UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PESQUISA OPERACIONAL

Resolução Gráfica

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

A resolução gráfica é utilizada para resolver problemas de programação linear com duas variáveis (a função objetivo é $f(x,y) = Z = c_1x + c_2y$).

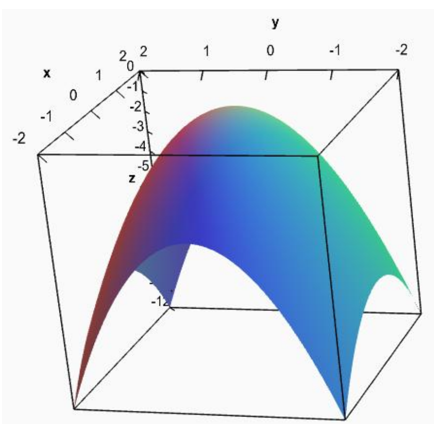
Resolução gráfica é baseada em

- Região viável
- Curva de nível
- Gradiente

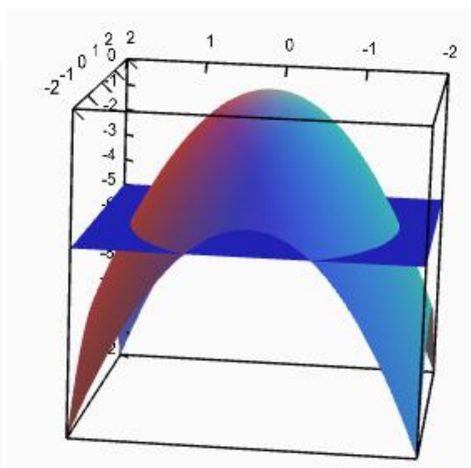
CURVA DE NÍVEL

Curva de nível: Uma curva de nível de f(x,y) é o conjunto de pontos (x,y) onde f(x,y) assume um valor constante. Uma curva de nível é simplesmente uma seção transversal do gráfico de z=f(x,y) tomada em um valor constante z=k. Portanto, as curvas de nível da função z=f(x,y) são curvas bidimensionais que obtemos fixando z=k. Portanto, as equações das curvas de nível são f(x,y)=k onde temos duas variáveis e pode ser representada graficamente no plano xy.

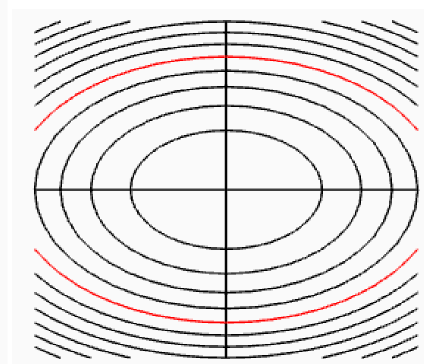
Exemplo 1: $z = -x^2 - 2y^2$



Em R^3



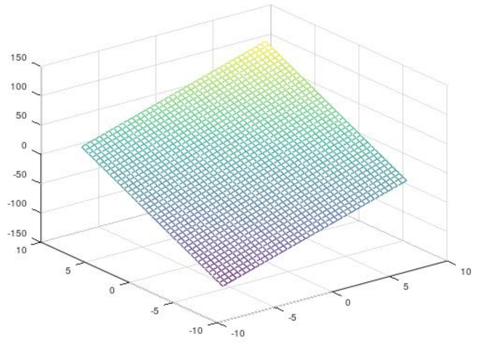
Em R^3



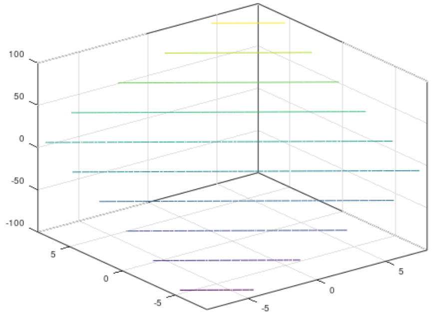
Em R^2

CURVA DE NÍVEL

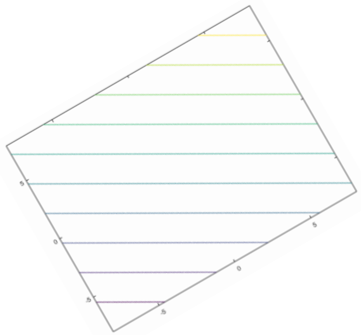
Exemplo 2: $z = 6x + 8y$



Em R^3



Em R^3



Em R^2

GRADIENTE

Gradiente $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ **:** O vetor gradiente de z=f(x,y) num ponto p indica a "direção de maior crescimento" de z a partir de p. O ponto p está no domínio (plano xy) e o gradiente é representado graficamente no domínio da função.

Exemplo 3: $z = -x^2 - 2y^2$

$\nabla z = (-2x, -4y)$ → ∇z variável → o ∇z <u>depende</u> de p=(x_p,y_p)

Exemplo 4: $z = 6x + 8y$

$\nabla z = (6,8)$ → ∇z constante → o ∇z <u>independe</u> de p=(x_p,y_p)

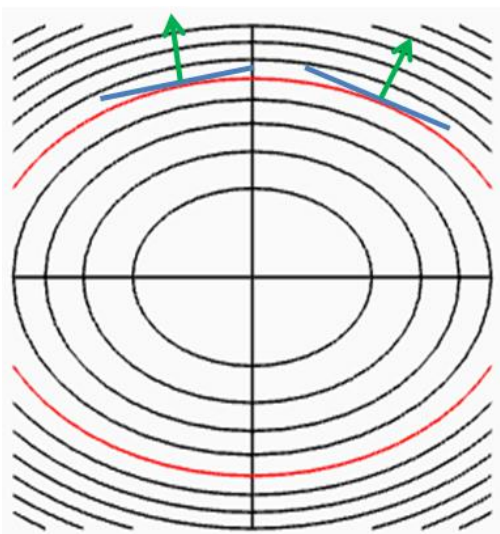
Exemplo 5: $z = c_1 x + c_2 y$

$\nabla z = (c_1, c_2)$

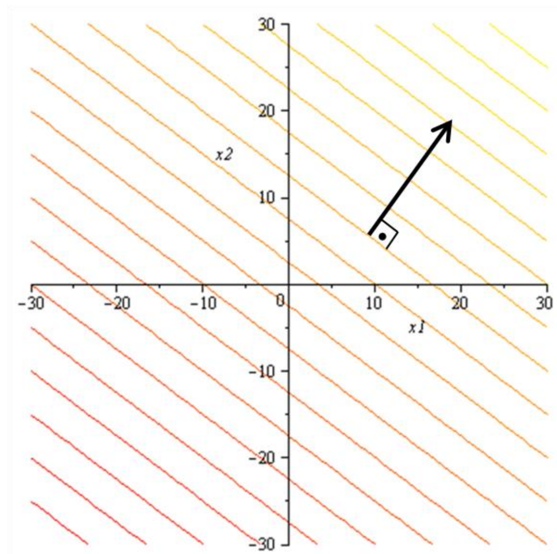
RELAÇÃO GEOMÉTRICA ENTRE CURVA DE NÍVEL E GRADIENTE

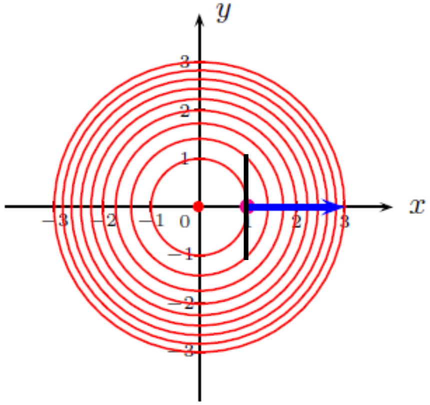
O vetor gradiente $\nabla f(x_p,y_p)$, além de fornecer a direção e sentido de maior crescimento a partir de p, é perpendicular à reta tangente à curva de nível de f(x,y)=k que passa por $p=(x_p,y_p)$

