UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PESQUISA OPERACIONAL

Simplex Duas Fases

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Uso do Método Simplex

$$
\begin{array}{llllll}
\max & Z = & 0{,}12x_1 & +0{,}06x_2 & \\
s.a & & x_1 & +2x_2 & \leq 240000 \\
 & & 1{,}5x_1 & x_2 & \leq 180000 \\
 & & x_1 & & \leq 110000 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Folgas

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & Z - & 0{,}12x_1 & -0{,}06x_2 & & & & = 0 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = 240000 \\
 & & 1{,}5x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 180000 \\
 & & x_1 & & & & +x_5 & = 110000 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

0) Achar uma solução viável básica inicial.
a) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.
b) Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.
c) Determinar a variável básica que deve sair da base.
d) Achar a nova solução viável básica, e voltar ao passo **a)**.

Base	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Z	-0,12	-0,06				0	(Bloqueio)
x_3	1	2	1			240000	240000/1
x_4	3/2	1		1		180000	180000/(3/2)
x_5	$\boxed{1}$	0			1	110000 →	11000/1 (min)

Base	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	b	
Z		-0,06			0,12	13200	(Bloqueio)
x_3		2	1		-1	130000	13000/2
x_4		$\boxed{1}$		1	-3/2	15000 →	15000/1 (min)
x_1	1	0			1	110000	

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Z				0,06	0,03	14100
x_3			1	-2	2	100000
x_2		1		1	-3/2	15000
x_1	1			0	1	110000

E se tiver restrições do tipo ‘≥’ e/ou ‘=‘

$$\begin{aligned} \max\ Z = {} & 5x_1 + 2x_2 \\ s.a\quad & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Acrescentar variáveis de folga e excesso

$$\begin{aligned} \max\ Z = {} & 5x_1 + 2x_2 \\ s.a\quad & x_1 + F_1 = 3 \\ & x_2 + F_2 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 - E = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ F_1,\ F_2,\ E \ge 0 \end{aligned}$$

Acrescentar variáveis artificiais (restrições do tipo ≥ e =)

$$\begin{aligned} \max\ Z = {} & 5x_1 + 2x_2 \\ s.a\quad & x_1 + F_1 = 3 \\ & x_2 + F_2 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 - E + A = 9 \\ & x_1,\ x_2,\ F_1,\ F_2,\ E,\ A \ge 0 \end{aligned}$$

Simplex duas fases

Simplex duas fases

$$\begin{array}{llllllll}
\max\ Z = & 5x_1 & +2x_2 & & & & & \\
s.a & x_1 & & +F_1 & & & & =3 \\
 & & x_2 & & +F_2 & & & =4 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & -E & +A & =9 \\
 & x_1, & x_2, & F_1, & F_2, & E, & A & \geq 0
\end{array}$$

- Deveremos procurar excluir a variável artificial da base.
- Isto pode ser feito através do método das Fase I e Fase II.
- Na Fase I deve-se tentar excluir as variáveis artificiais da base resolvendo o ppl com uma nova função objetivo.
- A função objetivo original Z deverá ser substituída por uma nova função formada pela soma ds variáveis artificiais.
- No nosso exemplo a variável artificial foi incluída na terceira restrição, e portanto a função objetivo artificial a ser minimizada (procurando zerar as variáveis artificiais) é $\min W = A$

$$\begin{array}{llllllll}
\min\ W = & & & & & & A & \\
s.a & x_1 & & +F_1 & & & & =3 \\
 & & x_2 & & +F_2 & & & =4 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & -E & +A & =9 \\
 & x_1, & x_2, & F_1, & F_2, & E, & A & \geq 0
\end{array}$$

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W	0	0			0	1	
F_1	1	0	1		0		3
F_2	0	1		1	0		4
A	1	2			-1	1	9

