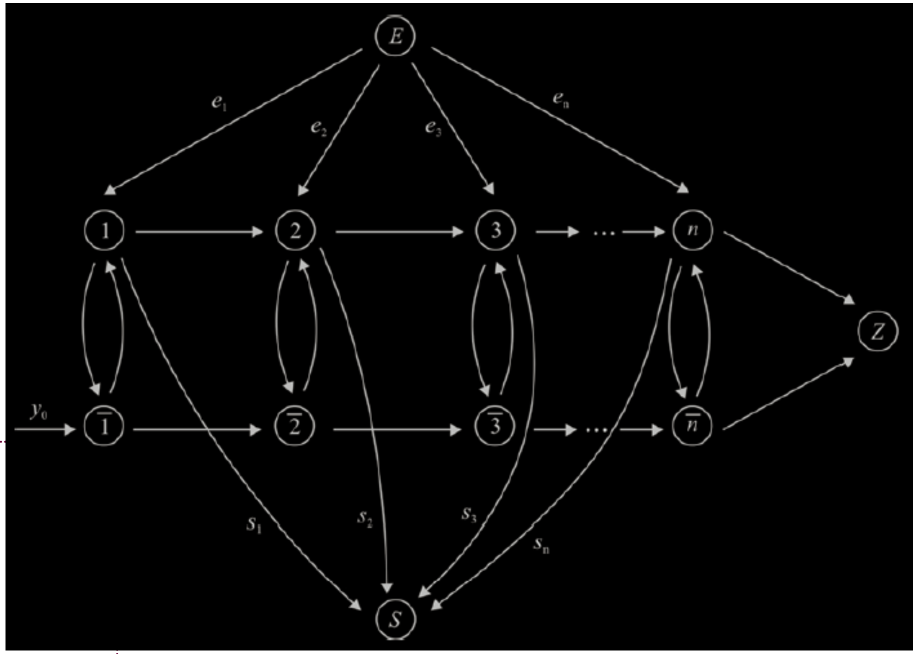
$$(1+\beta)f_{\bar{1},\bar{2}} + (1-c_{1,2})f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},2} + f_{\bar{2},\bar{3}}$$

...cont⇒

5 - Problema de Gestão Financeira

...continuação

Exemplo 3



O fluxo para o nó Z deve ser maximizado

$$\max \quad (1+\alpha) f_{n,Z} + (1+\beta) f_{\bar{n},Z}$$

$$\text{sa} \quad e_1 + (1-c_{2,1}) f_{\bar{1},1} = f_{1,2} + f_{1,\bar{1}} + s_1$$

$$y_0 + (1-c_{1,2}) f_{1,\bar{1}} = f_{\bar{1},\bar{2}} + f_{\bar{1},1}$$

$$e_2 + (1+\alpha) f_{1,2} + (1-c_{2,1}) f_{\bar{2},2} = f_{2,3} + f_{2,\bar{2}} + s_2$$

$$(1+\beta) f_{\bar{1},\bar{2}} + (1-c_{1,2}) f_{2,\bar{2}} = f_{\bar{2},\bar{3}} + f_{\bar{2},2}$$

$$K$$

$$e_n + (1+\alpha) f_{n-1,n} + (1-c_{2,1}) f_{\bar{n},n} = f_{n,Z} + f_{n,\bar{n}} + s_n$$

$$(1+\beta) f_{\overline{n-1},\bar{n}} + (1-c_{1,2}) f_{n,\bar{n}} = f_{\bar{n},Z} + f_{\bar{n},n}$$

$$f_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

6 - Problema de Escalonamento de Horários

Exemplo

Devido ao número inconstante de passageiros, uma companhia de ônibus necessita de um número variado de motoristas de pendendo do horário considerado. A tabela a seguir especifica a quantidade de motoristas necessários:

Horário	Quantidade de Motoristas
01 às 05 horas	15
05 às 09 horas	30
09 às 13 horas	26
13 às 17 horas	32
17 às 21 horas	30
21 às 01 hora	19

Considere que cada motorista trabalha 8 horas seguidas e que o serviço pode ser iniciado as 1, 5, 9, 13, 17, ou 21h. Formule este problema como um PL de modo que as demandas sejam atendidas e o número de motoristas seja o menor possível.

http://www.dcc.ufrj.br/~luziane/lista_modelagem_pos.pdf

7 - Problema de Transporte

- Referem-se ao transporte ou distribuição de produtos dos centros de produção (origem) aos mercados consumidores (destino);
- O transporte deve respeitar as limitações de oferta e atender à demanda requisita;
- Em alguns problemas, podem-se usar localidades intermediárias (ou de transbordo): depósitos ou centros de distribuição;
- No problema de transbordo, a quantidade que sai do centro intermediário deve ser igual à quantidade de produto que chega dos centros produtores;
- Modelos de transporte podem representar outras situações: existem n tarefas que precisam ser distribuídas a n pessoas (problema de designação).

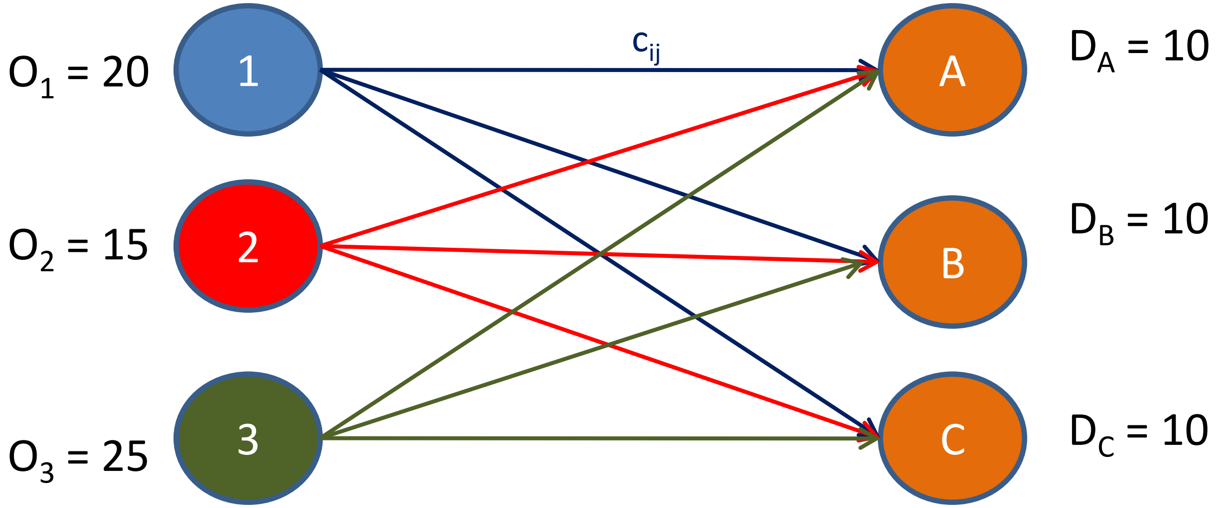
https://taq.catalao.ufg.br/up/601/o/aula1-pl-ppgmo.pdf

7 - Problema de Transporte

Exemplo

Uma empresa produz um produto em m fábricas, para atender a demanda de n locais de demanda. A capacidade de produção da fábrica i é no máximo igual a O_i, i=1,...,m. A demanda da cidade j é igual a D_j, j=1,..,n. Sabendo-se que o custo de envio de uma unidade do produto da fábrica i para o local de demanda j é c_{ij}, determinar a quantidade que deve ser enviada de cada fábrica para cada local de demanda, de modo a minimizar os custos de transporte desta empresa.

