



PESQUISA OPERACIONAL

Método Simplex

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Limitações da programação linear

$$\begin{aligned} \max (\min) Z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

1. Coeficientes constantes
2. Divisibilidade
3. Proporcionalidade
4. Aditividade
5. Parâmetros constantes/precisos (sem incertezas)

Prévia de um algoritmo de otimização

SIMPLEX

1. Obter uma solução básica inicial – a mais trivial e mais fácil
2. Verificar se a solução atual é ótima
3. Se a solução atual não for ótima, procurar outra solução básica
4. Voltar ao passo 2

Questões

- a) Como achar a solução inicial?
- b) Que critério usar para gerar uma nova solução básica?
- c) Como posso saber se a solução atual é ótima?

Formato dos PL's

Formato Geral

$$\begin{aligned} \max (\min) Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.a} \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = b_1 \\ &\dots \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n \leq b_k \\ &\dots \\ &a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + c_{ln}x_n \geq b_l \\ &\dots \\ &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max (\min) Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.a} \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = b_1 \\ &\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n = b_m \\ &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está *na forma padrão*.

maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N$
(minimizar)
sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

...

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N \geq 0$$

Redução à Forma Padrão

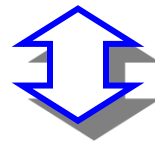
- I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\min Z = -\max (-Z)$$

Redução à Forma Padrão

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo “ \leq ” pode ser convertida numa restrição do tipo “ \geq ” multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iN}x_N \leq b_i$$

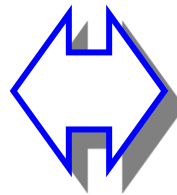


$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{iN}x_N \geq -b_i$$

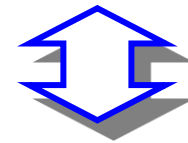
Redução à Forma Padrão

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades “ \leq ” equivalentes àquela.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N = b_i$$



$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\leq b_i \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\geq b_i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N &\leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \dots - a_{iN}x_N &\leq -b_i \end{aligned}$$

Redução à Forma Padrão

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à Forma Padrão*. Para isto é preciso *converter as restrições de desigualdade em restrições equivalentes de igualdade*.

- uma *restrição de desigualdade* de tipo “ \leq ” pode ser convertida numa *restrição de igualdade* adicionando uma nova variável não negativa (**variável de folga**)

x_{N+1} :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$a^t x \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x + F = b \\ F \geq 0 \end{cases}$$

Redução à Forma Padrão

- uma *restrição de desigualdade* de tipo “ \geq ” pode ser convertida numa *restrição de igualdade* subtraindo uma nova variável não negativa (**variável de excesso ou de folga**) x_{N+1} :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N - x_{N+1} = b_i$$
$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$a^t x \geq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Redução à Forma Padrão – Exemplo 1

Forma Geral

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

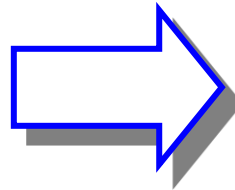
sa

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Forma Padrão

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

As variáveis de folga (e excesso) têm coeficientes nulos na função objetivo

Redução à Forma Padrão – Exemplo 2

IV. Qualquer *variável negativa* x_j , deve ser substituída por uma variável não negativa $x_j = -x'_j$, $x'_j \geq 0$, fazendo:

$$x_j = -x'_j$$

Forma Geral

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$$

Forma Padrão

$$\max Z = -3x'_1 + 5x_2$$

sa

$$-x'_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$-3x'_1 + 2x_2 - x_5 = 18$$

$$x'_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Redução à Forma Padrão

- V. Qualquer *variável livre* x_j , (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituída por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$x_j = x_j' - x_j''$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas novas variáveis.

Após substituir x_j por $x_j' - x_j''$, deleta-se a variável x_j do problema.

Redução à Forma Padrão – Exemplo 3

Forma Geral

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

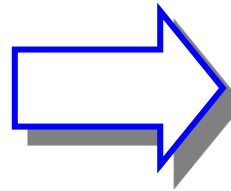
sa

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$

$$x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 0$$



Forma Padrão

$$\max Z = 3(x'_1 - x''_1) + 5x_2$$

sa

$$(x'_1 - x''_1) + x_3 = 4$$

$$2x_2 + x_4 = 12$$

$$3(x'_1 - x''_1) + 2x_2 - x_5 = 18$$

$$x'_1, x''_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Método Simplex

Método Simplex

Teorema: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto das soluções (viáveis).

Examine uma seqüência de soluções básicas viáveis com o aumento dos valores da função objetivo até que uma solução ideal seja atingida ou seja provado que o PL é ilimitado.

(G. Dantzig, 1947).

