UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PESQUISA OPERACIONAL

Método Simplex Algébrico

Prof. Volmir Wilhelm

Curitiba, Paraná, Brasil

Método Simplex

Teorema: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto das soluções (viáveis).

Examine uma seqüência de soluções básicas viáveis com o aumento dos valores da função objetivo até que uma solução ideal seja atingida ou seja provado que o PL é ilimitado.
(G. Dantzig, 1947).

Método Simplex

$$
\begin{array}{ll}
\max\ (\min)\ Z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Para ser iniciado, o método simplex necessita conhecer uma solução básica viável (**solução inicial**). **Se** a solução atual **não é ótima**, então o **simplex muda do ponto extremo atual ao ponto extremo adjacente**. Este processo continua até que a solução seja ótima.

Método Simplex

Passo 0: Achar uma solução viável básica inicial.

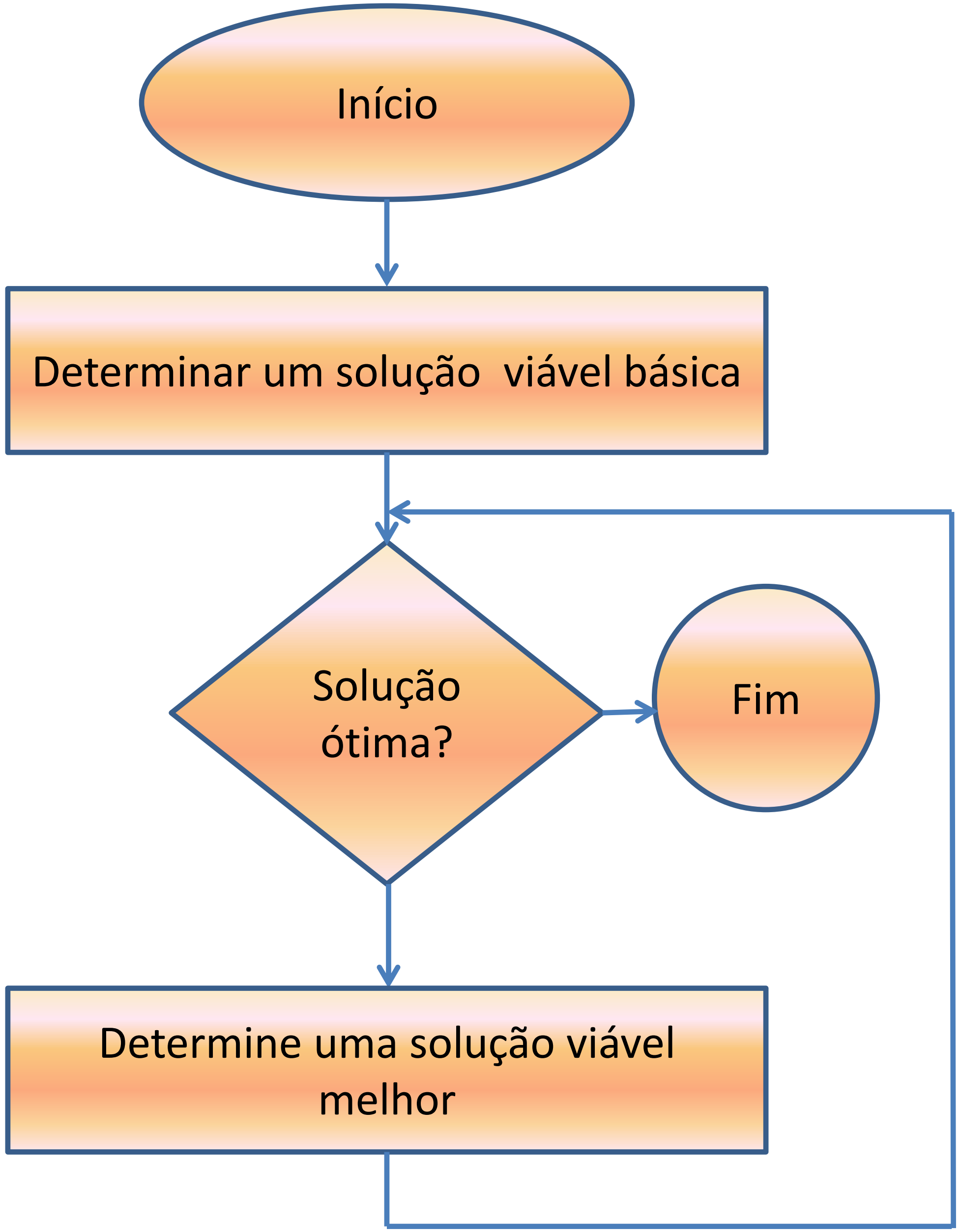
Passo 1: Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.

Passo 2: Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.

Passo 3: Determinar a variável básica que deve sair da base.

Passo 4: Achar a nova solução viável básica, e voltar ao **Passo 1**

Método Simplex



Método Simplex – Técnicas

- Algébrico
- Simplex por Quadros
- Simplex Revisado

Simplex Algébrico – Exemplo 1

$$
\begin{array}{lll}
\max & Z = & x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
sa & & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \\
 & & x_1, \ldots, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Iteração (0) – início – Passo(0)

Variáveis Básicas: x_5 e x_6
Variáveis Não Básicas: x_1, x_2, x_3, x_4

$$
\begin{cases}
x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\
x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4
\end{cases}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,0,0,8,6)$$

continua ...

... continuação

Simplex Algébrico – Exemplo 1

Iteração (1)

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$Z = \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_2 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 3x_2 \geq 0 \\ x_6 = 6 - x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(0, \frac{8}{3}, 0, 0, 0, \frac{10}{3}\right)$$

x_5 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_6
Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_4, x_5

continua ...

Simplex Algébrico – Exemplo 1

... continuação

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

Iteração (2)

$$Z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_4 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}x_4 \geq 0 \\ x_6 = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_4 \leq 1 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,3,0,1,0,0)$$

x_6 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_5, x_6

continua ...

Simplex Algébrico – Exemplo 1

... continuação

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

Iteração (3)

$$Z = 7 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_1 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

x_2 sai da base

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6

continua ...

Simplex Algébrico – Exemplo 1

... continuação

Iteração (4) – término

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + 1x_3 - \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \\ x_4 = 4 - 1x_2 + 1x_3 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{2}{5}x_6 \end{cases}$$

$$Z = \quad 10 - x_2 - 2x_3 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6$$

A solução é ótima?

Sim, pois não existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

$$Z = 10$$

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6