m = 3 e n =3

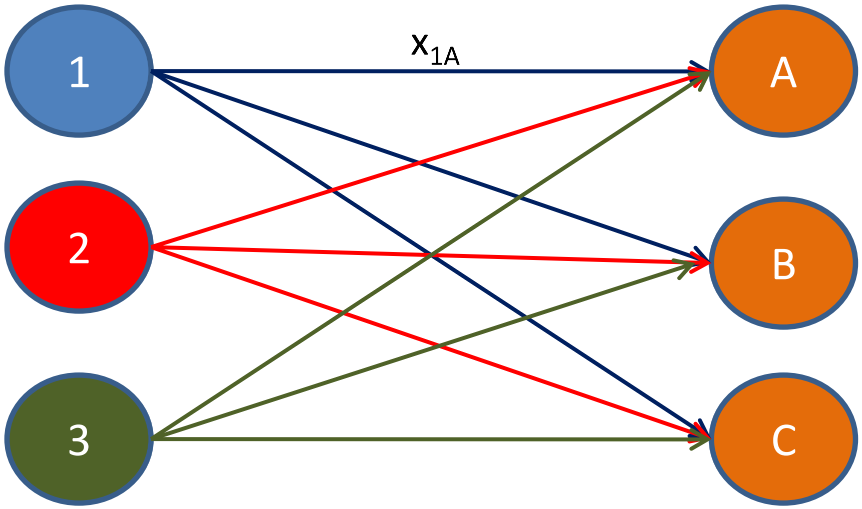


...cont⇒

7 - Problema de Transporte

Exemplo

Variáveis de Decisão



$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \in Z^{+}$$

PLI

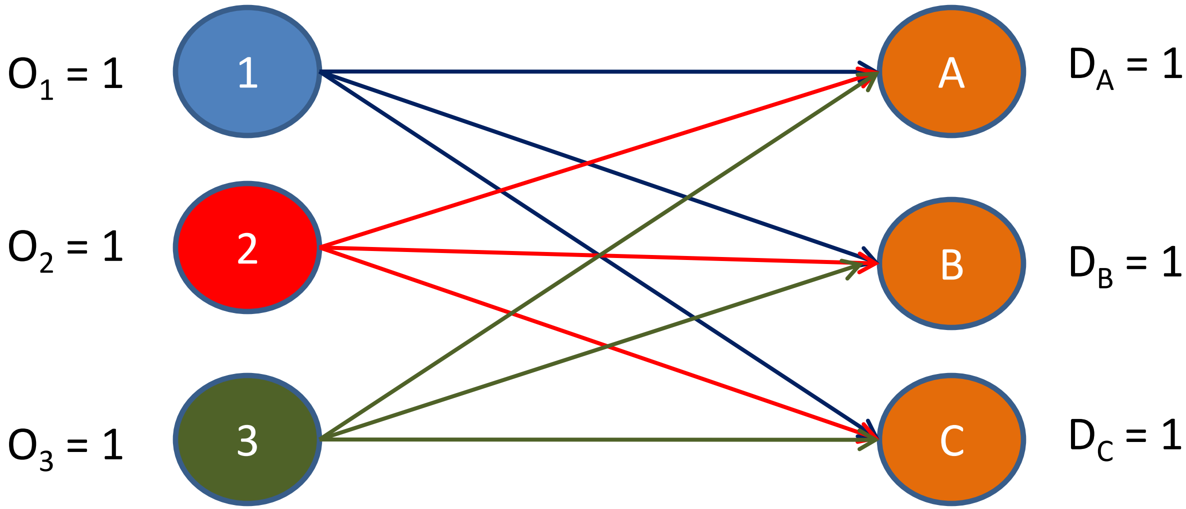
$$
\begin{aligned}
\min Z = \quad & (32x_{1A} + 60x_{1B} + 200x_{1C}) + (40x_{2A} + 68x_{2B} + 80x_{2C}) + (120x_{3A} + 104x_{3B} + 60x_{3C}) \\
\text{sa} \quad & x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 15 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 25 \\
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 10 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \geq 10 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \geq 10 \\
& x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \in \mathbb{Z}^{+}
\end{aligned}
$$

7 - Problema de Transporte – Exemplo AMPL

```
set ORIGEM; #locais de oferta
set DESTINO; #locais de demanda

param custo {ORIGEM, DESTINO} >= 0; #matriz de custos - FIXO
param oferta {ORIGEM} >= 0; #total ofertado nas origens - FIXO
param demanda {DESTINO} >= 0; #total demandado nos destinos - FIXO

#var x {i in ORIGEM, j in DESTINO} >= 0;  #quanto transportar da ORIGEM ao DESTINO - CONTINUAS
var x {i in ORIGEM, j in DESTINO} integer >= 0;  #quanto transportar da ORIGEM ao DESTINO - INTEIRAS

minimize custo_total: sum {i in ORIGEM, j in DESTINO} custo[i,j]*x[i,j]; #Funcao objetivo

subject to restricao_oferta {i in ORIGEM}: sum {j in DESTINO} x[i,j] <= oferta[i]; #limitacao maxima de oferta
subject to restricao_demanda{j in DESTINO}: sum {i in ORIGEM} x[i,j] >= demanda[j]; #demanda minimoa

data;

set ORIGEM := FABRICA_1 FABRICA_2 FABRICA_3; #locais de oferta
set DESTINO := ARMAZEM_1 ARMAZEM_2 ARMAZEM_3; #locais de demanda

param:   oferta :=
  FABRICA_1 20
  FABRICA_2 15
  FABRICA_3 25;

param:  demanda :=
   ARMAZEM_1 10
   ARMAZEM_2 10
   ARMAZEM_3 10;

#param custo (tr):   FABRICA_1 FABRICA_2 FABRICA_3 :=
#          ARMAZEM_1  32        40        120
#          ARMAZEM_2  40        68        104
#          ARMAZEM_3  120       80        60;

param custo:          ARMAZEM_1  ARMAZEM_2  ARMAZEM_3 :=
         FABRICA_1    32         60         200
         FABRICA_2    40         68         80
         FABRICA_3    120        104        60;
end;
```

