PESQUISA OPERACIONAL

Simplex Revisado

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Método Simplex

$$
\begin{aligned}
\max\ (\min)\ Z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.a \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Para ser iniciado, o método simplex necessita conhecer uma solução básica viável (**solução inicial**). **Se** a solução atual **não é ótima**, então o **simplex muda do ponto extremo atual ao ponto extremo adjacente**. Este processo continua até que a solução seja ótima.

Método Simplex - Técnicas

- Algébrica
- Simplex por quadros
- Simplex revisado

Método Simplex Revisado

$$\max \quad Z = \sum_{j=1,n} c_j x_j$$
$$\text{sa} \quad \sum_{j=1,n} a_{ij}\, x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Adicionando as variáveis de folga:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1,n} a_{ij}\, x_j \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

O programa linear-pl na forma canônica em notação matricial:

$$\max \quad Z = cx$$
$$\text{sa} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Método Simplex Revisado

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = cx \\ \text{sa} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde

$$x = [x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}]^T$$

$$c = [c_1, c_2, ..., c_m, 0, 0 ..., 0] \qquad b = [b_1, b_2, ..., b_m]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Método Simplex Revisado

$x = [x_B \;\; x_N]^T$ $\quad c = [c_B \;\; c_N]^T$ $\quad A = [B \;\; N]$

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_B x_B + c_N x_N \\ \text{sa} \quad & B x_B + N x_N = b \\ & x_B \geq 0,\; x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Solução x_B do sistema formado pelas restrições:

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b \qquad \text{ou} \qquad Bx_B = b - Nx_N$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Reescrevendo a função objetivo em função da base x_B:

$$z = c_B x_B + c_N x_N$$

$$z = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N$$

$$z = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)\, x_N$$

Método Simplex Revisado

Coeficientes atualizados das variáveis na função objetivo:

$$z = c_B B^{-1} b + (\underbrace{c_N - c_B B^{-1} N}_{\text{Coeficientes atualizados das variáveis não básicas}}) x_N$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

Solução básica viável associada a esta base:

$$\begin{cases} x_N = 0 \\ x_B = B^{-1} b \end{cases}$$

Método Simplex Revisado

Suponha que x_B é um vetor de variáveis básicas em qualquer iteração. Seja B a matriz formada pelas colunas de x_B da matriz A. Então, podemos obter o quadro simplex para esta iteração utilizando as seguintes equações:

Coeficientes da função objetivo atualizados	$\overline{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j$
Coluna A_j (das restrições) atualizada	$\overline{A}_j = B^{-1} A_j$
Lado direito (b) do quadro simplex atualizado	$\overline{b} = B^{-1} b$
Valor da função objetivo (lado direito da linha (0))	$\overline{Z} = c_B B^{-1} b$

Método Simplex Revisado

Passo 1. Obter a solução base viável inicial x_B. Determine a solução básica viável (SBV) correspondente $\bar{b} = B^{-1}b$

Passo 2. Checar a otimalidade da SBV atual. Se a base atual é ótima, então pare.

Passo 3. Se a SBV atual não é ótima, identifique a variável x_S que deverá entrar na base, dentre $\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} A_j < 0$

Passo 4. Atualizar as colunas A_S e b e executar o teste do bloqueio para determinar a variável x_R que sairá da base, ($\bar{A}_S = B^{-1} A_S$ $\min\left(\bar{b}./\bar{A}_S\right)$)

Passo 5. Atualizar a base x_B, recalcular B^{-1} e ir ao Passo 2.

Valor da função objetivo

$\bar{Z} = c_B B^{-1} b$

Método Simplex Revisado

Algoritmo

Passo 0: Escreva o pl na forma padrão e determine x_B e x_N. Faça $B^{-1} = I$.

Passo 1: Calcule $\bar{c}_N = -c_N - c_B B^{-1} N$. Se $\bar{c}_N \geq 0$, uma solução ótima foi alcançada e pare; caso contrário, vá para o **Passo 2**.

Passo 2: Determine a variável x_K que entra na base: $\bar{c}_K = \min_i\{\bar{c}_i, \bar{c}_i < 0\}$.

Passo 3: Calcule $B^{-1}A_k$. Se $B^{-1}A_k \leq 0$, o pl é ilimitado, então pare; caso contrário, vá para o **Passo 4**.

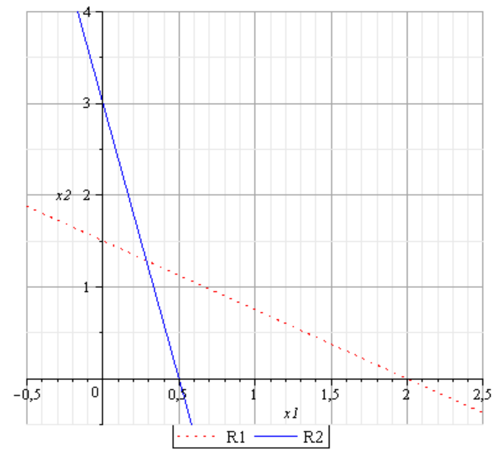
Passo 4: Determine a variável x_L que sai da base: $\frac{\bar{b}_L}{\bar{a}_{LK}} = \min_j\left\{\frac{(B^{-1}A_k)}{(B^{-1}b)}, B^{-1}b > 0\right\}$.

