PESQUISA OPERACIONAL

Definições e Teoremas Básicos

Prof. Volmir Wilhelm
Curitiba, Paraná, Brasil

Forma Padrão

Quando as restrições de um modelo de Programação Linear são apresentadas *na forma de equações* diz-se que esse modelo está na *forma padrão*.

maximizar $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$
(**minimizar**)
sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1N} x_N &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2N} x_N &= b_2 \\
&\ldots \\
a_{M1} x_1 + a_{M2} x_2 + \ldots + a_{MN} x_N &= b_M \\
x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N &\geq 0
\end{aligned}
$$

Forma Padrão

I. Qualquer problema de maximização pode converter-se num problema de minimização, pois:

$$\min Z = -\max(-Z)$$

II. Qualquer restrição de desigualdade de tipo "≤" pode ser convertida numa restrição do tipo "≥" multiplicando por (-1) ambos os seus membros.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{iN}x_N \leq b_i$$

$$\Updownarrow$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{iN}x_N \geq -b_i$$

Forma Padrão

III. Qualquer restrição de igualdade pode ser convertida em duas restrições de desigualdades "≤" equivalentes àquela.

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N = b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N &\leq b_i \\ a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N &\geq b_i \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N &\leq b_i \\ -a_{i\,1}x_1 - \ldots - a_{i\,N}x_N &\leq -b_i \end{aligned}$$

Forma Padrão

O primeiro passo para a resolução de um problema de PL consiste na sua *redução à Forma Padrão*. Para isto é preciso *converter* as *restrições* de *desigualdade* em *restrições equivalentes* de *igualdade*.

- uma *restrição de desigualdade* de tipo "$\leq$" pode ser convertida numa *restrição de igualdade adicionando uma nova variável não negativa* (***variável de folga***) x_{N+1}:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \leq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N + x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$\boxed{a^t x \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x + F = b \\ F \geq 0 \end{cases}}$$

Forma Padrão

– uma *restrição de desigualdade* de tipo "≥" pode ser convertida numa *restrição de igualdade subtraindo uma nova variável não negativa* (***variável de excesso ou de folga***) x_{N+1}:

$$a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N \geq b_i \Leftrightarrow a_{i\,1}x_1 + \ldots + a_{i\,N}x_N - x_{N+1} = b_i$$

$$x_{N+1} \geq 0$$

Forma Geral

$$\boxed{a^t x \geq b \Rightarrow \begin{cases} a^t x - S = b \\ S \geq 0 \end{cases}}$$

Forma Padrão

Redução à Forma Padrão – Exemplo 1

Forma Geral

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 18 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Forma Padrão

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

As variáveis de folga (e excesso) têm coeficientes nulos na função objetivo

Forma Padrão

Redução à Forma Padrão – Exemplo 2

IV. Qualquer *variável negativa* x_j, deve ser substituida por uma variável não negativa $x_j = -x_j'$, $x_j' \geq 0$, fazendo:

$$\boxed{x_j = -x_j'}$$

Forma Geral

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 4 \\ 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 18 \end{array}$$

$$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0$$

Forma Padrão

$$\max \quad Z = -3x'_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{rcl} -x'_1 + x_3 & = & 4 \\ 2x_2 + x_4 & = & 12 \\ -3x'_1 + 2x_2 - x_5 & = & 18 \end{array}$$

$$x'_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Forma Padrão

V. Qualquer *variável livre* x_j, (*não restringida pela condição de não negatividade*) pode ser substituida por um par de variáveis não negativas $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$, fazendo:

$$\boxed{x_j = x_j' - x_j''}$$

e deste modo formulando de novo o problema em função destas duas novas variáveis.

Após substituir x_j por $x_j' - x_j''$, <u>deleta-se</u> a variável x_j do problema.

Forma Padrão

Redução à Forma Padrão – Exemplo 3

Forma Geral

$$\max \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{llll} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \geq & 18 \end{array}$$

$$x_1 \text{ livre}, \; x_2 \geq 0$$

Forma Padrão

$$\max \quad Z = 3(x'_1 - x''_1) + 5x_2$$

sa

$$\begin{array}{lllll} (x'_1 - x''_1) & & + x_3 & & = 4 \\ & 2x_2 & + x_4 & & = 12 \\ 3(x'_1 - x''_1) + & 2x_2 & & - x_5 & = 18 \end{array}$$

$$x'_1, x''_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Definições

- Solução Viável
- Solução Não Viável
- Região Viável

- Solução Básica
- Solução Básica Viável
- Solução Básica Viável Não Degenerada

Definições

$$
\begin{aligned}
\max Z = \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
sa \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad c = [c_1, \ldots, c_n]
$$

$$
\begin{aligned}
\max Z = \quad & cx \\
sa \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Definições

Solução Viável – Um vetor x que satisfaz as restrições de um problema de programação linear é denominado de solução viável ou factível. Um vetor que não satisfaz alguma restrição é chamado de solução inviável. O conjunto de todas as soluções viáveis forma a região viável ou região factível.

Matriz Base – Se a submatriz $B_{m\times m}$ da matriz *A* é *não singular*, isto é, o seu determinante é não nulo, então $B_{m\times m}$ é denominada de matriz base.

Variável Básica e **Variável Não Básica** – As m *variáveis* correspondentes às m colunas da submatriz $B_{m\times m}$ são denominadas de variáveis básicas. As demais são variáveis não básicas.

Solução Básica – Uma solução básica é qualquer solução x que satisfaz $Ax = b$ obtido fixando as variáveis não básicas igual a zero. Se a solução básica for tal que $x \geq 0$, então diz-se que a solução é básica viável.