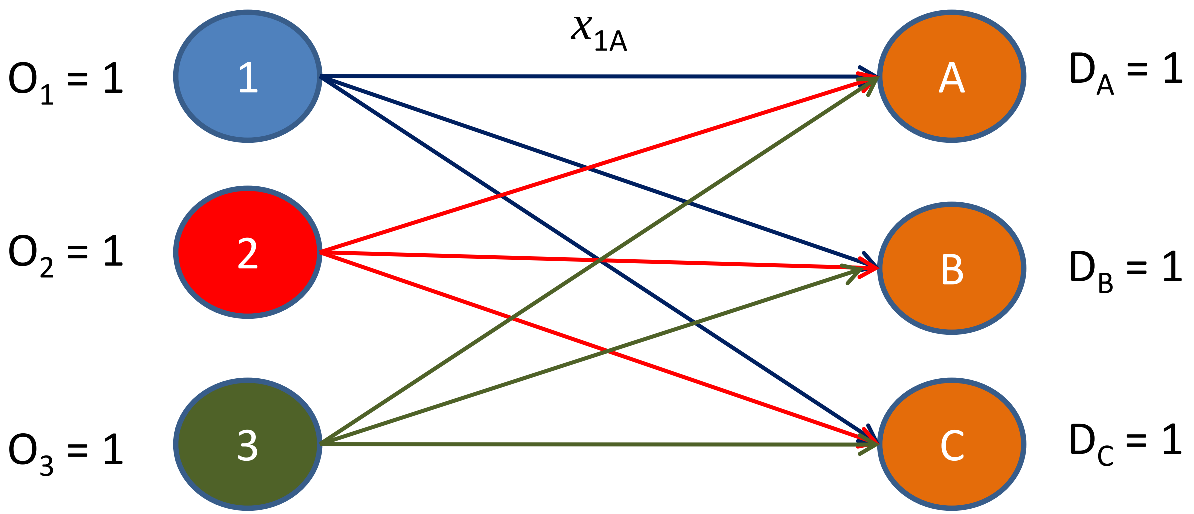
Variables		result
		1520
x[FABRICA_1,ARMAZEM_1]	→	10
x[FABRICA_1,ARMAZEM_2]	→	10
x[FABRICA_1,ARMAZEM_3]	→	0
x[FABRICA_2,ARMAZEM_1]	→	0
x[FABRICA_2,ARMAZEM_2]	→	0
x[FABRICA_2,ARMAZEM_3]	→	0
x[FABRICA_3,ARMAZEM_1]	→	0
x[FABRICA_3,ARMAZEM_2]	→	0
x[FABRICA_3,ARMAZEM_3]	→	10

8 - Problema de Designação



Caso particular de Transporte!!!!!!!

8 - Problema de Designação



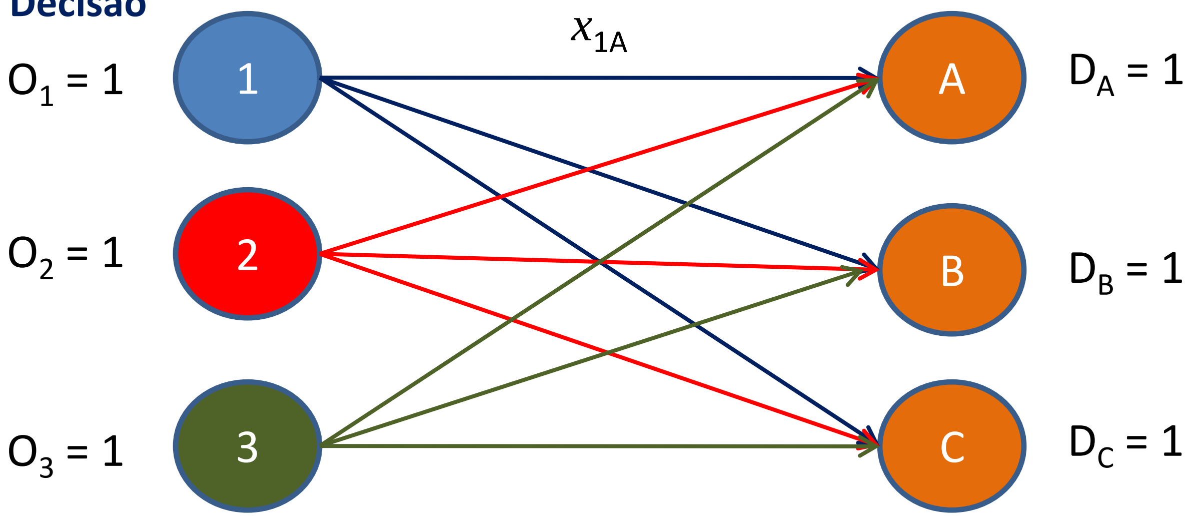
$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \in \{0,1\}$$

...continuação

8 - Problema de Designação

Exemplo

Variáveis de Decisão



$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \in \{0,1\}$$

PLI

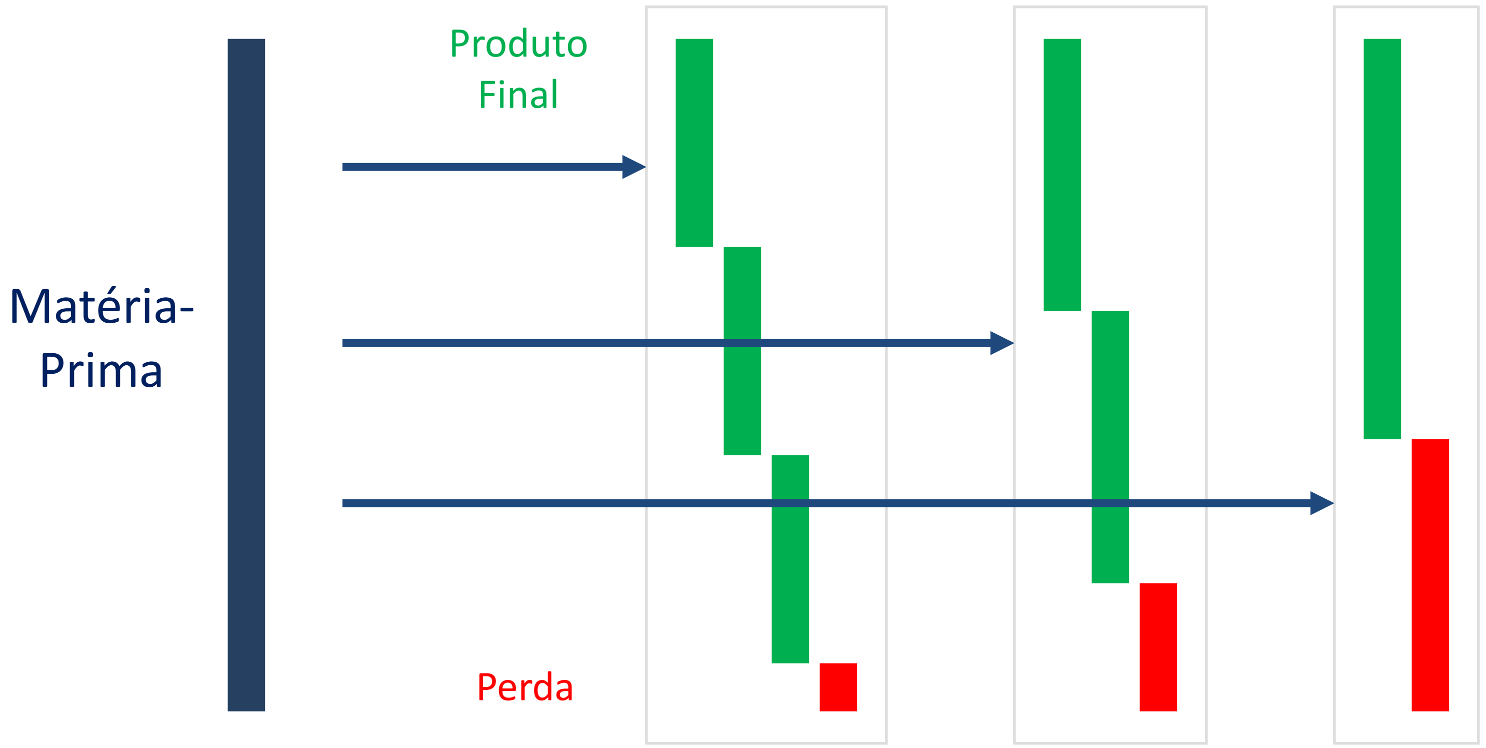
$$
\begin{aligned}
\min Z = \quad & (32x_{1A} + 60x_{1B} + 200x_{1C}) + (40x_{2A} + 68x_{2B} + 80x_{2C}) + (120x_{3A} + 104x_{3B} + 60x_{3C}) \\
\text{sa} \quad & x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 1 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 1 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 1 \\
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 1 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \geq 1 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \geq 1 \\
& x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