Exemplo 6: $z = -x^2 - 2y^2$

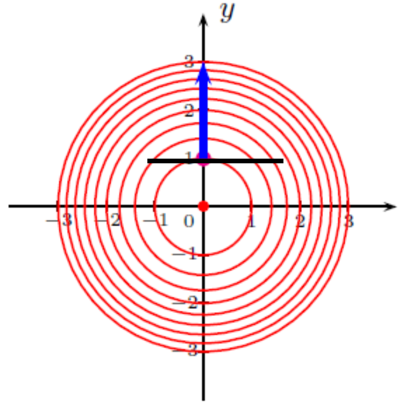


Exemplo 7: $z = 6x + 8y$

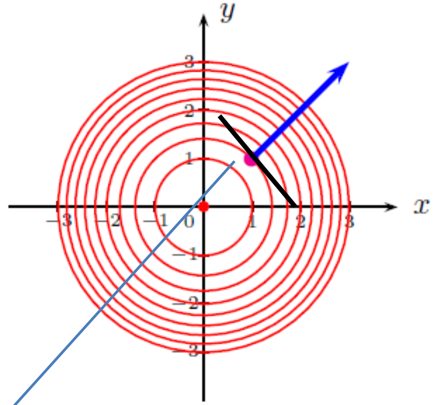




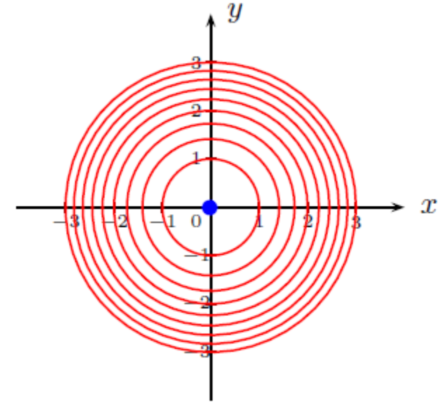
$\nabla f(1{,}0) = (2{,}0)$



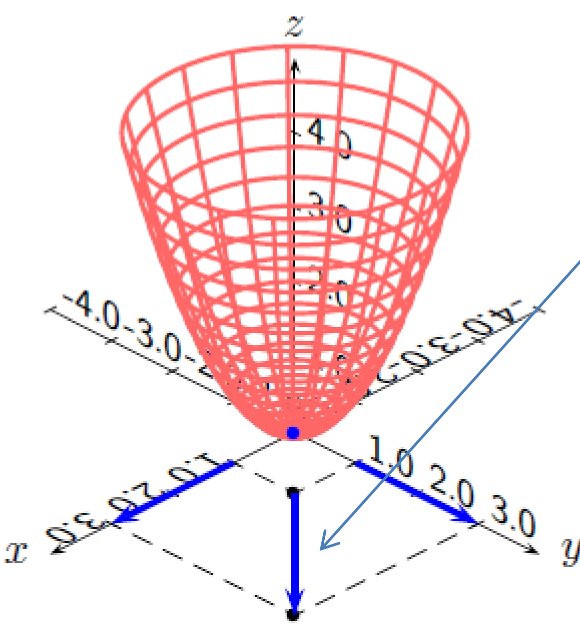
$\nabla f(0{,}1) = (0{,}2)$



$\nabla f(1{,}1) = (2{,}2)$



$\nabla f(0{,}0) = (0{,}0)$



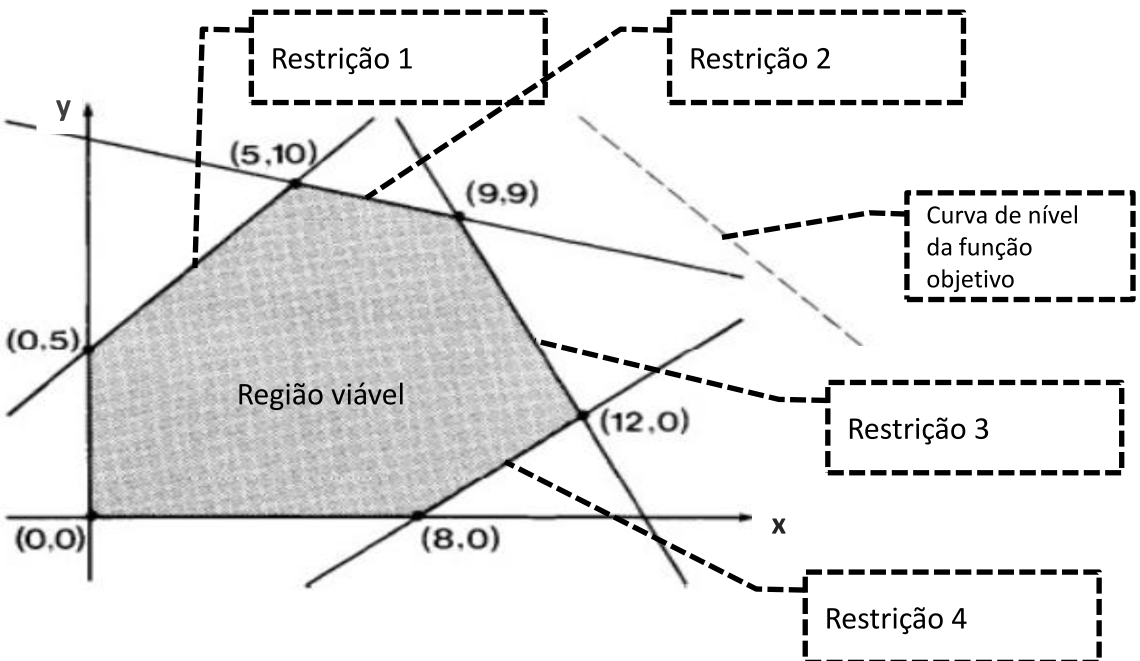
- Curva de nível representada no domínio
- Gradiente representado no domínio
- Gradiente perpendicular a tangente da curva de nível

O gradiente é um vetor que indica a direção na qual a função cresce “mais rapidamente”. No ponto onde a função é mínima/máxima, o vetor gradiente é nulo.

Elementos de um Programa Linear

max	**$Z = 2x + 3y$**	**Função objetivo**
sa	**$-x + y \leq 5$**	**Restrição 1**
	$x + 4y \leq 45$	**Restrição 2**
	$2x + y \leq 27$	**Restrição 3**
	$3x - 4y \leq 24$	**Restrição 4**
	$x, y \geq 0$	**Não negatividade**

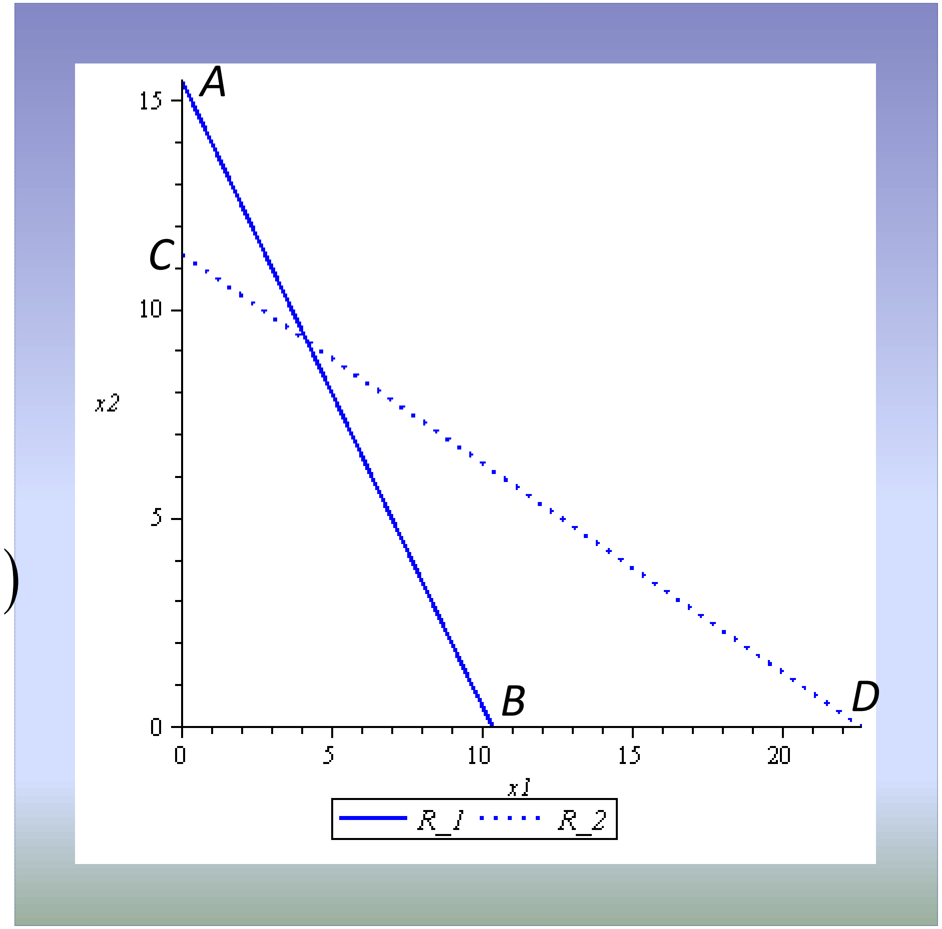
1. **$Z(x, y) = 2x + 3y$ é a função objetivo, e as desigualdades são as restrições.**
2. **Uma solução viável é um valor para variáveis que satisfaz todas as restrições, por exemplo, $(x, y) = (2, 0)$.**
3. **Chamamos as soluções viáveis de conjunto viável ou região viável ou factível.**