Solução Básica

$A=[N\ \ B]$ com $B_{m\times m}$ (somente B quadrada) e tal que $\exists B^{-1}$

$$Ax=b \Rightarrow Nx_N+Bx_B=b \Rightarrow Bx_B=b-Nx_N \Rightarrow B^{-1}(Bx_B)=B^{-1}(b-Nx_N)$$

$$Ix_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \Rightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N \ \ (\text{solução geral})$$

Seja um sistema com m equações e n variáveis. Considere uma partição básica $A=[B\ N]$ e a seguinte solução obtida ao se fixar as $n-m$ variáveis de x_N em zero, é:

$$\begin{cases} x_B^* = B^{-1}b \\ x_B^* = 0 \end{cases}$$

A solução x^* assim obtida é chamada SOLUÇÃO BÁSICA. Se $x_B^* = B^{-1}b \geq 0$, dizemos que x^* é uma SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL. Além disso, se $x_B^* = B^{-1}b > 0$, dizemos que x^* é uma SOLUÇÃO BÁSICA VIÁVEL NÃO DEGENERADA.

Variáveis Básicas e Solução Básica – Exemplo

$$\begin{cases} 8x - 8y + 2u + 4v + 2w = -14 \\ 4x + 2y - 2u - v + 7w = 29 \\ 1x + 4y + 3u + 5v + 7w = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & -8 & \boxed{2} & 4 & 2 & -14 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 7 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 7 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -4 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 12 & -6 & 0 & \boxed{3} & 9 & 15 \\ -11 & 16 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 1 & 0 & -5 & -17 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ -7 & 14 & 0 & 0 & \boxed{7} & 28 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -9 & 10 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & -8 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -9x + 10y + u = 3 \\ 7x - 8y + v = -7 \\ -x + 2y + w = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 3 + 9x - 10y \\ v = -7 - 7x + 8y \\ w = 4 + x - 2y \end{cases}$$

Há infinitas soluções para este sistema; elas são geradas através da atribuição de valores arbitrários a x e y. Por exemplo, fazendo x = 1 e y = -2, temos u = 32, v = -30, w = 9.

Uma solução em especial é interessante. Esta é a obtida quando x e y são ambos nulos. Neste caso, temos x = y = 0, u = 3, v = -7, w = 4.

Esta solução é denominado de **solução básica** e u, v, w são chamadas de **variáveis básicas**, enquanto x e y são as **variáveis não-básicas**.

Solução Básica Viável e Solução Básica Não Viável – Exemplo

$$
\begin{array}{lll}
\max & Z = & x_1 + 2x_2 - 4_3 + x_4 \\
 & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
sa & & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \\
 & & x_1, \ldots, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6
\end{cases}
$$

Sistema

continua ...

Solução **Básica Não Viável**

... continuação

A – Obtenção via resolução algébrica do sistema

Variáveis Básicas: x_1 e x_2
Variáveis Não Básicas: x_3, x_4, x_5, x_6

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 0x_6 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 0x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 0x_6 = 4 \\ 0x_1 + \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{5}{2}x_3 + \tfrac{5}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 1x_6 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 0x_6 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 + \tfrac{1}{5}x_5 + \tfrac{2}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 2x_4 + \tfrac{1}{5}x_5 - \tfrac{3}{5}x_6 = -2 \\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 + \tfrac{1}{5}x_5 + \tfrac{2}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 - x_3 + 2x_4 - \tfrac{1}{5}x_5 + \tfrac{3}{5}x_6 \\ x_2 = 4 + x_3 - x_4 - \tfrac{1}{5}x_5 - \tfrac{2}{5}x_6 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-2, 4, 0, 0, 0, 0)$$

Solução Básica Não Viável

continua ...

Solução **Básica Não Viável**

... continuação

B - Obtenção via operações matriciais e via inversa

Variáveis Básicas: x_1 e x_2
Variáveis Não Básicas: $\cancel{x_3, x_4, x_5, x_6}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 4 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & 5/2 & 1/2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}^{-1} \times \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1/5 & 2/5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1/5 & -3/5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1/5 & 2/5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-2, 4, 0, 0, 0, 0)$$

Solução Básica Não Viável

Solução **Básica Viável**

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_4, x_5

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 0x_6 = 4 \\ 0x_1 + \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{5}{2}x_3 + \tfrac{5}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 1x_6 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + 0x_6 = 4 \\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 + \tfrac{1}{5}x_5 + \tfrac{2}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 0x_4 + \tfrac{3}{5}x_5 + \tfrac{1}{5}x_6 = 6 \\ 0x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 + \tfrac{1}{5}x_5 + \tfrac{2}{5}x_6 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + x_3 - \tfrac{3}{5}x_5 - \tfrac{1}{5}x_6 \\ x_4 = 4 - x_2 + x_3 - \tfrac{1}{5}x_5 - \tfrac{2}{5}x_6 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

Solução Básica Viável

Solução **Básica Viável**

$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2 - 4_3 + x_4$$

$$sa \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 &= 6 \\ x_1, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 0x_6 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 0x_5 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = [8,6]^T \qquad x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,]^T \qquad c = [1,2,-4,1,0,0]$$

$$\max \; Z = cx$$

$$sa \quad \begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Obtenção da Solução Básica via matriz inversa

$$x_N = [x_2, x_3, x_5, x_6]^T, \quad x_B = [x_1, x_4]^T$$

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

Teoremas

Teorema 1: A região viável de um programa linear-pl é convexa.

Teorema 2: A solução ótima de um pl é um ponto extremo.

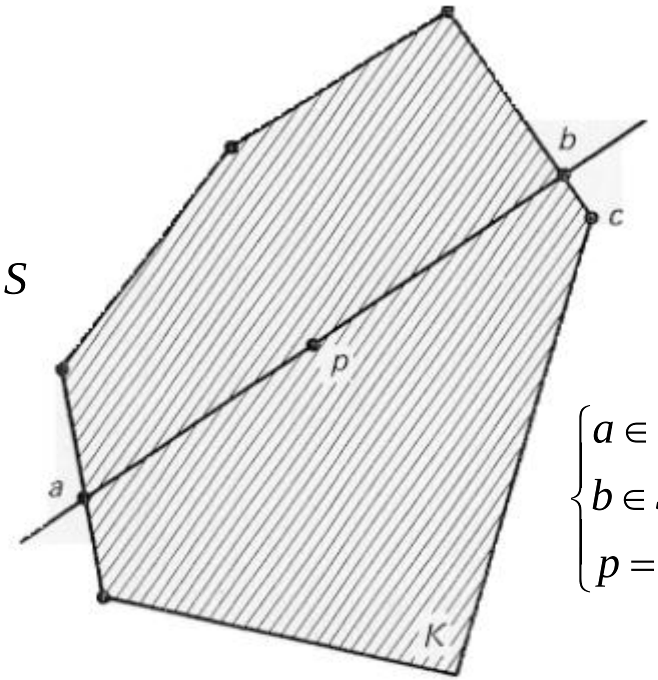
Teorema 3: Se existe solução viável então existe solução básica viável.