Método Simplex

$$\begin{aligned} \max (\min) Z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Para ser iniciado, o método simplex necessita conhecer uma solução básica viável (**solução inicial**). **Se** a solução atual **não é ótima**, então o **simplex muda do ponto extremo atual ao ponto extremo adjacente**. Este processo continua até que a solução seja ótima.

Método Simplex

Passo 0: Achar uma solução viável básica inicial.

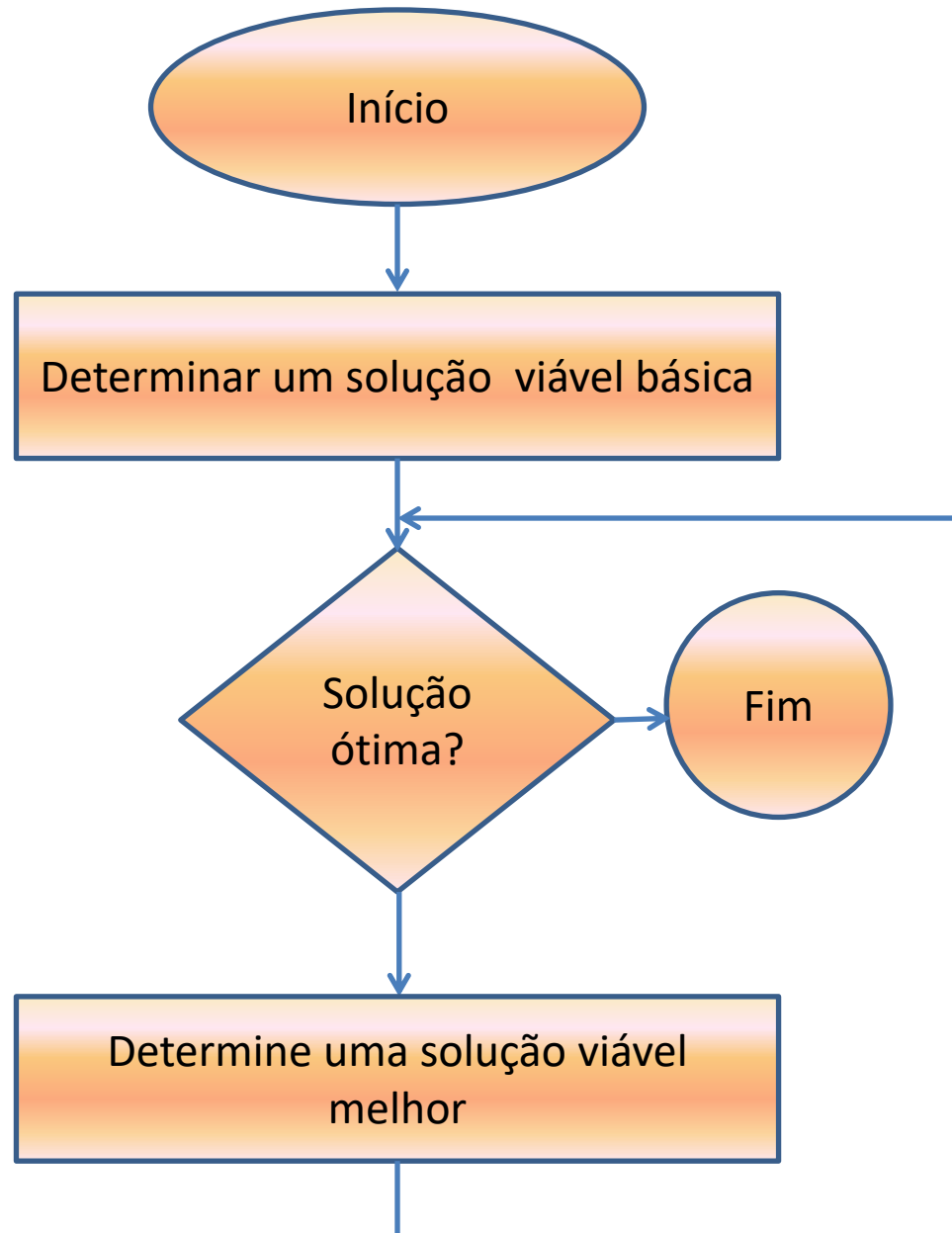
Passo 1: Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.

Passo 2: Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.

Passo 3: Determinar a variável básica que deve sair da base.

Passo 4: Achar a nova solução viável básica, e voltar ao **Passo 1**

Método Simplex



Método Simplex – Técnicas

- Algébrica
- Simplex por Quadros
- Simplex Revisado

Exemplo de uso do Simplex por Quadros

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 2x_1 + 1x_2 \\ \text{sa} & 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max Z = & 2x_1 + 1x_2 \\ \text{sa} & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

continua ...