Solução gráfica – exemplo 1

$$\begin{array}{lll} \max & Z = & 6x_1 + 8x_2 \\ s.a & & 30x_1 + 20x_2 \leq 310 \\ & & 5x_1 + 10x_2 \leq 113 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

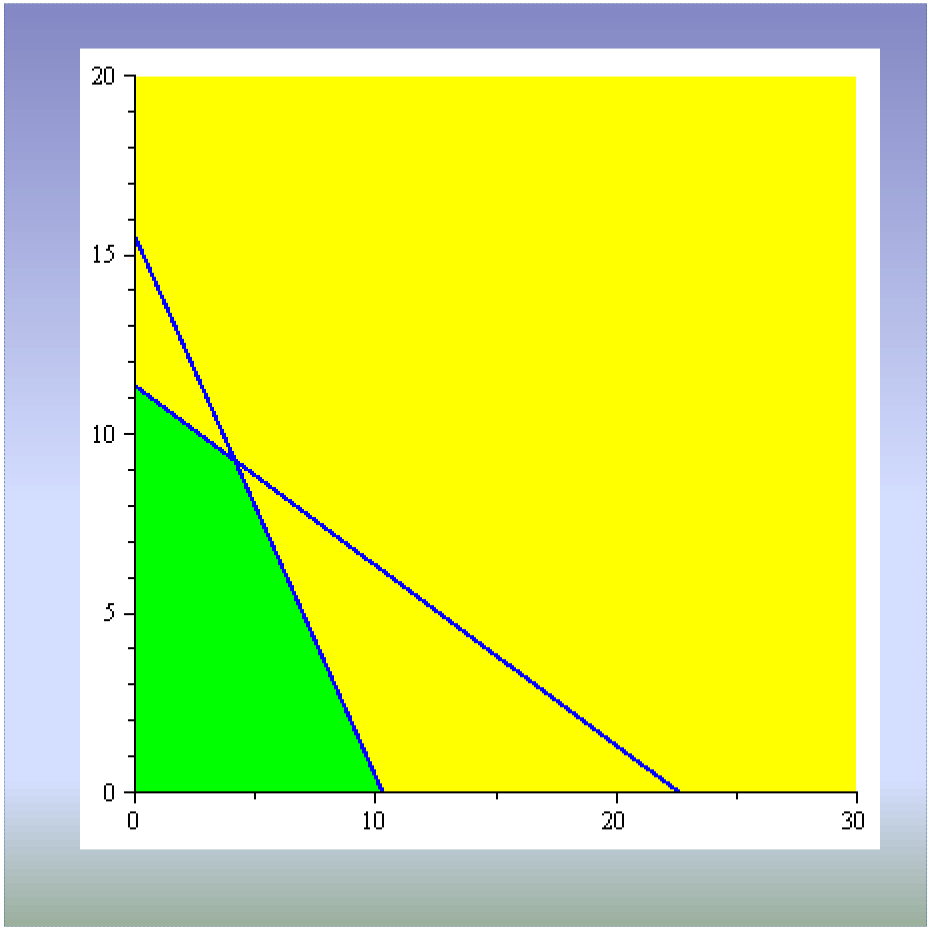
$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 = 310 & A\left(0, \frac{31}{2}\right), B\left(\frac{31}{3}, 0\right) \\ 5x_1 + 10x_2 = 113 & C\left(0, \frac{113}{10}\right), D\left(\frac{113}{5}, 0\right) \end{cases}$$



Solução gráfica – exemplo 1

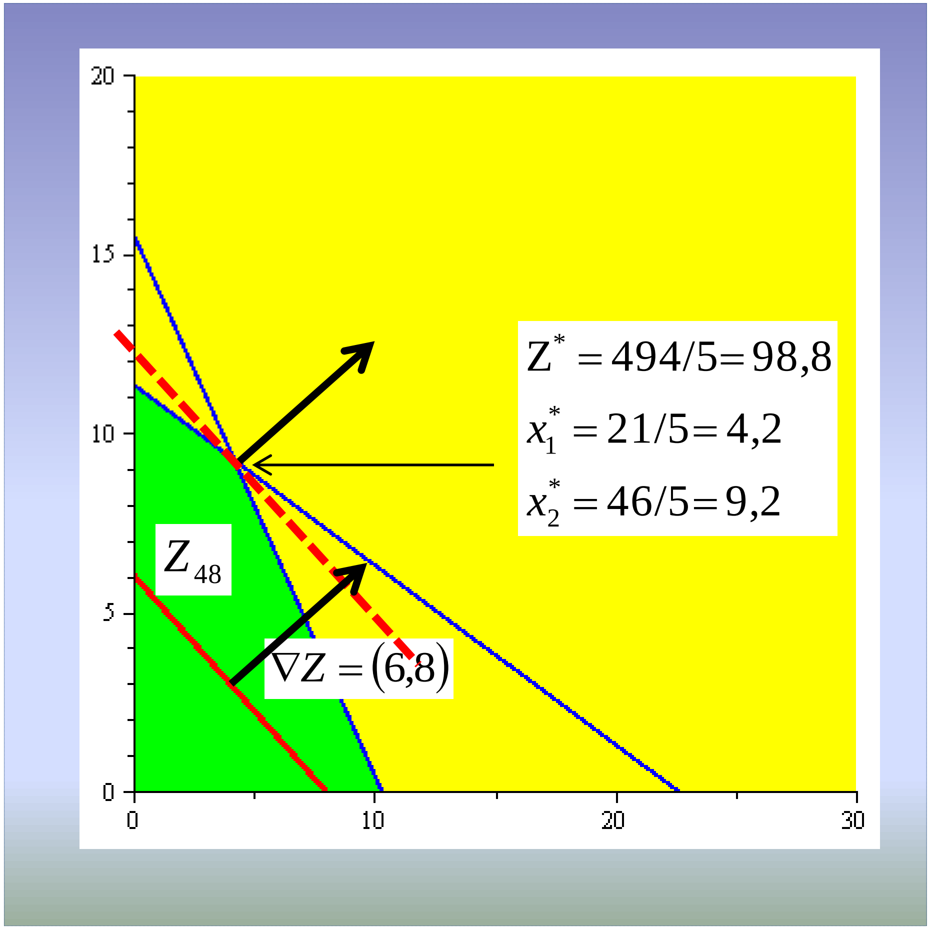
$$\begin{aligned} \max \quad Z = \; & 6x_1 + 8x_2 \\ s.a \quad & 30x_1 + 20x_2 \leq 310 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 113 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leq 310 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 113 \end{cases}$$



Solução gráfica – exemplo 1

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ s.a \quad & 30x_1 + 20x_2 \leq 310 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 113 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} 30x_1 + 20x_2 \leq 310 \\ 5x_1 + 10x_2 \leq 113 \end{cases}$$