Teorema 4: A solução básica viável de um pl é um ponto extremo da região viável.

Teorema 5: O conjunto de soluções básicas viáveis de um pl é finito.

Teorema 1: (Região Viável é Convexa) Num problema de programação linear, a região viável é um conjunto convexo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_m = b_m \end{cases} \Rightarrow S$$

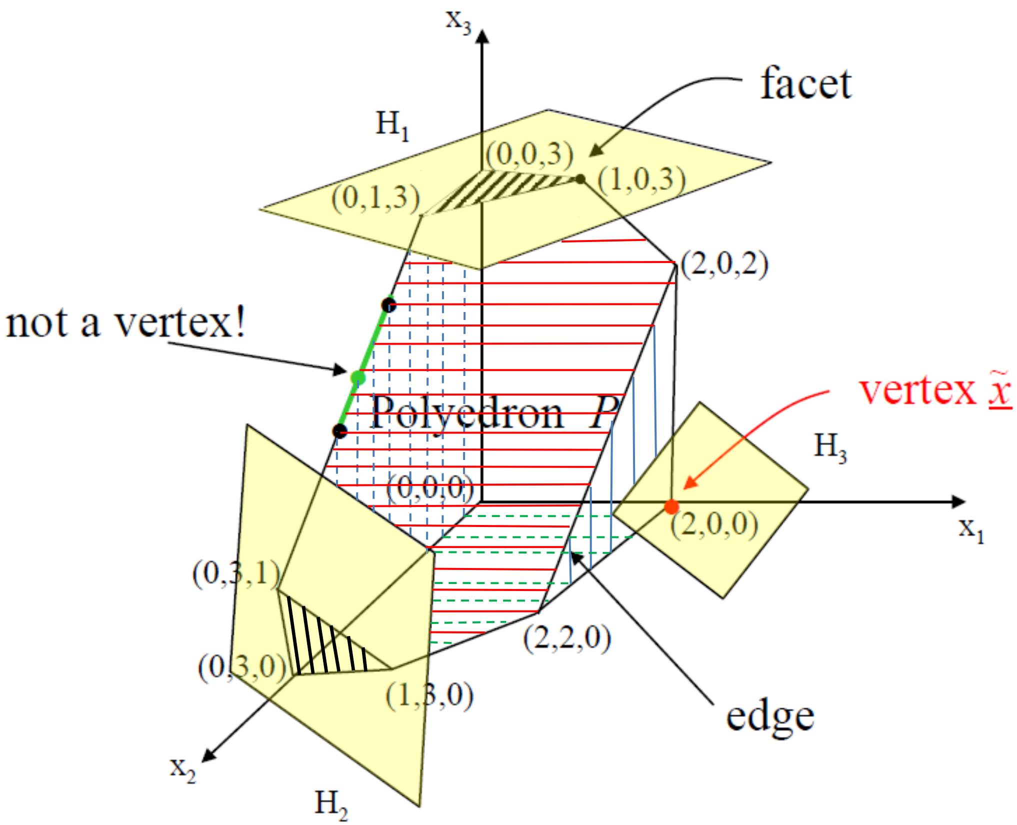


$$\begin{cases} a \in S \\ b \in S \\ p = \lambda a + (1-\lambda)b \in S, \qquad 0 \le \lambda \le 1 \end{cases}$$

(Fonte: http://s12.middlebury.edu/MATH0318A/Olinick%20LP%20Chapter/Linear%20Programming%20II.pdf)

Demonstração: Seja S o conjunto formado pelos pontos x tais que $Ax = b,\ x \ge 0$. Vamos demonstrar que o conjunto S é convexo. Sejam $x_1, x_2 \in S$; precisamos mostrar que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S,\ 0 \le \alpha \ge 1$. Sejam x_1, x_2 tal que $Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$ e $x_1, x_2 \ge 0$. $Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$. Uma vez que $x_1, x_2 \ge 0$ e $\alpha \le 1$ então $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \ge 0$.■

Definição de Ponto Extremo: Um ponto extremo da região convexa P é um ponto que não pode ser expresso como uma combinação linear convexa de 2 pontos distintos da região P.



<u>Algebraically</u>:

$\tilde{\underline{x}}$ is a vertex of P

if $\nexists\ \underline{y}^1, \underline{y}^2 \in P,\ \underline{y}^1 \neq \underline{y}^2$

and $\alpha \in (0,\ 1)$ s.t.

$\tilde{\underline{x}} = \alpha\, \underline{y}^1 + (1 - \alpha)\, \underline{y}^2$

(Fonte: http://home.deib.polimi.it/amaldi/SlidesFOR-14-15/intro-LP-FOR-14.pdf)

Um ponto extremo não está sobre nenhum segmento de linha situado no interior de P.

Teorema 2: Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma **solução ótima é um ponto extremo** do conjunto convexo do **Teorema 1**.