8 - Problema de Designação – Exemplo AMPL

```
set ORIGEM; #locais de oferta
set DESTINO; #locais de demanda

param custo {ORIGEM, DESTINO} >= 0; #matriz de custos - FIXO
#param oferta {ORIGEM} >= 0; #total ofertado nas origens - FIXO
#param demanda {DESTINO} >= 0; #total demandado nos destinos - FIXO

#var x {i in ORIGEM, j in DESTINO} >= 0;  #quanto transportar da ORIGEM ao DESTINO - CONTINUAS
var x {i in ORIGEM, j in DESTINO} binary >= 0;  #quanto transportar da ORIGEM ao DESTINO - BINARIAS

minimize custo_total: sum {i in ORIGEM, j in DESTINO} custo[i,j]*x[i,j]; #Funcao objetivo

/*subject to restricao_oferta {i in ORIGEM}: sum {j in DESTINO} x[i,j] <= oferta[i]; #limitacao maxima de oferta */
/*subject to restricao_demanda{j in DESTINO}: sum {i in ORIGEM} x[i,j] >= demanda[j]; #demanda minima */
subject to restricao_oferta {i in ORIGEM}: sum {j in DESTINO} x[i,j] <= 1; #limitacao maxima de oferta
subject to restricao_demanda{j in DESTINO}: sum {i in ORIGEM} x[i,j] >= 1; #demanda minimoa

data;

set ORIGEM := ORIGEM_1 ORIGEM_2 ORIGEM_3; #locais de oferta dos itens
set DESTINO := DESTINO_1 DESTINO_2 DESTINO_3; #locais de demanda dos itens

#param:   oferta :=
#  ORIGEM_1 1
#  ORIGEM_2 1
#  ORIGEM_3 1;

#param:  demanda :=
#   DESTINO_1 1
#   DESTINO_2 1
#   DESTINO_3 1;

#param custo (tr):   ORIGEM_1 ORIGEM_2 ORIGEM_3 :=
#          DESTINO_1  32       40       120
#          DESTINO_2  40       68       104
#          DESTINO_3  120      80       60;

param custo:         DESTINO_1  DESTINO_2  DESTINO_3 :=
         ORIGEM_1  32         60         200
         ORIGEM_2  40         68         80
         ORIGEM_3  120        104        60;
end;
```

Variables	MILP ...	result
		160
x[ORIGEM_1,DESTINO_1]	→	0
x[ORIGEM_1,DESTINO_2]	→	1
x[ORIGEM_1,DESTINO_3]	→	0
x[ORIGEM_2,DESTINO_1]	→	1
x[ORIGEM_2,DESTINO_2]	→	0
x[ORIGEM_2,DESTINO_3]	→	0
x[ORIGEM_3,DESTINO_1]	→	0
x[ORIGEM_3,DESTINO_2]	→	0
x[ORIGEM_3,DESTINO_3]	→	1

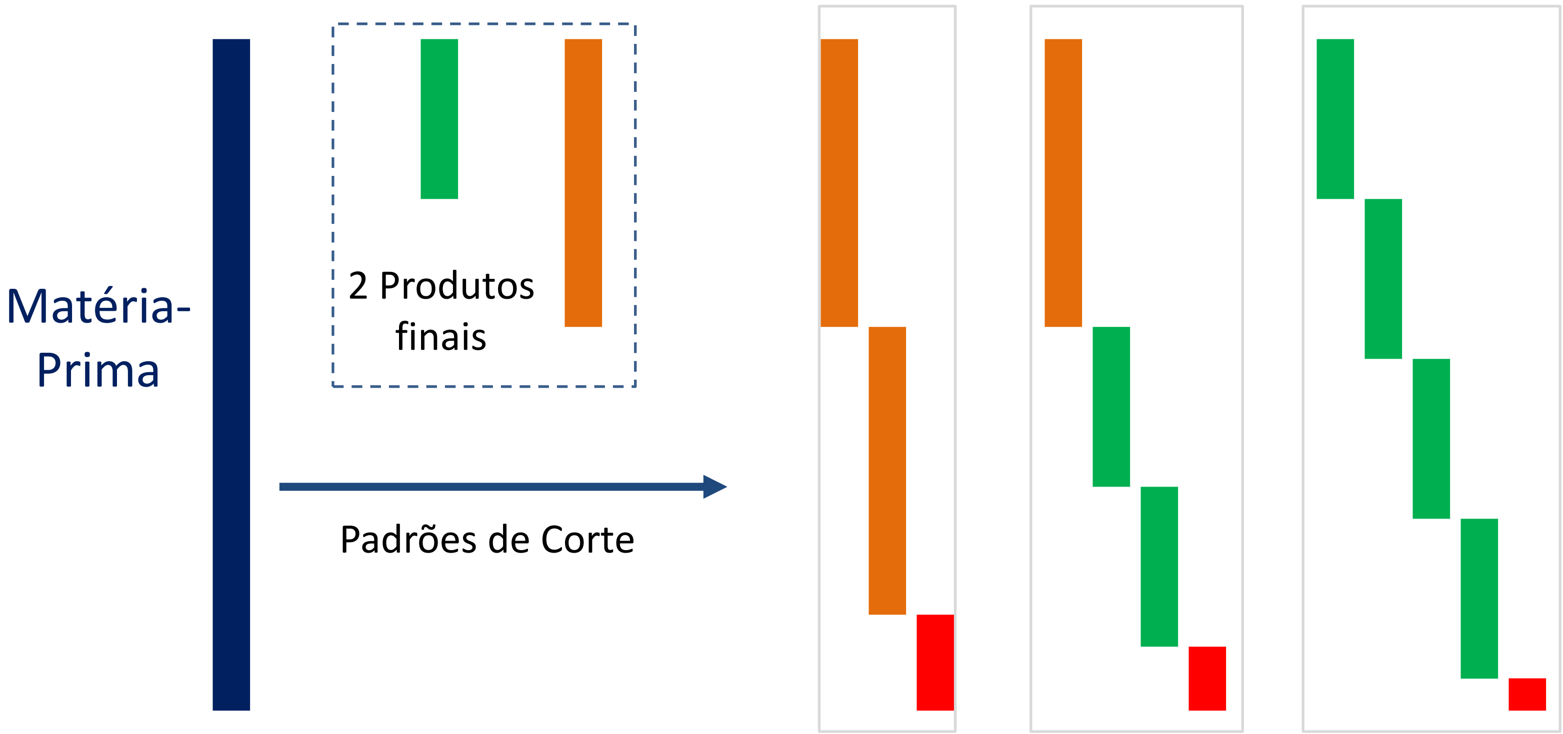
9 - Problema de Corte



Matéria-Prima:
a) Tubos; b) papéis de papel ou têxtil; c) barras; d) varetas ou barras de madeira; e) chapas de aço

Objetivos:
a) minimização da perda total ou a quantidade de matéria-prima cortada
b) maximização do número de produtos montados/acabados/fabricados

9 - Problema de Corte



Variáveis de decisão: O valor da variável determina o número de unidades de materia-prima que será cortada/fatiado de acordo com o correspondente padrão (encontrados a partir de <u>todos</u> os padrões de corte possíveis).