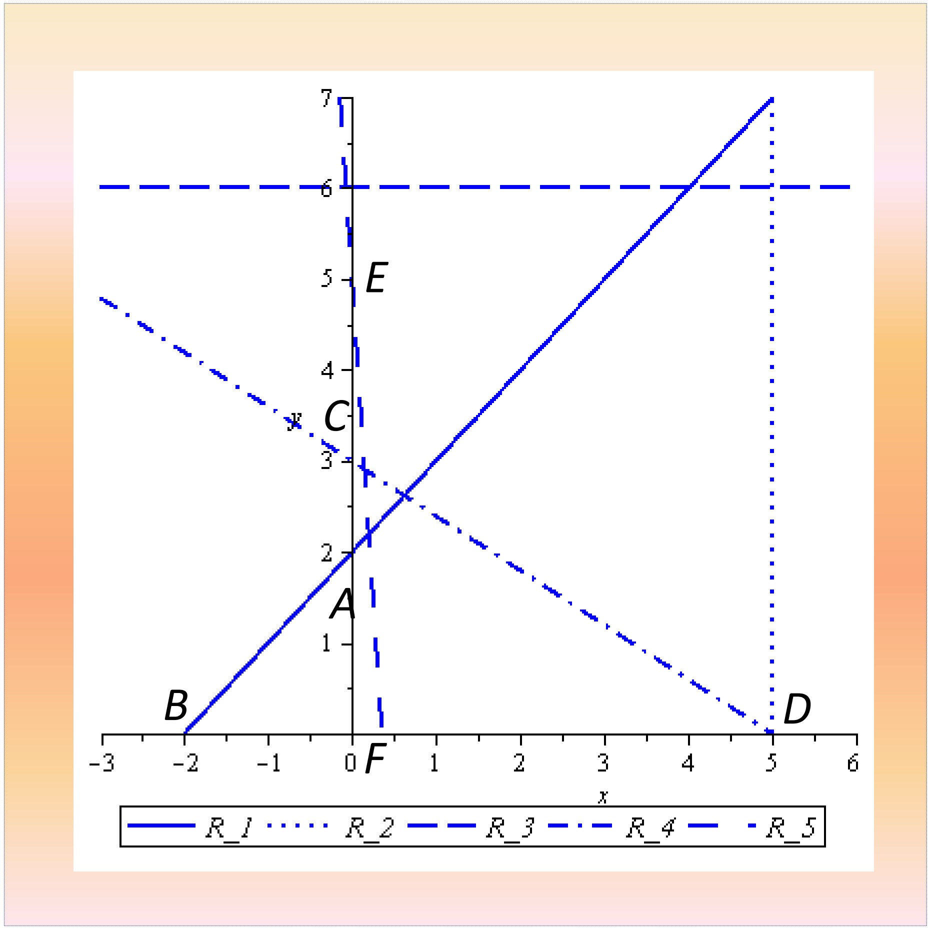
$$\begin{cases} Z_{48} = 6x_1 + 8x_2 = 48 \\ \nabla Z = (6{,}8) \end{cases}$$

Solução única

Solução gráfica – exemplo 2

$$
\begin{array}{lll}
\min & Z = & 6x_1 + 10x_2 \\
s.a & & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& & x_1 \le 5 \\
& & x_2 \le 6 \\
& & 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& & 45x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

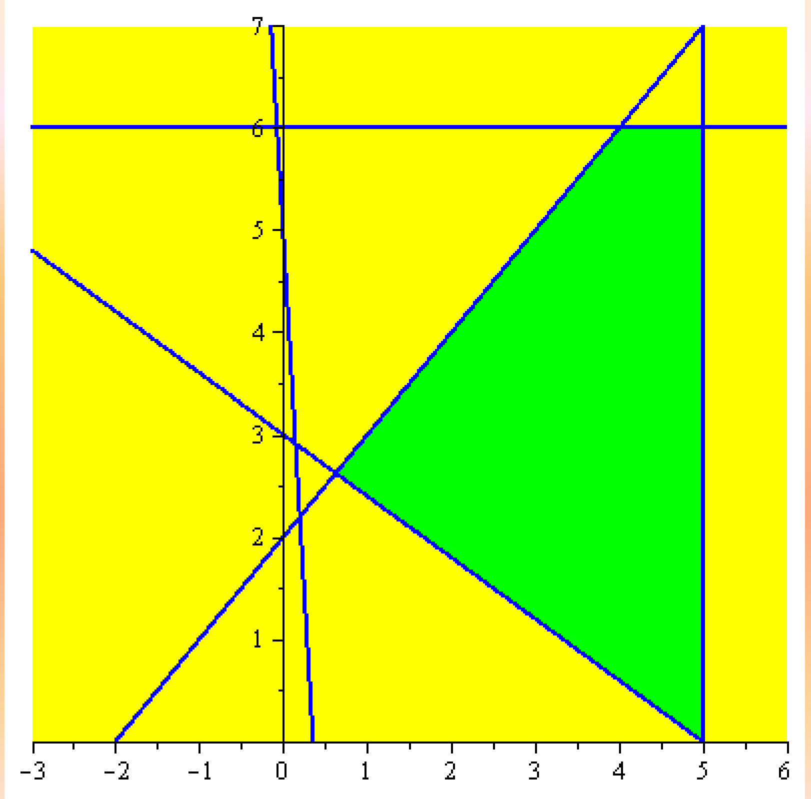
$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 = 2 & A(0,2), B(-2,0) \\
x_1 = 5 & \\
x_2 = 6 & \\
3x_1 + 5x_2 = 15 & C(0,3), D(5,0) \\
45x_1 + 4x_2 = 20 & E(0,5), F\left(\frac{4}{9},0\right)
\end{cases}
$$



Solução gráfica – exemplo 2

$$\begin{aligned} \min \quad Z = \; & 6x_1 + 10x_2 \\ s.a \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 \le 5 \\ & x_2 \le 6 \\ & 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ & 45x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 45x_1 + 4x_2 \ge 20 \end{cases}$$

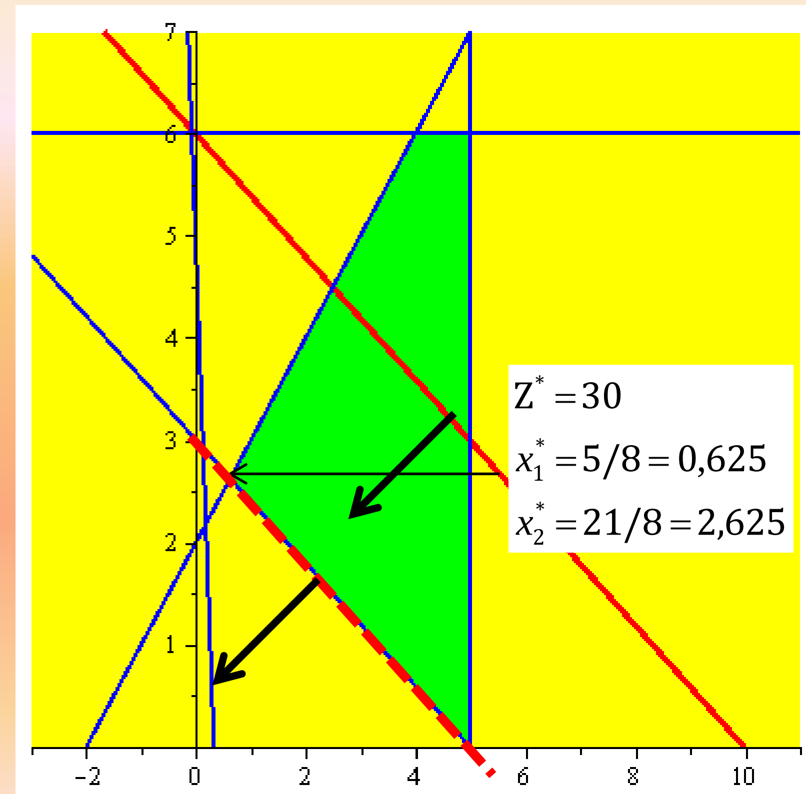


Solução gráfica – exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\min \quad Z = \quad & 6x_1 + 10x_2 \\
s.a \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 \le 5 \\
& x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& 45x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 \le 2 \\
x_1 \le 5 \\
x_2 \le 6 \\
3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
45x_1 + 4x_2 \ge 20
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
Z_{60} = \quad 6x_1 + 10x_2 = 60 \\
\nabla Z = (6{,}10)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
Z^* = 30 \; x_1^* = 40/13 = 3{,}08 \qquad x_2^* = 15/13 = 1{,}15 \\
Z^* = 30 \; x_1^* = 5 \qquad x_2^* = 0
\end{cases}
$$