Demonstração: Seja $Z(x)$ a função objetivo que toma o valor máximo M no ponto x_o, então pode-se afirmar que $M = Z(x_o) \geq Z(x)$ para todo $x \in S$. Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto S. Precisamos provar que x_o é um desses pontos extremos. Suponha que x_o não seja um ponto extremo de S. Então, ele pode ser obtido pela combinação convexa de seus pontos extremos: $x_o = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i$ sendo $\alpha_i \geq 0 \; (i = 1,2,...,p)$ e $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ -> **(a)**. Assim $Z(x_o) = Z\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i\right) = Z(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + ... + \alpha_p \bar{x}_p) =$ $= \alpha_1 Z(\bar{x}_1) + \alpha_2 Z(\bar{x}_2) + ... + \alpha_p Z(\bar{x}_p) = M$ -> **(b)**. Consideremos o ponto extremo $\bar{x}_M$ definido pela relação $Z(\bar{x}_M) = \max Z(\bar{x}_i),\; i = 1,2,...,p$ -> **(c)** Devido as relações (a) e (c) a relação (b) pode sofrer as seguintes modificações: $Z(x_o) \leq \alpha_1 Z(\bar{x}_M) + \alpha_2 Z(\bar{x}_M) + ... + \alpha_p Z(\bar{x}_M)$, ou seja, $Z(x_o) \leq Z(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$, isto é $Z(x_o) \leq Z(\bar{x}_M)$. Mas tínhamos $M = Z(x_o) \geq Z(x) \; \forall x \in S$. Então é necessário ter $Z(x_o) = M = Z(\bar{x}_M)$ e fica provado que a solução ótima x_o é um ponto extremo do conjunto convexo C. ■

Teorema 3: Se existir uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

Demonstração: Suponha que $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots , x_n]^T$ é uma solução básica viável. Assim $\boldsymbol{x} \geq 0$.

- Sem perda de generalidade, suponha que somente as primeiras p coordenadas de $\boldsymbol{x}$ são positivas, assim $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \boldsymbol{b}$ (1)
- Caso 1: se $\boldsymbol{a}_1, \ldots , \boldsymbol{a}_p$ são linearmente independentes, então $p \leq m = \text{rank}(\boldsymbol{A})$.

  a. se $p = m$, então $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1, . . . , \boldsymbol{a}_m]$ forma uma base e $\boldsymbol{x}$ é solução básica viável

  b. se $p < m$, então podemos encontrar $m - p$ colunas de $\mathbf{a}_{p+1}, \ldots , \mathbf{a}_n$ para formar uma base $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{x}$ será uma solução básica viável.

- Caso 2: se $\boldsymbol{a}_1, \ldots , \boldsymbol{a}_p$ são linearmente dependentes então $\exists\, y_1, \ldots , y_p$ tal que algum $y_i > 0$ e $y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_p\boldsymbol{a}_p = \mathbf{0}$. Deste fato e de (1) temos $(x_1 - \varepsilon y_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (x_p - \varepsilon y_p)\mathbf{a}_p = \boldsymbol{b}$
- Para ε suficientemente pequeno temos $(\varepsilon > 0)$, $(x_1 - \varepsilon y_1) > 0, \ldots , (x_p - \varepsilon y_p) > 0$.
- Visto que existe algum $y_i > 0$, fazendo $\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i} \mid i = 1, \ldots, p, y_1 > 0\right\}$, então, as primeiras p componentes de $(\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{y}) \geq 0$ e pelo menos um deles é 0. Portanto, podemos reduzir p em pelo menos 1. Repetindo esse processo, ou chegamos ao Caso 1 ou $p = 0$. A última situação pode ser tratada como o Caso 1. ■

Teorema 4: (Solução Básica Viável é Ponto Extremo) A solução viável x é um ponto extremo de S se e somente se x é uma solução básica viável para S..

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja x um ponto extremo de S. Suponhamos por contradição que x não é solução básica. Suponhamos, então que suas $p > m$ primeiras componentes são positivas ($x_1a_1 + \cdots + x_pa_p = b$ pois $x \in S$). Seja $y = [y_1, ..., y_p]$, com $y \neq 0$ tal que $y_1a_1 + \cdots + y_pa_p = 0$. Visto que $x_1, ..., x_p > 0$ por hipótese, $\exists\ \varepsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que $(x + \varepsilon y) \in S$ e $(x - \varepsilon y) \in S$, visto que $A(x \pm \varepsilon y) = Ax \pm A(\varepsilon y) = Ax \pm \varepsilon(Ay) = b + 0 = b$ e que $(x \pm \varepsilon y) \geq 0$. Portanto $x = ½\,(x + \varepsilon y) + ½\,(x - \varepsilon y)$ e portanto x não é extremo. Isto é uma contradição e portanto x é solução básica viável.

($\Leftarrow$) Seja x uma solução básica associada a submatriz base $B \in R^{m \times m}$, com B não singular. Então, sem perda de generalidade, suponha que $x = (x_B, x_N)$ com $x_i=0$ para $i=m+1,...,n$. Logo, $Ax=Bx_B=b$. Por contradição suponhamos que x não seja ponto extremo ou vértice de S, então $\exists y,z \in S$ tal que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$, $\alpha \in [0, 1]$ e $y \neq z$ pois $x \neq 0$. Como $x_i=0$ $i=m+1,...,n$, então $\alpha y_i=0$ e $(1-\alpha)z_i=0$ para $i=m+1,...,n$, e portanto $y_i = z_i = 0$ $i=m+1,...,n$. Logo $y=(y_B, 0)$ e $z=(z_B, 0)$. Como $y, z \in S$, $Ay=b$ e $Az=b$, e portanto $By_B=b$ e $Bz_B=b$.

Portanto $0 = b - b = By_B - Bz_B = B(y_B - z_B) \rightarrow B(y_B - z_B)=0$. Como B é não singular, então $y_B = z_B$. Isso é uma contradição pois por hipótese $y \neq z$, e portanto x é um extremo. ■

Teorema 5: (O Número Soluções Básicas é Finito) A coleção de todas as soluções básicas formam um conjunto finito.