Simplex duas fases

$$\begin{array}{llllllll}
\max\ Z = & 5x_1 & +2x_2 & & & & & \\
s.a & x_1 & & +F_1 & & & & =3 \\
 & & x_2 & & +F_2 & & & =4 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & -E & +A & =9 \\
 & x_1, & x_2, & F_1, & F_2, & E, & A & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\min\ W = & & & & & & A & \\
s.a & x_1 & & +F_1 & & & & =3 \\
 & & x_2 & & +F_2 & & & =4 \\
 & x_1 & +2x_2 & & & -E & +A & =9 \\
 & x_1, & x_2, & F_1, & F_2, & E, & A & \geq 0
\end{array}$$

- Na **FASE I** deve-se tentar excluir as variáveis artificiais da base resolvendo o pl com a nova função objetivo artificial min $W = A$

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W	0	0			0	1	0
F_1	1	0	1		0		3
F_2	0	1		1	0		4
A	1	2			-1	1	9

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W	-1	-2 $\downarrow$			1		-9
F_1	1	0	1		0		3
F_2	0	$\boxed{1}$		1	0		4 $\rightarrow$
A	1	2			-1	1	9

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W	-1 $\downarrow$			2	1		-1
F_1	1		1	0	0		3
x_2	0	1		1	0		4
A	$\boxed{1}$			-2	-1	1	1 $\rightarrow$

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W				0	0	1	0
F_1			1	2	1	-1	2
x_2		1		1	0	0	4
x_1	1			-2	-1	1	1

Simplex duas fases

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W				0	0	1	0
F_1			1	2	1	-1	2
x_2		1		1	0	0	4
x_1	1			-2	-1	1	1

- A solução é ótima e portanto concluímos a Fase I!!!!!!!!!!
- Como W = 0 então uma solução básica viável foi determinada para o pl original.
- A solução viável para o pl original é $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ e $F_1 = 2$.
- Pode-se, portanto, resolver o problema original a partir desta base.
- **OBSERVAÇÃO**: Se W > 0 o problema original seria inviável e o processo de otimização terminaria.

Fim da Fase I

Simplex duas fases

- Sendo o pl viável, parte-se para a FASE II
- Utiliza-se a solução do final da Fase I como solução inicial da Fase II
- Substitui-se a Função W pela função objetivo original Z.
- **OBSERVAÇÃO**: Se o pl é inviável, não há Fase II

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	A	b
W				0	0	1	0
F_1			1	2	1	-1	2
x_2		1		1	0	0	4
x_1	1			-2	-1	1	1

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	b
Z	-5	-2		0	0	0
F_1			1	2	1	2
x_2		1		1	0	4
x_1	1			-2	-1	1

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	b
Z				-8 ↓	-5	13
F_1			1	$\boxed{2}$	1	2 →
x_2		1		1	0	4
x_1	1			-2	-1	1

Pode-se exluir as colunas das variáveis artificiais

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	b
Z			0		-1 ↓	21
F_2			0,5	1	$\boxed{0,5}$	1 →
x_2		1	0		-0,5	3
x_1	1		0		0	3

Base	x_1	x_2	F_1	F_2	E	b
Z			5	2		23
E			1	2	1	2
x_2		1	0	1		4
x_1	1		1	0		3

Simplex duas fases – solução inviável

Problema Inviável (quando, no final da FASE I, permanece alguma variável artificial na base)

$$\begin{array}{llll} \max Z = & x_1 & +2x_2 & \\ s.a & 2x_1 & +2x_2 & =100 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 10 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \min W = & A & & & \\ s.a & 2x_1 & +2x_2 & +A & =100 \\ & x_1 & +3x_2 & +x_3 & =10 \\ & x_1, & x_2, A, x_3 & & \geq 0 \end{array}$$

Base	x_1	x_2	A	x_3	b
W			1		0
A	2	2	1		100
x_3	1	3		1	10

Base	x_1	x_2	A	x_3	b
W	-2 ↓	-2			-100
A	2	2	1		100
x_3	1	3		1	10 →

Base	x_1	x_2	A	x_3	b
W		4		2	-80
A		-1	1	-2	80
x_1	1	3		1	10

Da solução ótima do PPL as variáveis básicas são A (=80) e x_1 (=10). Assim, por termos uma variável artificial na base e W≠0, então o PPL é inviável.