9 - Problema de Corte

Exemplo 1

Uma fábrica necessita cortar uma fita de aço de 12 cm de largura em tiras de 2,4 cm, 3,4 cm e 4,5 cm de largura. As necessidades globais de tiras de cada comprimento são as seguinte

Tira	Largura (cm)	Demanda
1	2,4	2500
2	3,4	4500
3	4,5	8000

Formule um modelo que permita otimizar o consumo da fita a ser cortada, minimizando a perda de material.

...cont⇒

...continuação

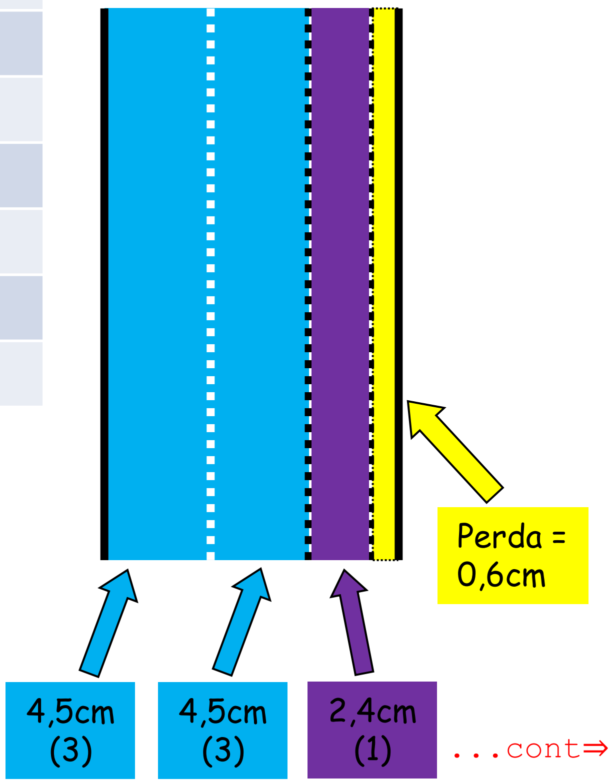
9 - Problema de Corte

Exemplo 1

Precisamos determinar todos os padrões de corte possíveis de uma fita.

Padrão	Tiras 1	Tiras 2	Tiras 3	Perda (cm)
1	5	0	0	0,0
2	3	1	0	1,4
3	3	0	1	0,3
4	2	2	0	0,4
5	1	0	2	0,6
6	0	3	0	1,8
7	0	2	1	0,7
...	...	...	...	...

Padrão 5



Considerando apenas 7 padrões de corte

...cont⇒

...continuação

9 - Problema de Corte

Exemplo 1

i) **Variáveis de decisão:**

x_j: é o número de fitas de 12 cm cortadas usando o padrão j, j = 1,...,7

ii) **Equações** (considerando apenas 7 padrões de corte)

Função objetivo: (perdas por sobras + perdas por tiras desnecessárias)

minimizar $Z = 1{,}4\ x_2 + 0{,}3\ x_3 + 0{,}4\ x_4 + 0{,}6\ x_5 + 1{,}8\ x_6 + 0{,}7\ x_7 +$

$+ 2{,}4\ (5\ x_1 + 3\ x_2 + 3\ x_3 + 2\ x_4 + x_5 - 2500) +$

$+ 3{,}4\ (x_2 + 2\ x_4 + 3\ x_6 + 2\ x_7 - 4500) +$

$+ 4{,}5\ (x_3 + 2\ x_5 + x_7 - 8000)$

Padrão	Tiras 1	Tiras 2	Tiras 3
1	5	0	0
2	3	1	0
3	3	0	1
4	2	2	0
5	1	0	2
6	0	3	0
7	0	2	1

Restrições

Restrições de demanda por tipo de tira:

$5\ x_1 + 3\ x_2 + 3\ x_3 + 2\ x_4 + x_5 \geq 2500$ Tira 1

$x_2 + 2\ x_4 + 3\ x_6 + 2\ x_7 \geq 4500$ Tira 2

$x_3 + 2\ x_5 + x_7 \geq 8000$ Tira 3

Todas as quantidades produzidas são não-negativas:

$x_j \in Z^+$, j = 1,...,7

Tira	Largura (cm)	Demanda
Tira 1	2,4	2500
Tira 2	3,4	4500
Tira 3	4,5	8000

iii) **Programa Linear Inteiro-PLI**

...cont⇒

...continuação

9 - Problema de Corte

Exemplo 1B

i) **Variáveis de decisão:**

x_j: é o número de fitas de 12 cm cortadas usando o padrão j, j = 1,...,7

ii) **Equações** (considerando apenas 7 padrões de corte)

Função objetivo: (perdas por sobras + perdas por tiras desnecessárias)

minimizar $Z = 1{,}4\ x_2 + 0{,}3\ x_3 + 0{,}4\ x_4 + 0{,}6\ x_5 + 1{,}8\ x_6 + 0{,}7\ x_7 +$
$+ 2{,}4\ E1 + 3{,}4\ E2 + 4{,}5\ E3$

Padrão	Tiras 1	Tiras 2	Tiras 3
1	5	0	0
2	3	1	0
3	3	0	1
4	2	2	0
5	1	0	2
6	0	3	0
7	0	2	1

Restrições

Restrições de demanda por tipo de tira:

$5\ x_1 + 3\ x_2 + 3\ x_3 + 2\ x_4 + x_5 - E1 = 2500$ Tira 1

$x_2 + 2\ x_4 + 3\ x_6 + 2\ x_7 - E2 = 4500$ Tira 2

$x_3 + 2\ x_5 + x_7 - E3 = 8000$ Tira 3

Todas as quantidades produzidas são não-negativas:

x_j , E1, E2, E3 $\in Z^+$, j = 1,...,7

Tira	Largura (cm)	Demanda
Tira 1	2,4	2500
Tira 2	3,4	4500
Tira 3	4,5	8000

iii) **Programa Linear Inteiro-PLI**

...continuação

9 - Problema de Corte

Exemplo 2

A empresa Movelar deseja programar a produção de 2 brinquedos de madeira: i) mesinha; e ii) casinha. Para produzir estes dois brinquedos usa a seguinte matéria-prima: a) tábua de madeira; b) parafusos; c) tempo.

Ocorrerá uma exposição/feira com possíveis vendas em 20 dias. Deseja-se determinar quanto produzir de cada brinquedo com o objetivo de maximizar o lucro (todos os produtos serão vendidos).