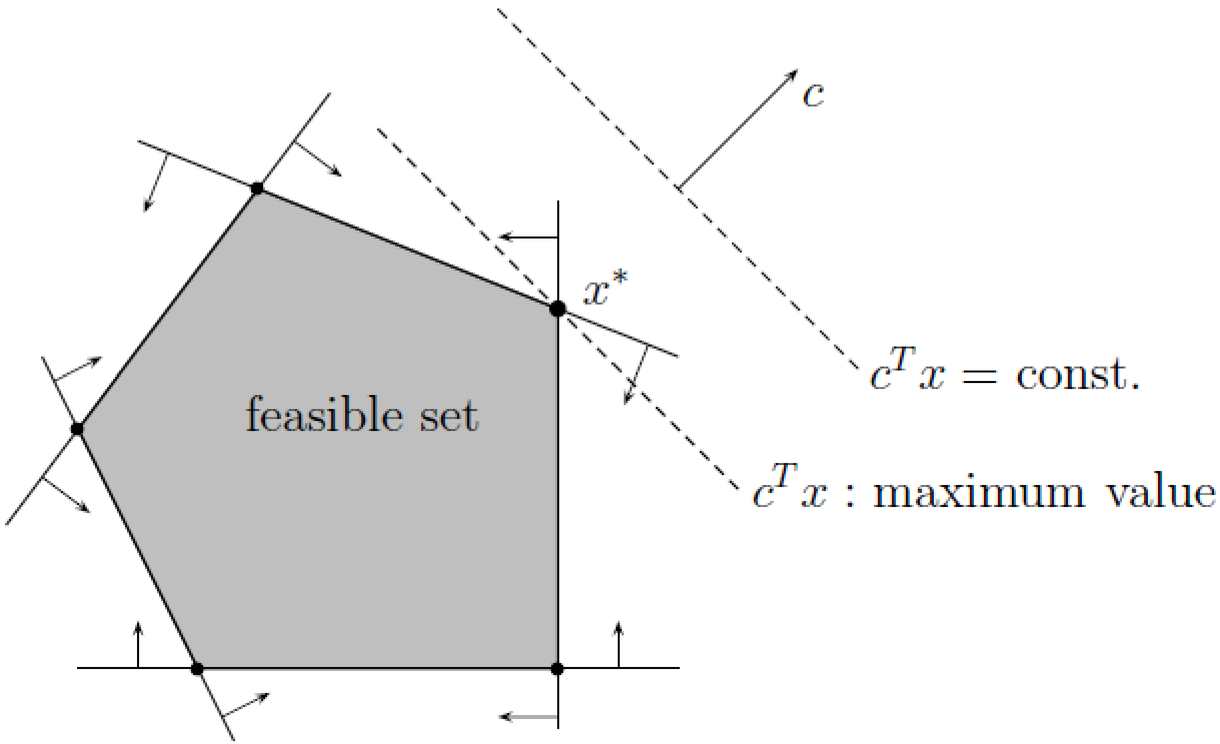
$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Teorema 6: (Múltiplas soluções) Se um valor ótimo da função objetivo é atingido em mais de um ponto extremo, cada combinação convexa desses pontos extremos também fornece o valor ótimo da função objetivo.

<u>Demonstração</u>: Seja a função objetivo $Z(x) = c^T x$ que assume o valor ótimo Z^* nos pontos extremos y_1 e y_2, ou seja, $Z^* = c^T y_1 = c^T y_2$. Seja $x_0 = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2$. Então, $x_0 \in S$ pois S é um conjunto convexo, e $c^T x_0 = \lambda c^T y_1 + (1 - \lambda) c^T y_2 = Z^*$. Portanto, x_0 também é uma solução ótima do pl.■

Método das Soluções Básicas

Baseado nos teoremas anteriores, uma maneira prática de resolver pequenos Problemas de Programação Linear, seria verificar o valor da função objetivo nos pontos extremos (Soluções Básicas) do polígono de soluções viáveis.



(Fonte: http://heim.ifi.uio.no/~geird/conv.pdf)

Método das Soluções Básicas

(a) Encontre as coordenadas dos vértices da região viável;

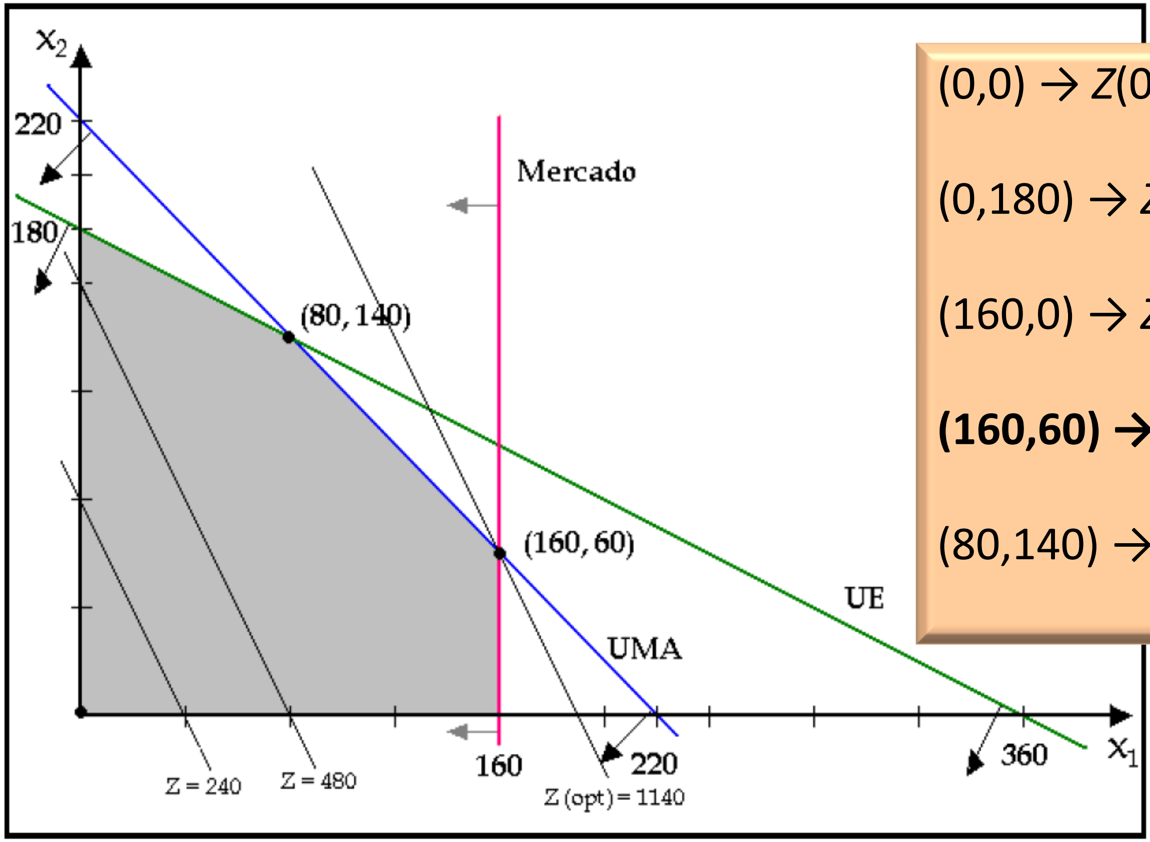
(b) Para cada vértice calcule o respectivo valor da função objetivo;

(c) O ponto com o maior valor da função objetivo é a solução ótima.