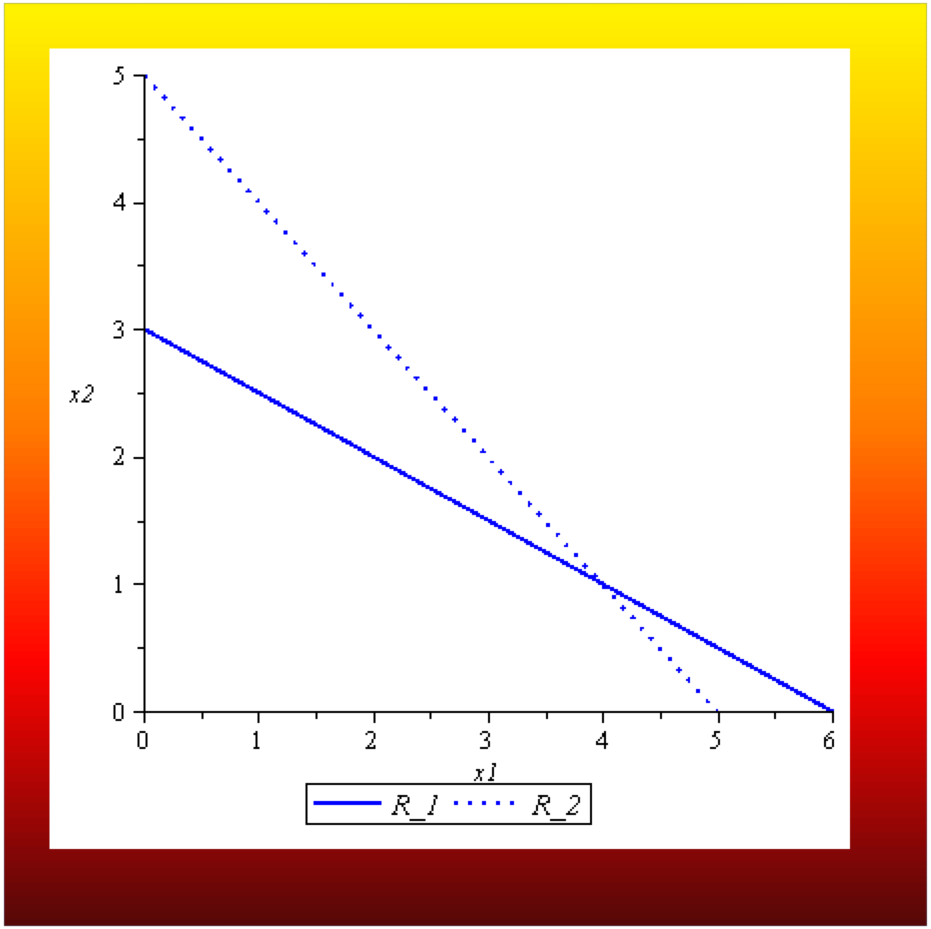


Solução múltipla

Solução gráfica – exemplo 3

$$\begin{aligned} \max \quad Z = \; & 4x_1 + 12x_2 \\ s.a \quad & 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

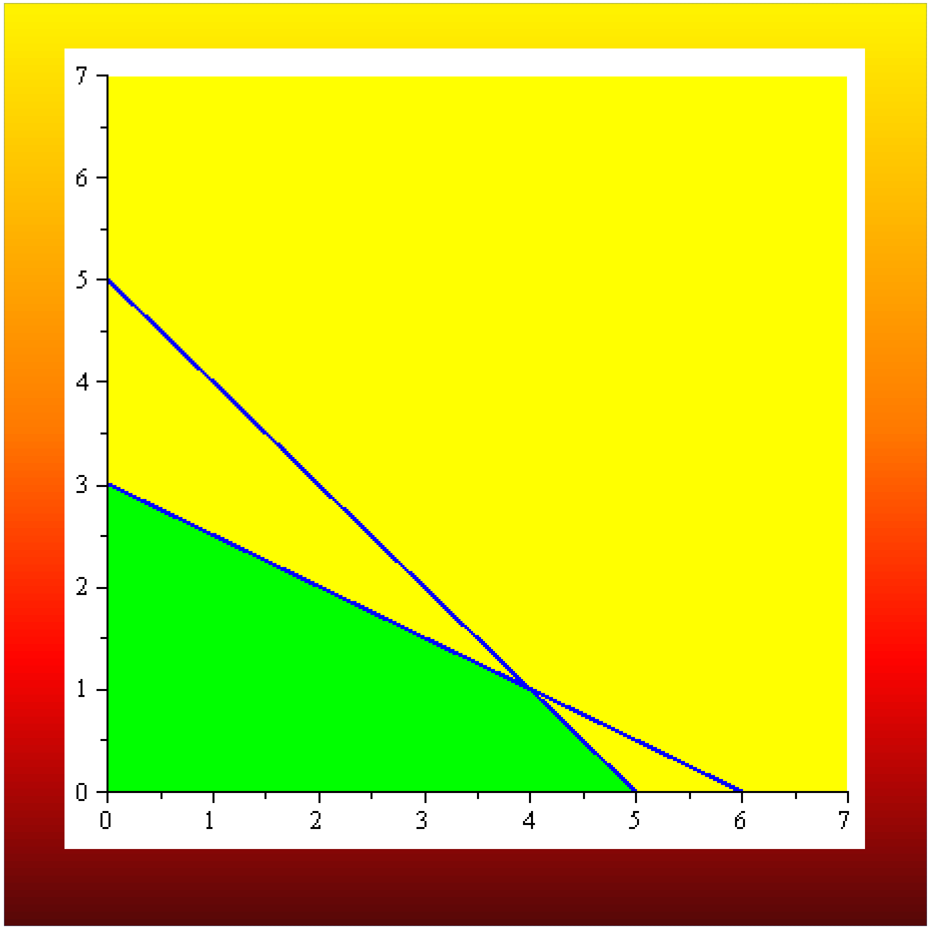
$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 18 & A(0,3), B(6,0) \\ x_1 + x_2 = 5 & C(0,5), D(5,0) \end{cases}$$



Solução gráfica – exemplo 3

$$\begin{aligned} \max \quad Z = \quad & 4x_1 + 12x_2 \\ s.a \quad & 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