	Mesinha	Casinha	Disponiblidade
Preço	26 \$	57 \$	
Tábua 30 cm	1	2	desconhecido
Tábua 25 cm	1	4	desconhecido
Parafusos	8	16	3 000
Tempo	30 min	60 min	8 horas por dia
Tábua 1,1 m	-	-	500
Tábua 1,4 m	-	-	150

...cont⇒

9 - Problema de Corte

Exemplo 2

Modelagem

Padrões de Corte

	Tábua de 1,1 m				Tábua de 1,4 m				
Padrão No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Tábua 30 cm	3	2	1	-	4	3	2	1	-
Tábua 25 cm	-	2	3	4	-	2	3	4	5
Perda	20	-	5	10	20	-	5	10	15
Variável	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9

Mesa	Casa
x_{10}	x_{11}

Considerando apenas 9 padrões de corte

Variáveis de decisão:

x_j, $j \in \{1,2,3,...,9\}$ quantas vezes o padrão j será usado
x_{10} quantidade de mesinhas que será produzida
x_{11} quantidade de casinhas que será produzida

...cont⇒

9 - Problema de Corte

Exemplo 2

ii) **PLI**

Só maximizando o lucro com a venda dos 2 produtos

Max $Z = 26x_{10} + 57x_{11}$

sa $3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 1x_8 + 0x_9 \geq x_{10} + 2x_{11}$

$0x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 \geq x_{10} + 4x_{11}$

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 500$

$1x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 1x_8 + 1x_9 \leq 150$

$8x_{10} + 16x_{11} \leq 3000$

$30x_{10} + 60x_{11} \leq 9600$

$x_j \in Z^+$

	Mesinha – x_{10}	Casinha – x_{11}
Tábua 30 cm	1	2
Tábua 25 cm	1	4
Parafusos	8	16
Tempo	30 min	60 min

Considerando apenas 9 padrões de corte

Tábua de 1,1 m				Tábua de 1,4 m					Mesa	Casa
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
0	0	0	160	80	1	0	0	0	0	160

Lucro	**9.120,00 $**

...continuação

9 - Problema de Corte

Exemplo 2

ii) **NO EXCEL**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Padrões/Produtos	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
2	Função Objetivo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26	57
3	Tabuas 30 cm	3	2	1	0	4	3	2	1	0	-1	-2
4	Tabuas 25 cm	0	2	3	4	0	2	3	4	5	-1	-4
5	Tabuas 1,1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	Tabuas 1,4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
7	Parafusos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	16
8	Tempo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30	60

F.Objetivo	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B2:L2)		
Tabuas 30 cm	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B3:L3)	>=	0
Tabuas 25 cm	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B4:L4)	>=	0
Tabuas 1,1	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B5:L5)	<=	500
Tabuas 1,4	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B6:L6)	<=	150
Parafusos	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B7:L7)	<=	3000
Tempo	=SOMARPRODUTO(B$1:L$1;B8:L8)	<=	9600

10 - Problema da Mochila

Exemplo 1

Um viajante dispõe de n itens que deve selecionar para colocar em uma mochila que está sendo preparada para uma viagem. O peso do item j é igual a_j e o "lucro" obtido caso ele seja selecionado e colocado na mochila é igual a c_j, para j=1,...,n. Quais itens devem ser selecionados, sabendo-se que o peso máximo que o viajante pode carregar na mochila é igual a b?

Modelagem

Variáveis de decisão: x_j: quantidade selecionada do item j

Caso (1): os itens podem ser fracionados e não há limite na quantidade selecionada

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sa} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

Caso (2): os itens podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sa} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \\ & 1 \geq x_j \geq 0, \; j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

...cont⇒

10 - Problema da Mochila

...continuação

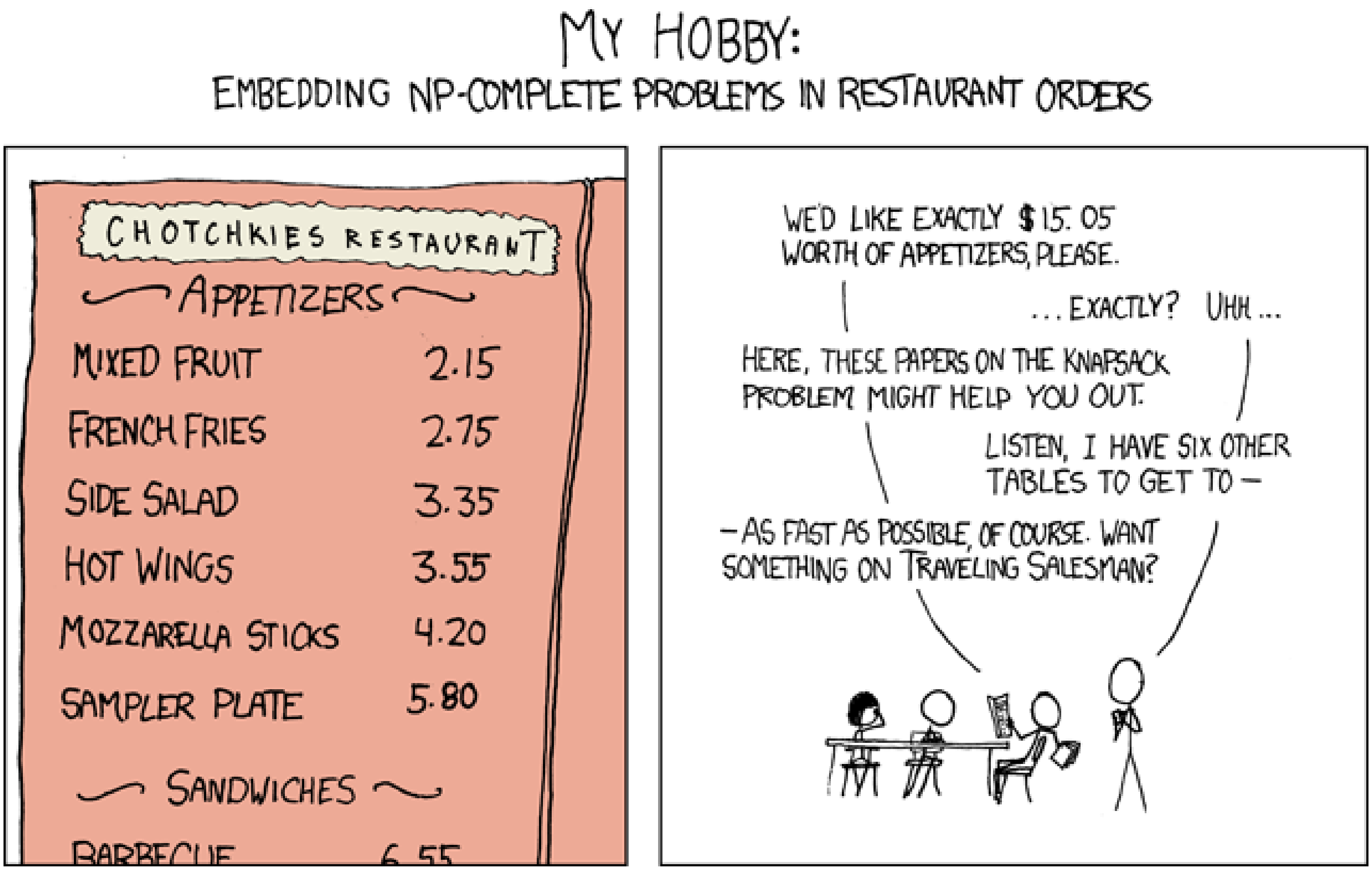
Exemplo 1

Caso (3): os itens não podem ser fracionados e no máximo uma unidade de cada item pode ser selecionada

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{sa} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\
& x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

10 - Problema da Mochila

Exemplo 2



...cont⇒

10 - Problema da Mochila

...continuação

Exemplo 2

Formulação

Variáveis:

x_i: número de aperitivos i

PLI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{6} x_i \\
\text{sa} \quad & 2{,}15x_1 + 2{,}75x_2 + 3{,}35x_3 + 3{,}55x_4 + 4{,}20x_5 + 5{,}80x_6 = 15{,}05 \\
& x_i \in Z^+
\end{aligned}
$$

Processos

Exemplo

Uma fábrica utiliza dois tipos de insumos:

- A, a um curso unitário C_A e com uma quantidade máxima disponível D_A;
- B , a um custo unitário C_B e com uma quantidade máxima disponível D_B.