Vértices ≡ Extremos ≡ Solução Básicas Viáveis

Método das Soluções Básicas – Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\max Z = \quad & 6x1 + 3x2 \\
sa \quad & 2x1 + 4x2 \leq 720 \\
& 4x1 + 4x2 \leq 880 \\
& x1 + 0x2 \leq 160 \\
& x1, x2 \geq 0
\end{aligned}
$$



(0,0) → Z(0,0) = 0

(0,180) → Z(0,180) = 540

(160,0) → Z(160,0) = 960

(160,60) → Z(160,60) = 1.140

(80,140) → Z(80,140) = 900

Método das Soluções Básicas – Exemplo 1

$$\begin{aligned} \max\ Z = &\ 6x1 + 3x2 \\ \text{sa} \quad &\ 2x1 + 4x2 \le 720 \\ &\ 4x1 + 4x2 \le 880 \\ &\ x1 + 0x2 \le 160 \\ &\ x1, x2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = &\ 6x1 + 3x2 \\ \text{sa} \quad &\ 2x1 + 4x2 + F1 = 720 \\ &\ 4x1 + 4x2 + F2 = 880 \\ &\ x1 + 0x2 + F3 = 160 \\ &\ x1, x2, F1, F2, F3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10$$

$$x_B^{(1)} = \{x1, x2, F1\} \qquad x_B^{(2)} = \{x1, x2, F2\} \qquad x_B^{(3)} = \{x1, x2, F3\}$$

$$x_B^{(4)} = \{x1, F1, F2\} \qquad x_B^{(5)} = \{x1, F1, F3\} \qquad x_B^{(6)} = \{x1, F2, F3\}$$

$$x_B^{(7)} = \{x2, F1, F2\} \qquad x_B^{(8)} = \{x2, F1, F3\} \qquad x_B^{(9)} = \{x2, F2, F3\}$$

$$x_B^{(10)} = \{F1, F2, F3\}$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 1

... continuação

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160, 60, 160)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (160, 100, -160)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80, 140, 80)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160, 400, 240)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (220, 280, -60)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (360, -560, -200)$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}}$$

$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F2) = (220, -160, 160)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180, 160, 160)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 880 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16, 12, 28)$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 1

... continuação

Soluções Básicas Viáveis

$$\begin{cases} x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160,60,160) \\ Z = 1140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80,140,80) \\ Z = 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160,400,240) \\ Z = 960 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180,160,160) \\ Z = 540 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28) \\ Z = 0 \end{cases}$$

Soluções Básicas Não Viáveis

$$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (160,100,-160)$$

$$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (220,280,-60)$$

$$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (360,-560,-200)$$

$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = ???$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F2) = (220,-160,160)$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 1

... continuação

Soluções Básicas Viáveis

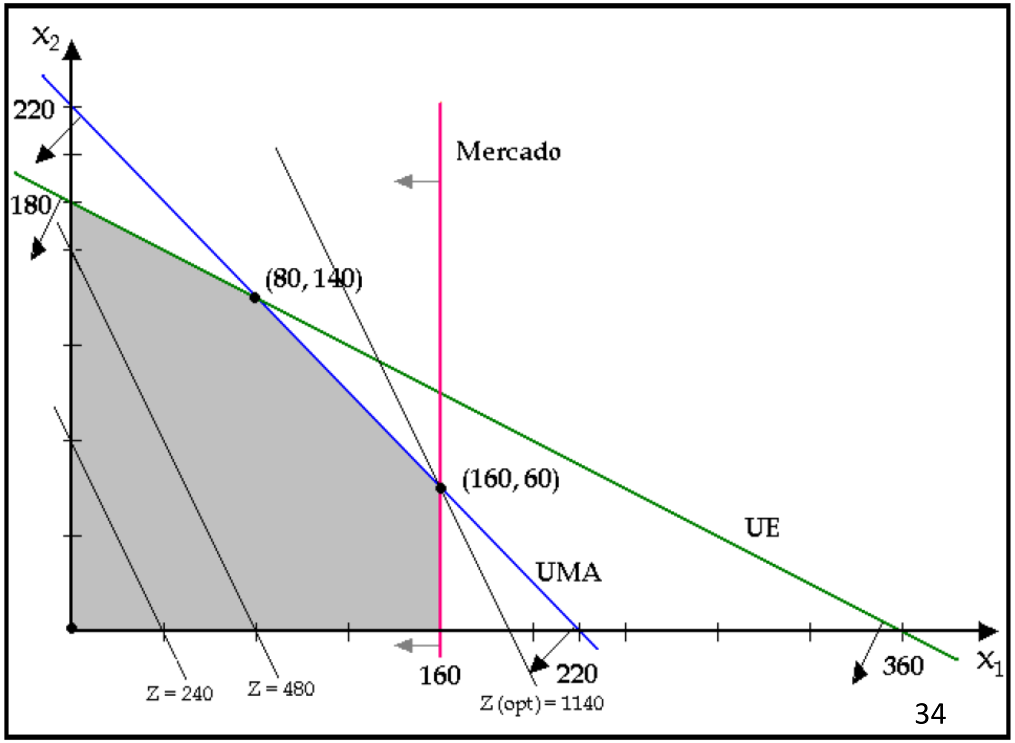
$$\begin{cases} x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = (160,60,160) \\ Z = 1140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (80,140,80) \\ Z = 900 \end{cases}$$