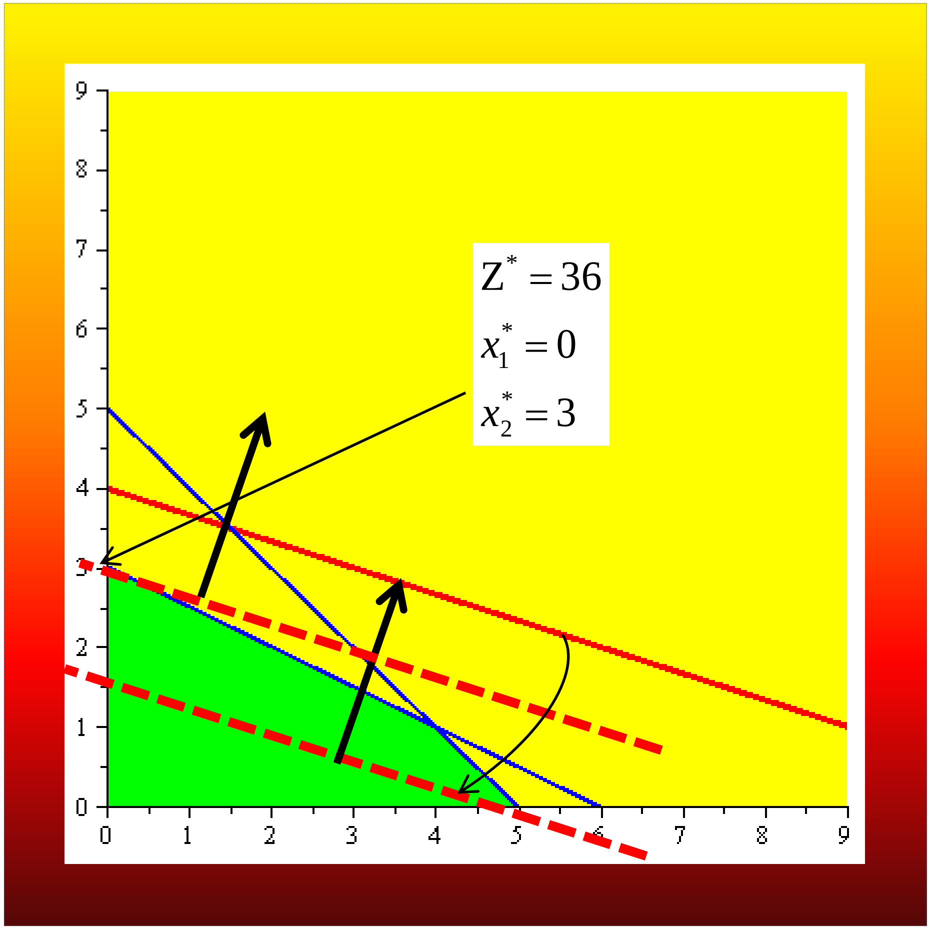


Solução gráfica – exemplo 3

$$\begin{aligned} \max \quad Z = \quad & 4x_1 + 12x_2 \\ s.a \quad & 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{48} = \quad 4x_1 + 12x_2 = 48 \\ \nabla Z = (4{,}12) \end{cases}$$

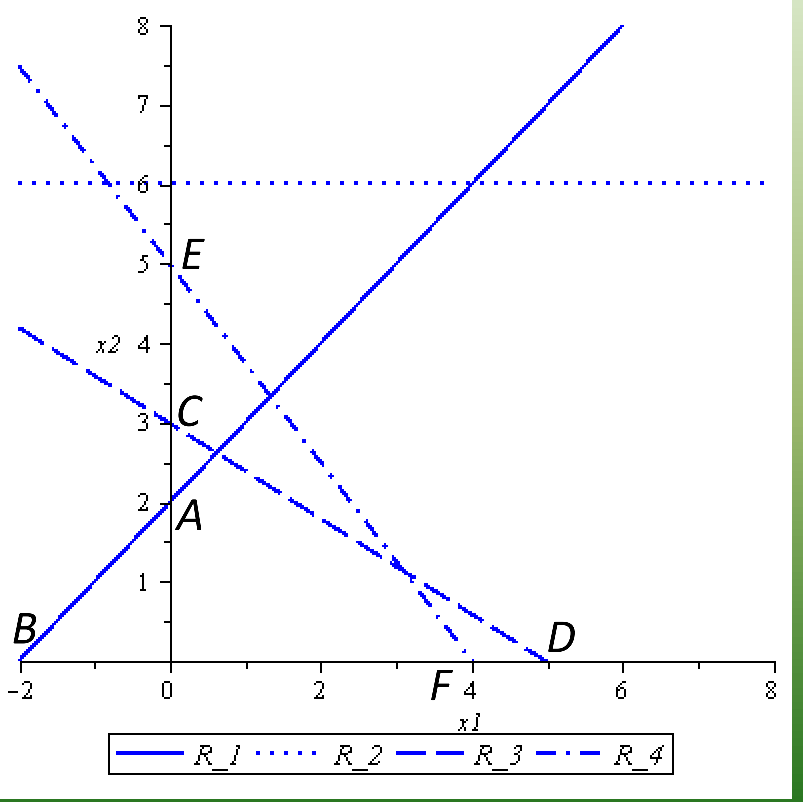


Solução degenerada

Solução gráfica – exemplo 4

$$
\begin{aligned}
\max \quad Z = \quad & 6x_1 + 10x_2 \\
s.a \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_2 \le 6 \\
& 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

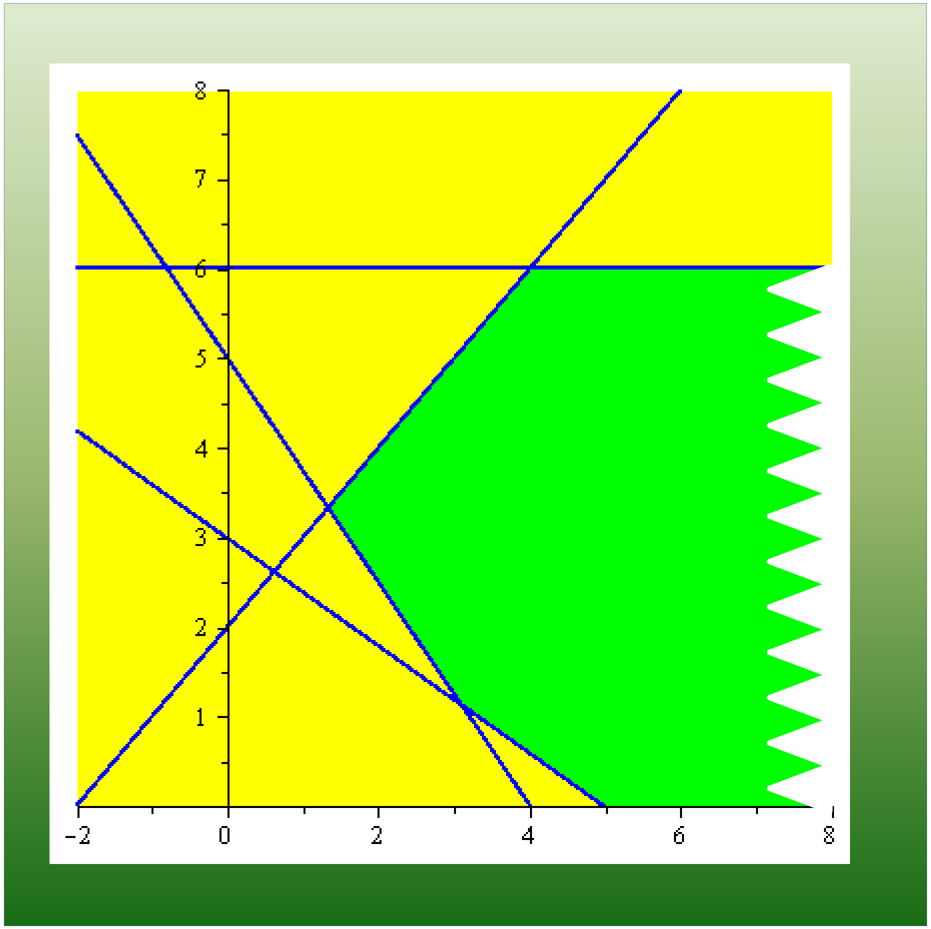
$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 = 2 & A(0,2), B(-2,0) \\
x_2 = 6 & \\
3x_1 + 5x_2 = 15 & C(0,3), D(5,0) \\
5x_1 + 4x_2 = 20 & E(0,5), F(4,0)
\end{cases}
$$