Estes insumos podem ser processados pelos processos I, II e III a um custo operacional nulo. Serão produzidos os produtos α, β e γ, que alcançaram preços de venda P_α, P_β e P_γ, respectivamente (preços unitários).

- Uma unidade de A processada em I produz, simultaneamente, 5 α e 1γ
- Uma unidade de A junto com duas unidades de B conjuntamente processadas em II produz, simultaneamente 3α, 9β e 8γ
- Uma unidade de B processada em III produz simultaneamente 1α, 4β e 1γ

Formule o problema como programação linear de modo a maximizar o lucro

Programação Estocástica

- Programas estocásticos são programas matemáticos, onde alguns dos dados incorporados no objetivo ou as restrições são incertos.

- A incerteza é geralmente caracterizada por uma distribuição de probabilidade dos parâmetros. Embora a incerteza é rigorosamente definido, na prática, pode variar em detalhes de alguns cenários (resultados possíveis dos dados) a distribuições específicas e precisas de probabilidade conjunta.

- Quando alguns dos dados são aleatórios, então soluções e o valor objetivo ótimo para o problema de otimização são também eles próprios aleatórios. A distribuição das decisões ótimas é geralmente não implementável (o que você diria ao seu chefe?). Idealmente, gostaríamos de uma decisão e de um valor objetivo ótimo.

http://users.iems.northwestern.edu/~jrbirge/html/dholmes/StoProIntro.html

Programação Estocástica

A partir de duas matérias-primas, *raw1* e *raw2*, pode-se produzir simultaneamente dois produtos diferentes, *prod1* e *prod2*. Os produtos (por unidade das matérias-primas), bem como os custos unitários das matérias-primas $c=(c_{raw1}, c_{raw2})^T = (2, 3)^T$ as demandas dos produtos $h=(h_{prod1},h_{prod2})^T = (180, 162)^T$ e a capacidade de produção resultam no seguinte pl determinístico.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } \gamma = (2x_{raw1} + 3x_{raw2}) & \\
\text{sa} \quad x_{raw1} + x_{raw2} \leq 100 & \quad \text{(capacidade de produção)} \\
2x_{raw1} + 6x_{raw2} \geq 180 & \quad \text{(demanda mínima do produto } prod1\text{)} \\
3x_{raw1} + 3x_{raw2} \geq 162 & \quad \text{(demanda mínima do produto } prod2\text{)} \\
x_{raw1}, x_{raw2} \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Cuja solução é $x_{raw1} = 36$, $x_{raw2} = 18$, $\gamma = 126$

O problema de produção é apropriadamente formulado e resolvido desde que as produtividades, os custos unitários, as demandas e a capacidade são dados fixos e conhecidos antes de tomar a decisão sobre o plano de produção. No entanto, isto não é sempre uma hipótese realista. Pode acontecer que, pelo menos, algum dado - produtividade e demanda, por exemplo, - pode variar dentro de certos limites (para nossa discussão, aleatoriamente) e a tomada de decisão a respeito do plano de produção deve ser tomada antes de conhecer os valores exatos dos dados.

Peter Kall, Stein W. Wallace: **Stochastic Programming**, 1th Edition, John Wiley&Sons, Zurich, 1994

http://stoprog.org/sites/default/files/files/ka-wal-94.pdf

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

Para ser mais específico, vamos supor que:

- o modelo descreve o processo de produção semanal de uma refinaria que depende de dois países para o fornecimento de petróleo bruto (*raw1* e *raw2*, respectivamente), fornecendo gasolina (*prod1*) a uma grande empresa para o seu sistema de distribuição nos postos de gasolina e outro com óleo combustível (*prod2*) para as instalações de aquecimento e/ou de energia;
- sabe-se que as produtividades π(*raw1*, *prod1*) e π(*raw2*, *prod2*), isto é, a saída de gasolina de *raw1* e a saída de combustível a partir de *raw2* pode mudar aleatoriamente (ao passo que as outras produtividades são determinísticas);
- simultaneamente, as exigências semanais dos clientes, h_{prod1}, de gasolina, e h_{prod2}, de combustível, estão variando aleatoriamente;
- o plano de produção semanal (x_{raw1}, x_{raw2}) deve ser definido/fixado previamente e não pode ser alterados durante a semana; equanto que
- as produtividades reais são apenas observadas/medidas durante o próprio processo de produção; e
- os clientes esperam que suas demandas reais seja satisfeitas durante a semana correspondente.

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

Suponha que, devido a estatística, sabemos que:

$$h_{prod1} = 180 + \tilde{\xi}_1$$
$$h_{prod2} = 180 + \tilde{\xi}_2$$
$$\pi(raw1, prod1) = 2 + \tilde{\eta}_1$$
$$\pi(raw2, prod2) = 3{,}4 - \tilde{\eta}_2$$

onde as variáveis aleatórias $\tilde{\xi}_j$ são modeladas usando distribuições normais e $\tilde{\eta}_1$ e $\tilde{\eta}_2$ são distribuídos de forma uniforme e exponencial, respectivamente, com os seguintes parâmetros:

$$\text{distr } \tilde{\xi}_1 \sim N(0, 12)$$
$$\text{distr } \tilde{\xi}_2 \sim N(0, 9)$$
$$\text{distr } \tilde{\eta}_1 \sim U[-0{,}8, \;\; 0{,}8]$$
$$\text{distr } \tilde{\eta}_2 \sim Exp(\lambda{=}2{,}5)$$

$N(\mu, \sigma)$ denota a distribuição normal com média μ e variância σ^2.

...cont⇒

Programação Estocástica

Exemplo

Parâmetros:

$$\text{distr } \tilde{\xi}_1 \sim N(0,\ 12)$$
$$\text{distr } \tilde{\xi}_2 \sim N(0,\ 9)$$
$$\text{distr } \tilde{\eta}_1 \sim U[-0{,}8,\ \ 0{,}8]$$
$$\text{distr } \tilde{\eta}_2 \sim Exp(\lambda{=}2{,}5)$$

Para simplificar, vamos supor que estas quatro variáveis aleatórias são independentes entre si. Uma vez que as variáveis aleatórias $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$ e $\tilde{\eta}_2$ são ilimitadas, restringimos nossas considerações aos seus respectivos intervalos de confiança de 99% (exceto para U). Portanto, temos de realizações das variáveis aleatórias, acima

$$\xi_1 \in [-30{,}91,\ \ 30{,}91]$$
$$\xi_2 \in [-23{,}18,\ \ 23{,}18]$$
$$\eta_1 \in [-0{,}8,\ \ 0{,}8]$$
$$\eta_2 \in [0{,}0,\ \ 1{,}84]$$

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

Assim, em vez do programa linear determnístico, deveremos lidar com o programa linear estocástico

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimize } \gamma = (2x_{raw1} + 3x_{raw2}) & & & \\
\text{sa} \quad x_{raw1} + & x_{raw2} & \leq 100 \\
(2 + \tilde{\eta}_1)x_{raw1} + & 6x_{raw2} & \geq 180 + \tilde{\xi}_1 \\
3x_{raw1} + & (3{,}4 - \tilde{\eta}_2)x_{raw2} & \geq 162 + \tilde{\xi}_2 \\
x_{raw1}, & x_{raw2} & \geq 0
\end{array}
$$

Este não é um problema de decisão bem definido, uma vez que não é de todo claro o que o significado de "min" pode ser antes de conhecer uma realização $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$ de $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$.