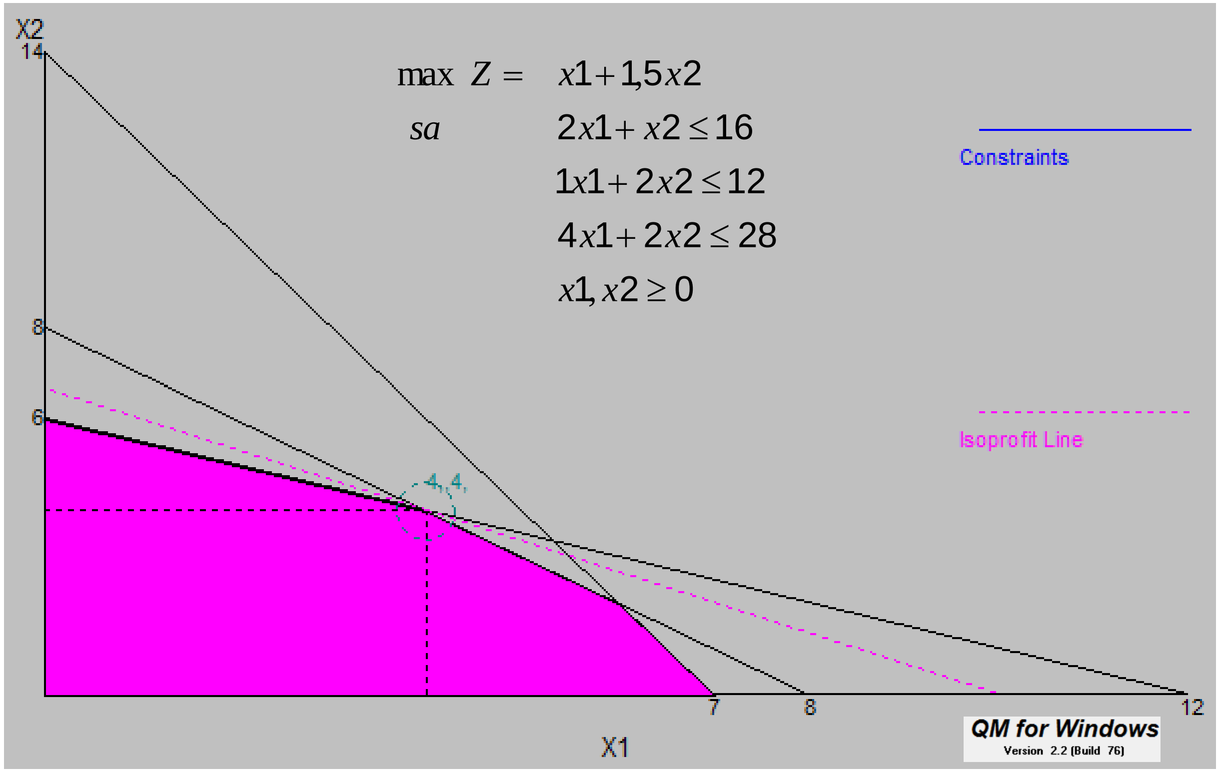
$$\begin{cases} x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (160,400,240) \\ Z = 960 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (180,160,160) \\ Z = 540 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28) \\ Z = 0 \end{cases}$$



Método das Soluções Básicas – Exemplo 2



continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 2

... continuação

$$\begin{aligned} \max\ Z = &\ x1 + 1{,}5x2 \\ sa\ &\ 2x1 + x2 \le 16 \\ &\ 1x1 + 2x2 \le 12 \\ &\ 4x1 + 2x2 \le 28 \\ &\ x1, x2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ Z = &\ x1 + 1{,}5x2 \\ sa\ &\ 2x1 + x2 + F1 = 16 \\ &\ 1x1 + 2x2 + F2 = 12 \\ &\ 4x1 + 2x2 + F3 = 28 \\ &\ x1, x2, F1, F2, F3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10$$

$$x_B^{(1)} = \{x1, x2, F1\} \qquad x_B^{(2)} = \{x1, x2, F2\} \qquad x_B^{(3)} = \{x1, x2, F3\}$$

$$x_B^{(4)} = \{x1, F1, F2\} \qquad x_B^{(5)} = \{x1, F1, F3\} \qquad x_B^{(6)} = \{x1, F2, F3\}$$

$$x_B^{(7)} = \{x2, F1, F2\} \qquad x_B^{(8)} = \{x2, F1, F3\} \qquad x_B^{(9)} = \{x2, F2, F3\}$$

$$x_B^{(10)} = \{F1, F2, F3\}$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 2

... continuação

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (6,2,2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (4,4,4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (7,2,5)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (12,-8-20)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (8,4,-4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = (14,-12-16)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F1 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F2) = (14,-12-16)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x2 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (8,-4,12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28)$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(2)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 2

... continuação

Soluções Básicas Viáveis

$$\begin{cases} x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (6,2,2) \\ Z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (4,4,4) \\ Z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (7,2,5) \\ Z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28) \\ Z = 0 \end{cases}$$

Soluções Básicas Não Viáveis

$$\begin{cases} x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right) \\ Z = 31/3 \end{cases}$$

$$x_B^{(5)} = (x1, F1, F3) = (12, -8 - 20)$$

$$x_B^{(6)} = (x1, F2, F3) = (8, 4, -4)$$

$$x_B^{(7)} = (x2, F1, F2) = (14, -12 - 16)$$

$$x_B^{(8)} = (x2, F1, F2) = (14, -12 - 16)$$

$$x_B^{(9)} = (x2, F2, F3) = (8, -4, 12)$$

continua ...