Exemplo de uso do Simplex por Quadros

... continuação

Base	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2	-1	0	0	0
x_3	3	4	1	0	6
x_4	6	1	0	1	3 \rightarrow

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Teste do Bloqueio: } \frac{\bar{b}_R}{\bar{a}_{RS}} = \min_j \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{jS}}, \bar{a}_{jS} > 0 \right\}$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	$-2/3 \downarrow$	0	1/3	1
x_3	0	7/2	1	-1/2	9/2 \rightarrow
x_1	1	1/6	0	1/6	1/2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	4/21	5/21	13/7
x_2	0	1	2/7	-1/7	9/7
x_1	1	0	-1/21	4/21	2/7

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = \left(\frac{2}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0 \right) \Rightarrow Z^* = \frac{13}{7}$$

Simplex – casos especiais – pl minimização

Problemas de minimização (basta multiplicar a Função Objetivo por -1)

$$\begin{array}{ll}
 \min Z = & x_1 - 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 60 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \max -Z = & -x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 60 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad \text{Solução: } (x_1, x_2) = (0, 20)$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
-Z	1	-2↓			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	3		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
-Z	5/3			2/3	40
x_3	5/3		1	-1/3	20
x_2	1/3	1		1/3	20

Simplex – casos especiais – Solução Única

Problema com única solução (quando no quadro ótimo $\bar{c}_j > 0$, para toda variável x_j não básica)

$$\begin{aligned} \max Z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{Solução única } (x_1, x_2) = (12, 16)$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2↓			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	3		1/3	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1/3↓			2/3	40
x_3	5/3		1	-1/3	20→
x_2	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			1/5	3/5	44
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Simplex – casos especiais – Soluções Múltiplas

Soluções Múltiplas (quando no quadro ótimo algum $\bar{c}_j = 0$, para x_j não básica)

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Soluções múltiplas $(x_1, x_2) = (0, 20)$
 $(x_1, x_2) = (12, 16)$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-3↓			0
x_3	2	1	1		40
x_2	1	3		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0↓			1	60
x_3	5/3		1	-1/3	20→
x_2	1/3	1		1/3	20

Solução básica viável ótima alcançada

x_1 é VNB com coeficiente nulo na função o objetivo ($\bar{c}_1=0$)

Colocando na base x_1 para determinar a outra solução ótima

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z				1	60
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Outra solução básica viável ótima. Observe que o valor da função objetivo não mudou.

Simplex – casos especiais – Solução Ilimitada

Solução Infinita – Solução Ilimitada (quando a solução ainda não é ótima porém não há variável candidata para sair da base)

$$\begin{aligned}
 \max Z = & \quad x_1 \quad + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -\frac{1}{3}x_1 \quad + x_2 \leq 40 \\
 & -x_1 \quad + 3x_2 \leq 60 \\
 & x_1, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Solução ilimitada

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2↓			0
x_3	-1/3	1	1		40
x_4	-1	3		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-5/3↓			2/3	40
x_3	0		1	-1/3	20
x_2	-1/3	1		1/3	20

Simplex – casos especiais – Empate na Entrada

Empate na Entrada (escolha qualquer variável para entrar na base)

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{Solução: } (x_1, x_2) = (12, 16)$$

A) x_1 entra na base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2↓	-2			0
x_3	2	1	1		40→
x_4	1	3		1	60

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z		-1↓	1	0	40
x_1	1	1/2	1/2		20
x_4		5/2	-1/2	1	40→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			4/5	2/5	56
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

B) x_2 entra na base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-2	-2↓			0
x_3	2	1	1		40
x_4	1	3		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-4/3↓			2/3	40
x_1	5/3		1	-1/3	20→
x_4	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			4/5	2/5	56
x_1	1		3/5	-1/5	12
x_2		1	-1/5	2/5	16

Simplex – casos especiais – Degeneração

Empate na Saída – Degeneração (quando uma variável entra na base com valor nulo)

$$\begin{aligned} \max Z = & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{Solução: } (x_1, x_2) = (0, 20)$$

A) x_3 sai da base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2↓			0
x_3	2	2	1		40→
x_4	1	3		1	60

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	1	0	40
x_2	1	1	1/2		20
x_4	-2		-3/2	1	0

B) x_4 sai da base

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2↓			0
x_3	2	2	1		40
x_4	1	3		1	60→

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1/3↓	0		2/3	40
x_3	4/3		1	-2/3	0→
x_2	1/3	1		1/3	20

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z			1/4	1/2	40
x_1	1		3/4	-1/2	0
x_2		1	-1/4	1/2	20



Note que a variável básica x_1 é nula ($b_1 = 0$).
Isso sempre ocorre quando houver empate na saída.

Programação Linear

Método Simplex – Algoritmo - Fluxograma