Infelizmente, esperar a realização dos parâmetros aleatórios e depois escolher a solução ótima, não é o que precisamos. E necessário decidir os planos de produção sob *incerteza*, uma vez que só há informações estatísticas sobre as distribuições das demandas aleatórios e das produtividades.

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

A primeira possibilidade consistiria na procura de um programa de produção "seguro": um que seja viável para todas as realizações possíveis das produtividades e das demandas. Um programa de produção igual a este é denominado de "*fat solution*" e reflete a aversão total ao risco do tomador de decisão. Não surpreendentemente, as "*fat solutions*" são geralmente bastante caras. No exemplo, é necessário resolver o pl determinístico

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{minimize } \gamma = (2x_{raw1} + 3x_{raw2}) & & & & \\
\text{sa} & x_{raw1} & + & x_{raw2} & \leq 100 \\
 & (1,2)x_{raw1} & + & 6x_{raw2} & \geq 210 \\
 & 3x_{raw1} & + & (1,56)x_{raw2} & \geq 185 \\
 & x_{raw1}, & & x_{raw2} & \geq 0
\end{array}
$$

Considerando $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)=(30, 23, -0{,}8, 1{,}84)$ tem-se $(x_{raw1}, x_{raw2}) = (48{,}51,\ 25{,}29)$ e $\gamma = 172{,}92$.

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

Para introduzir uma outra possibilidade, suponhamos que a refinaria tem feito o seguinte acordo com seus clientes. Em princípio, os clientes esperam que a refinaria satisfaça suas demandas semanais. No entanto, muito provavelmente, de acordo com o plano de produção e os acontecimentos imprevistos que determinam as demandas dos clientes e/ou das produtividades da refinaria - as demandas podem não ser cobertas pela produção, o que gerará custos de "penalidade" para a refinaria. A quantidade não fornecida/escassez será adquirida de outras refinarias do mercado. Estas penalidades devem ser proporcionais à respectiva escassez dos produtos, e suponha que, por unidade de produtos não entregue, as penalidades são: $q_{prod1} = 7$, $q_{prod2} = 12$.

Os custos totais devido à falta de produção/escassez - ou, em geral, devido à quantidade de violação nas restrições - são efetivamente determinados após a observação dos dados aleatórios e são denominados por "*recourse costs*". Em um caso (como o do exemplo) de execução repetida do programa de produção faz sentido – de acordo com o que sabe-se de estatística - aplicar o critério de "valor esperado".

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

Mais precisamente, pode-se desejar encontrar um plano de produção que minimiza a soma da fase original (ou seja, produção) de custos e os "*recourse costs*" esperados. Para formalizar esta abordagem, será adotada a seguinte notação. Em vez das quatro variáveis aleatórias individuais $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$, $\tilde{\eta}_1$ e $\tilde{\eta}_2$, é conveniente usar o vetor aleatório $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)^T$.

Além disso, iremos introduzir para cada uma das duas restrições estocásticos uma variável *recourse* $y_i(\tilde{\xi})$, i = 1,2, que simplesmente mede a falta/escassez correspondente na produção se houver alguma; como a escassez depende das realizações do vetor aleatório $\tilde{\xi}$, o mesmo acontece com a variável *recourse* correspondente, isto é, $y_i(\tilde{\xi})$ são elas próprias variáveis aleatórias.

Seguindo a abordagem esboçada até agora, podemos substituir o modelo estocástico por um programa estocástico bem definido com *recourse*

$$h_1(\tilde{\xi}) = h_{prod1} = 180 + \tilde{\xi}_1, \qquad h_2(\tilde{\xi}) = h_{prod2} = 162 + \tilde{\xi}_2,$$

$$\alpha(\tilde{\xi}) = \pi(raw1,prod1) = 2 + \tilde{\eta}_1, \qquad \beta(\tilde{\xi}) = \pi(raw2,prod2) = 3{,}4 - \tilde{\eta}_2$$

...cont⇒

...continuação

Programação Estocástica

Exemplo

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimize} & \{2x_{raw1} & +\ 3x_{raw2} & +\ E_{\xi}[7y_1(\tilde{\xi}) & +\ 12y_2(\tilde{\xi})]\} & \\
\text{sa} & x_{raw1} & +\ x_{raw2} & & & \leq\ 100 \\
& \alpha(\tilde{\xi})x_{raw1} & +\ 6x_{raw2} & +\ y_1(\tilde{\xi}) & & \geq\ h_1(\tilde{\xi}) \\
& 3x_{raw1} & +\ \beta(\tilde{\xi})x_{raw2} & & +\ y_2(\tilde{\xi}) & \geq\ h_2(\tilde{\xi}) \\
& x_{raw1}, & x_{raw2}, & y_1(\tilde{\xi}), & y_2(\tilde{\xi}) & \geq\ 0
\end{array}
$$

No programa estocástico acima E_{ξ} representa o valor esperado no que diz respeito à distribuição de ξ, e, em geral, entende-se que as restrições estocásticos devem ser atendidas "quase que certamente" (isto é, elas devem ser satisfeitas com probabilidade 1). Note-se que se ξ tem uma distribuição discreta finita $\{(\xi^i, p_i), i = 1, \cdots, r\}$ ($p_i > 0\ \forall i$), então o programa estocástico é apenas um programa linear ordinário:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimize} & \{2x_{raw1} & +\ 3x_{raw2} & +\ \sum_i p_i[7y_1(\xi^i) & +\ 12y_2(\xi^i)]\} & \\
\text{sa} & x_{raw1} & +\ x_{raw2} & & & \leq\ 100 \\
& \alpha(\xi^i)x_{raw1} & +\ 6x_{raw2} & +\ y_1(\xi^i) & & \geq\ h_1(\xi^i),\ \forall i \\
& 3x_{raw1} & +\ \beta(\xi)x_{raw2} & & +\ y_2(\xi^i) & \geq\ h_2(\xi^i),\ \forall i \\
& x_{raw1}, & x_{raw2}, & y_1(\xi^i), & y_2(\xi^i) & \geq\ 0,\ \forall i
\end{array}
$$

...cont⇒

http://stoprog.org/sites/default/files/files/ka-wal-94.pdf

...continuação

Programação Estocástica

Dependendo do número de realizações de $\tilde{\xi}$, r, o programa linear pode tornar-se (muito) grande em escala, mas sua estrutura de bloco particular é passível de algoritmos especialmente projetados.

Forma Geral

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & g_0(x,\tilde{\xi}) \\ \text{sa} \quad & g_i(x,\xi) \leq 0 \\ & x \in R^n \end{aligned}$$

onde ξ é um vetor aleatório

PODE NÃO SER MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR!!!!!