Passo 5: Determine a nova inversa B^{-1} a partir da B^{-1} anterior. Reescreva x_B e x_N. Volte ao **Passo 1**.

Método Simplex Revisado – Exemplo 1

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 2x_1 + 1x_2 \\ sa \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 2x_1 + 1x_2 \\ sa \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ & 6x_1 + 1x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$



$$Ax = b \Rightarrow Nx_N + Bx_B = b \Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N)$$

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \ \ (\text{solução geral})$$

$$\bar{Z} = c_B x_B + c_N x_N = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\max\ Z = \quad & 2x_1 + 1x_2 \\
sa \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\
& 6x_1 + 1x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Usando matrizes, temos

$$c = [2,1,0,0],\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = [6,3]^T,\ x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

<u>Iteração 0)</u>

- $x_B = (x_3, x_4) \Rightarrow x_N = (x_1, x_2)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-2\ -1) - (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = (-2\ -1)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 1

Iteração A)

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_1 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

Atualizar *b* e A_1 para usar o teste do bloqueio

$$\overline{A}_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\overline{b}_R}{\overline{a}_{RS}} = \min_j \left\{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{jS}},\ \overline{a}_{jS} > 0 \right\} \right)$$

$$\min_j \left\{ \frac{6}{3}, \frac{3}{6} \right\} = \frac{3}{6} \Rightarrow x_4 \text{ sai da base}$$

- $x_B = (x_3, x_1) \Rightarrow c_B = (0,-1) \Rightarrow x_N = (x_2, x_4)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-1,0) - (0,-2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 1

Iteração B)

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_2 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

  Atualizar *b* e A_2 para usar o teste do bloqueio

$$\overline{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

x_3 sai da base

- $x_B = (x_2, x_1) \quad \Rightarrow x_N = (x_3, x_4)$
- $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$
- Atualizar c_N

$$\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (0,0) - (-1,-2)\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{21}, \frac{5}{21}\right)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 1

Iteração C)

- Solução Ótima? **SIM**
- $x_B = \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$
- $\left(x^*{}_1, x^*{}_2, x^*{}_3, x^*{}_4\right) = \left(\frac{2}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0\right) \Rightarrow Z^* = \frac{13}{7}$
- $Z^* = -c_B B^{-1} b + \left(c_N - c_B B^{-1} N\right) x_N = -(-2, -1) \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 = \frac{13}{7}$

Método Simplex Revisado – Exemplo 2

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = \ & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Usando matrizes, temos

$$c = [4,3,6,0,0],\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = [30,40]^T,\ x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$$

Iteração 0)

Como x_4 e x_5 são as variáveis básicas iniciais,

- $x_B = (x_4, x_5) \Rightarrow x_N = (x_1, x_2, x_3) \quad \Rightarrow c_B = (0,0)$ e $c_N = (-4,-3,-6)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,-3,-6) - (0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-4,-3,-6)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 2

<u>Iteração A)</u>

- Solução Ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_3 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

  Atualizando b e A_1 para usar o teste do bloqueio

$$\overline{A}_3 = B^{-1}A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\overline{b}_R}{\overline{a}_{RS}} = \min_j \left\{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{jS}},\ \overline{a}_{jS} > 0 \right\} \right) \qquad \min_j \left\{ \frac{30}{3}, \frac{40}{3} \right\} = \frac{30}{3} \Rightarrow x_4 \text{ sai da base}$$

- $x_B = (x_3, x_5) \Rightarrow x_N = (x_1, x_2, x_4) \Rightarrow c_B = (-6,0)$ e $c_N = (-4,-3,0)$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,-3,0) - (-6,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (2,-1,2)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 2

<u>Iteração B)</u>

- Solução ótima? **NÃO**
- Qual variável entra na base? $x_2 \Rightarrow$ pois traz maior lucro
- Qual variável sai da base?

  Atualizar *b* e A_2 para usar o teste do bloqueio

$$\overline{A}_2 = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\min_j \left\{ \frac{10}{1/3}, \frac{10}{1} \right\} = \frac{10}{1} \Rightarrow x_5 \text{ sai da base}$$

- $x_B = (x_3, x_2) \Rightarrow x_N = (x_1, x_4, x_5) \Rightarrow c_B = (-6,-3)$ e $c_N = (-4,0,0)$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Atualizando c_N

$$\overline{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N = (-4,0,0) - (-6,-3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,1)$$

Método Simplex Revisado – Exemplo 2

<u>Iteração C)</u>

- Solução Ótima? **SIM**
- $x_B = \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 10 \end{pmatrix}$
- $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = \left(0,10,\dfrac{20}{3},0,0\right) \Rightarrow Z^* = 70$
- $Z^* = -c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N = -(-6,-3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} + 0 = 70$