Método das Soluções Básicas – Exemplo 2

... continuação

Soluções Básicas Viáveis

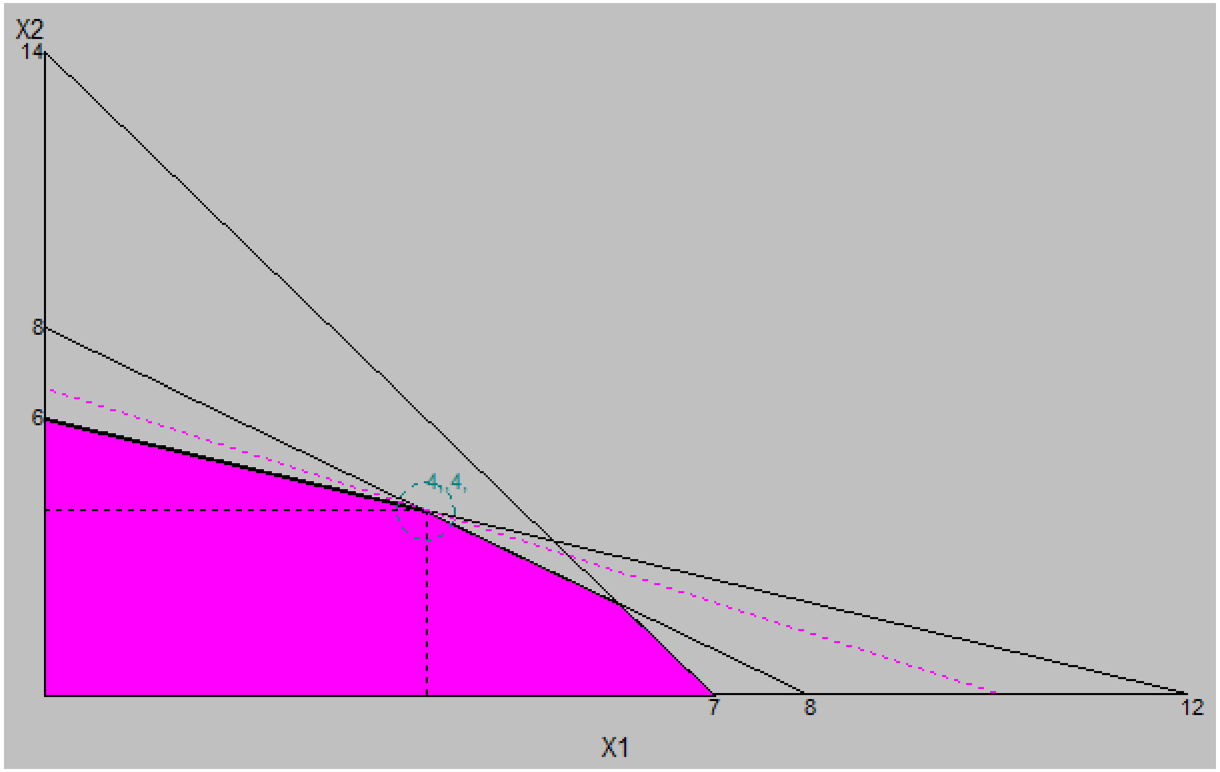
$$\begin{cases} x_B^{(1)} = (x1, x2, F1) = \left(\frac{16}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right) \\ Z = 31/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(2)} = (x1, x2, F2) = (6,2,2) \\ Z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(3)} = (x1, x2, F3) = (4,4,4) \\ Z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(4)} = (x1, F1, F2) = (7,2,5) \\ Z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^{(10)} = (F1, F2, F3) = (16,12,28) \\ Z = 0 \end{cases}$$



Método das Soluções Básicas – Limitação

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

***m* = 100, *n* = 130,** **≈2,9×10^{29} soluções básicas**

- **se 100 milhões operações por segundo,**
- **então ≈9,3 bilhões de anos.**

Prévia de um algoritmo de otimização SIMPLEX

1. Obter uma solução básica inicial – a mais trivial e mais fácil
2. Verificar se a solução atual é ótima
3. Se a solução atual não for ótima, procurar outra solução básica
4. Voltar ao passo 2

Questões

a) Como achar a solução inicial?
b) Que critério usar para gerar uma nova solução básica?
c) Como posso saber se a solução atual é ótima?

$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4$$

$$sa \quad \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 6 \\ x_1, \ldots, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Iteração (0) – início – Passo(0)

Variáveis Básicas: x_5 e x_6

Variáveis Não Básicas: x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,0,0,8,6)$$

continua ...

... continuação

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$Z = \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_2 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 = 6 + x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 8 - 3x_2 \geq 0 \\ x_6 = 6 - x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(0, \frac{8}{3}, 0, 0, 0, \frac{10}{3}\right)$$

x_5 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_6
Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_4, x_5

continua ...

Iteração (2)

... continuação

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{5}{3}x_1 + \dfrac{5}{3}x_3 - \dfrac{10}{3}x_4 + \dfrac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$Z = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_4 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 \\ x_6 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{5}{3}x_1 + \dfrac{5}{3}x_3 - \dfrac{10}{3}x_4 + \dfrac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{3}x_4 \geq 0 \\ x_6 = \dfrac{10}{3} - \dfrac{10}{3}x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_4 \leq 1 \Rightarrow x_4 = 1$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0{,}3{,}0{,}1{,}0{,}0)$$

x_6 sai da base

Variáveis Básicas: x_2 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_1, x_3, x_5, x_6

continua ...

Iteração (3)

... continuação

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

$$Z = 7 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6$$

A solução é ótima?

Não, pois existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

Qual variável, então, entra na base?

x_1 pois possui o maior coeficiente positivo

Qual variável, então, sai da base?

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{10}x_5 - \frac{1}{10}x_6 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{10}x_5 - \frac{3}{10}x_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq 6 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

x_2 sai da base

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6

continua ...

Iteração (4) – término

... continuação

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 2x_2 + 1x_3 - \frac{3}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \\ x_4 = 4 - 1x_2 + 1x_3 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{2}{5}x_6 \end{cases}$$

$$Z = \quad 10 - x_2 - 2x_3 - \frac{4}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_6$$

A solução é ótima?

Sim, pois não existe variável não básica com coeficiente positivo na Função Objetivo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6,0,0,4,0,0)$$

$$Z = 10$$

Variáveis Básicas: x_1 e x_4
Variáveis Não Básicas: x_2, x_3, x_5, x_6