Solução gráfica – exemplo 4

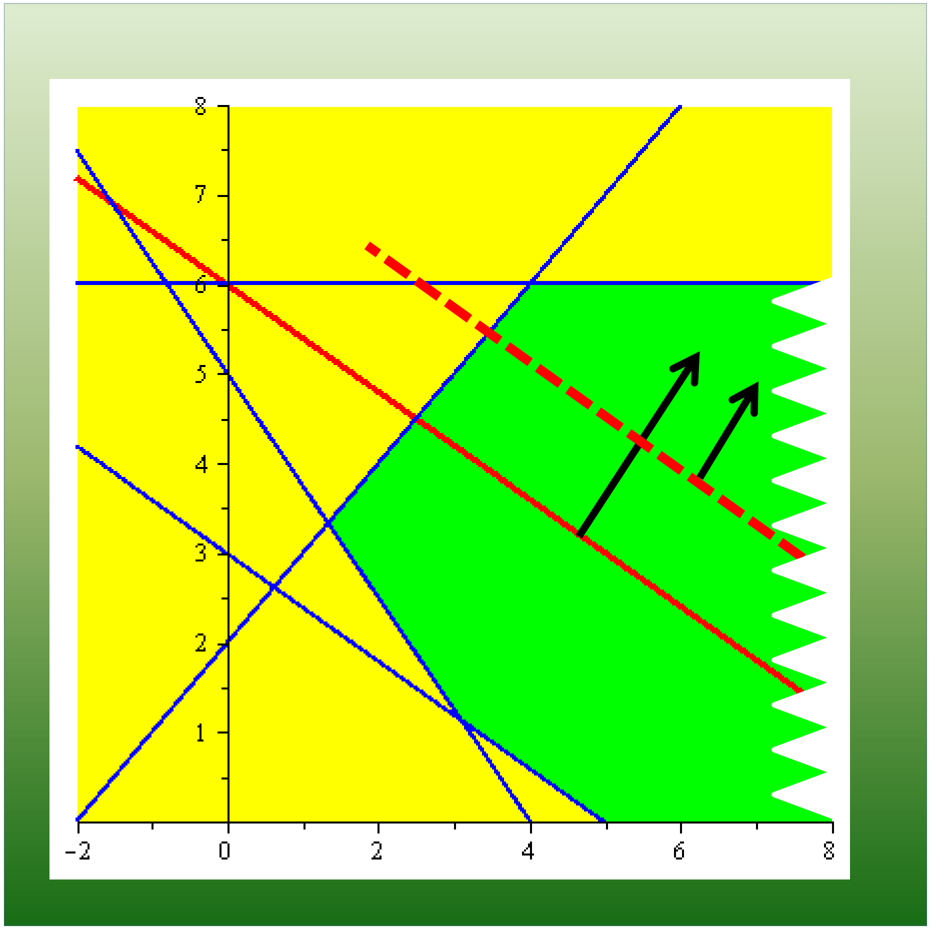
$$\begin{aligned} \max \quad Z = \; & 6x_1 + 10x_2 \\ s.a \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_2 \le 6 \\ & 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ & 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \end{cases}$$



Solução gráfica – exemplo 4

$$\begin{aligned} \max \quad Z = \quad & 6x_1 + 10x_2 \\ s.a \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \end{cases}$$

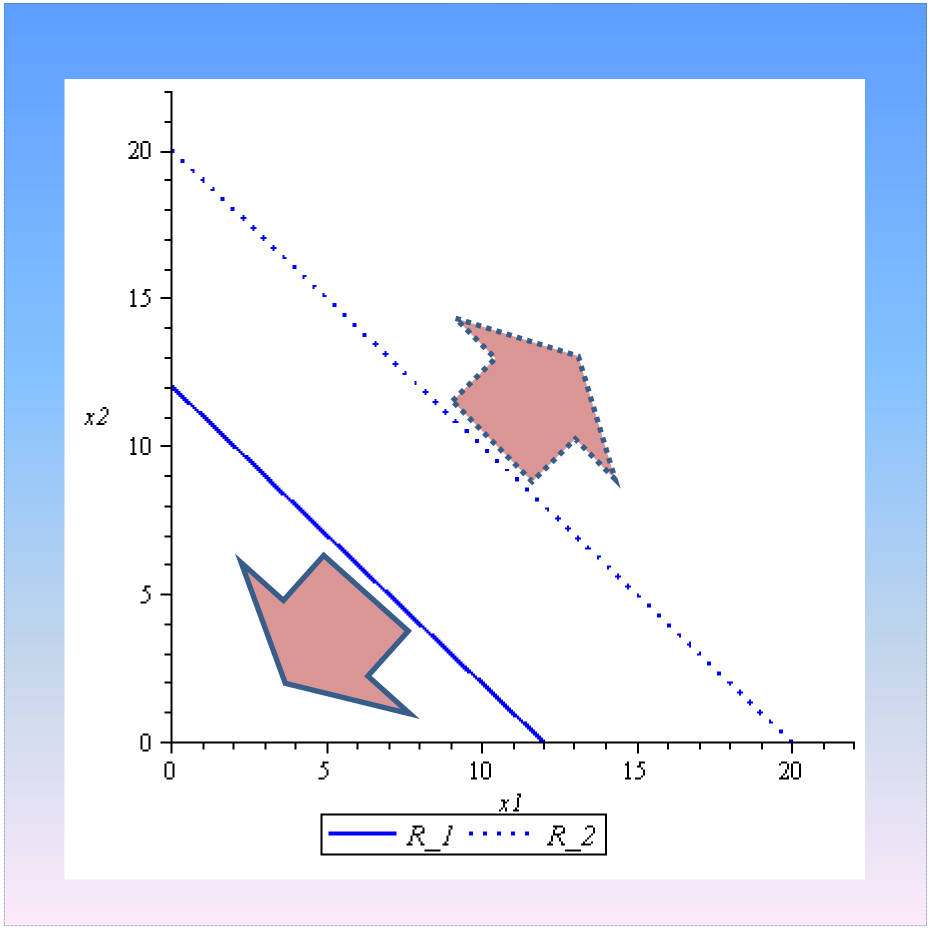
$$\begin{cases} Z_{60} = \quad 6x_1 + 10x_2 = 60 \\ \nabla Z = (6{,}10) \end{cases}$$

Solução ilimitada

Solução gráfica – exemplo 5

$$
\begin{aligned}
\max \quad & Z = x_1 + x_2 \\
s.a \quad & x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1 + x_2 \ge 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Solução inviável



Solução gráfica – Resumo do procedimento

Seja um pl de maximização

I. Desenhe a reta de cada restrição no gráfico xy.

II. Identifique a região de soluções viáveis, isto é, a área do gráfico que simultaneamente satisfaz a todas as restrições.

III. Encontre a solução ótima da seguinte forma:

   a. Desenhe uma ou mais curvas de nível da função objetivo;

   b. Desenhe o gradiente de Z;

   c. Desenhe curvas de nível paralelas na direção indicada pelo gradiente de Z até que uma curva toque a região de soluções viáveis em um único ponto (ou em um segmento). Este último ponto, que é o mais extremo, é a solução ótima.

Solução gráfica – Procedimento – Exemplo 6

Seja o programa linear-pl

$$
\begin{array}{lrl}
\max Z = & 4x_1 + 3x_2 & \\
\text{sa} & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 & (1) \\
 & -3x_1 + 2x_2 \leq 3 & (2) \\
 & 2x_2 \leq 5 & (3) \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 4 & (4) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & (5)
\end{array}
$$

Objetivo: encontrar um par (x_1, x_2) que: (i) satisfaça todas as restrições; e (ii) gera o maior valor para a função objetivo.

Um par de valores específicos (x_1, x_2) é considerado uma solução viável se satisfaz todas as restrições.

- $(x_1, x_2) = (0, 0)$ e $(x_1, x_2) = (1; 1)$ <u>são viáveis</u>. Z(0, 0) = 0 e Z(1, 1) = 7.
- $(x_1, x_2) = (1, -1)$ e $(x_1, x_2) = (1, 2)$ <u>não são viáveis</u> (são inviáveis).

https://www.utdallas.edu/~metin/Or6201/simplex_s.pdf

Solução gráfica – Procedimento – Exemplo 6

(x_1, x_2) é um ponto no sistema de coordenadas xy.

Vamos transformar desigualdades em igualdades e desenhar linhas no sistema de coordenadas xy.

Observe que a linha (1) divide o plano em dois semi-planos: porção viável e porção inviável. Indicamos a porção viável com setas.

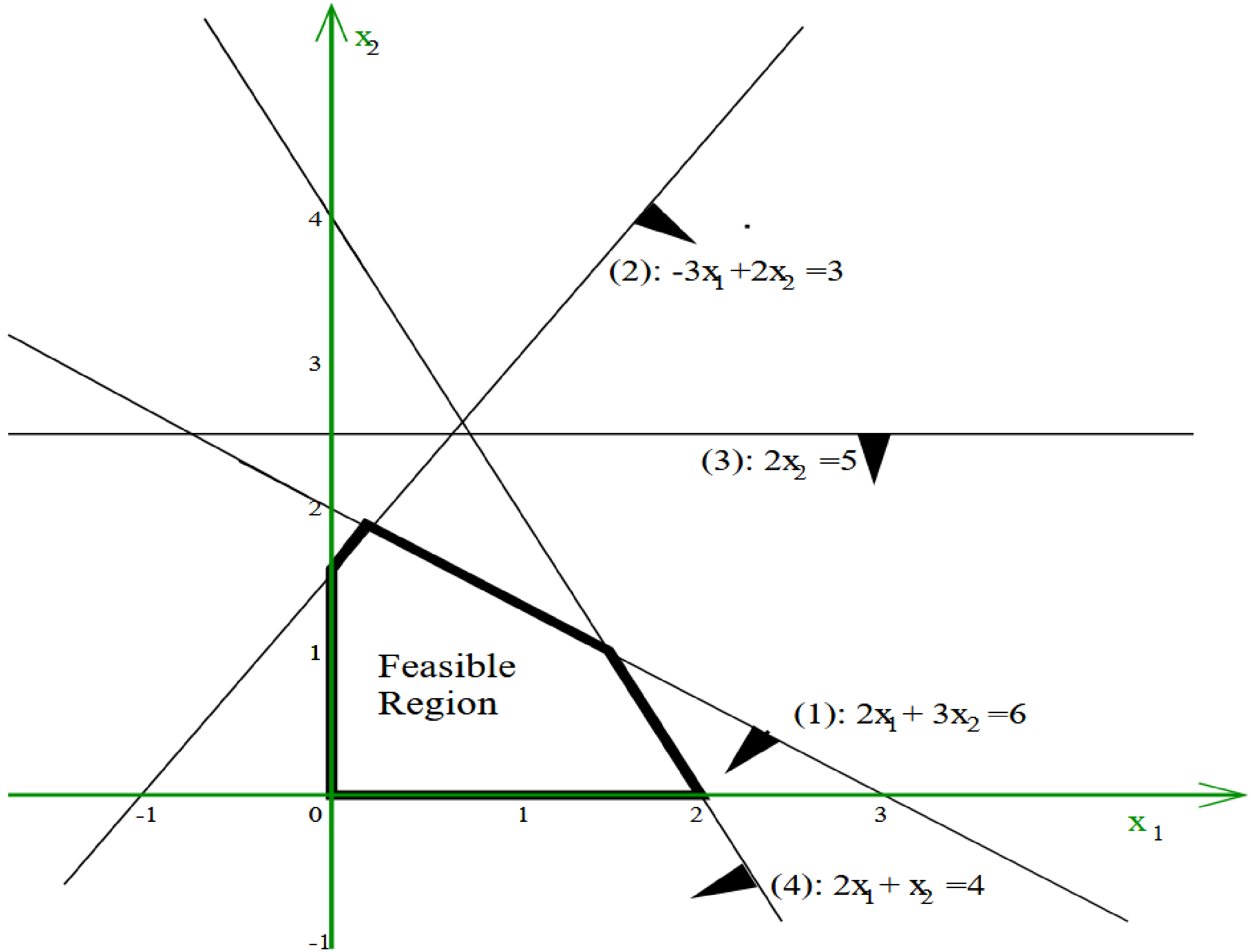
Desenhe as outras linhas (2), (3) e (4) e indique a porção viável para todas as linhas.

A região que está no lado correto de todas as linhas é a **região viável.** Se não houver uma região comum a todas as retas então o pl é inviável.

Observe que a restrição (3) é redundante (ela não é ativa).

https://www.utdallas.edu/~metin/Or6201/simplex_s.pdf

Solução gráfica – Procedimento – Exemplo 6



https://www.utdallas.edu/~metin/Or6201/simplex_s.pdf

Solução gráfica – Procedimento – Exemplo 6

Para qualquer constante dada c, o conjunto de pontos que satisfazem $4x1 + 3x2 = c$ é uma linha reta.

Variando c geramos uma família de linhas (curvas de nível) com a mesma inclinação.

Linha com os menores valores de c estarão mais próximo da região de viabilidade.

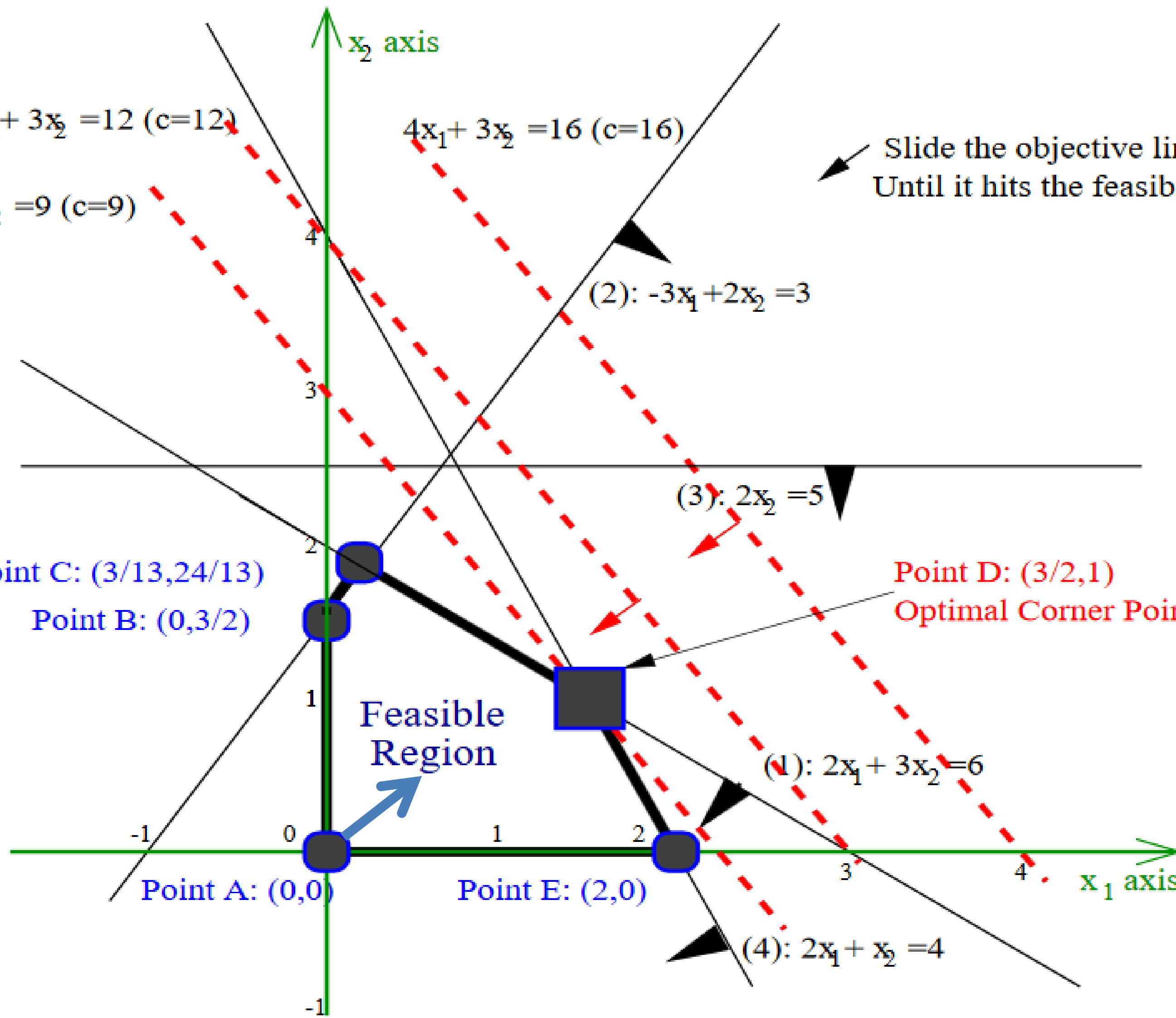
Deve-se diminuir c até encontrar a região viável.

Vértice (ponto extremo) da região viável

O vértice , marcado como D, é a solução ótima. D=(3/2, 1) com Z(3/2, 1)=9.

https://www.utdallas.edu/~metin/Or6201/simplex_s.pdf

Solução gráfica – Procedimento – Exemplo 6



https://www.utdallas.edu/~metin/Or6201/simplex_s.pdf