
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

CURSO
CONTROLE DE PROCESSOS INDUSTRIAIS
(Notas de Aula)

PROF. ADILSON DOS ANJOS

Curitiba, 2 de setembro de 2008

Sumário

1	Experimentos fatoriais	4
1.1	Introdução	4
1.2	Instalação do experimento	7
1.3	Estimativas dos efeitos	7
1.4	Modelo estatístico - 2 Fatores	10
1.5	Suposição de não interação	13
1.6	Teste de comparações múltiplas	13
2	Experimento fatorial 2^k	14
2.1	Introdução	14
2.2	Experimentos fatoriais 2^2	14
2.3	Quadro de sinais “mais” e “menos”	16
2.4	Análise de Variância	17
2.5	Análise de Resíduos	19
2.6	Experimento fatorial 2^3	21
2.7	Introdução	21
2.8	Exemplo de um experimento fatorial 2^3	23
2.9	Quadro de sinais para um experimento fatorial com 2^3 fatores.	27
3	Experimentos com confundimento	29
3.1	Introdução	29
3.2	Confundimento no fatorial 2^k	29
3.3	Confundimento nos experimentos fatoriais 3^2	31
3.4	Confundimento no Fatorial 3^3	32
3.5	Exemplo	34

4	Gráfico Normal de Probabilidade para análise de experimentos fatoriais	37
4.1	Como construir o gráfico	37
4.2	Exemplo	39
5	Experimento Fatorial Fracionado	41
5.1	Introdução	41
5.2	Utilidade	41
5.3	Fração $\frac{1}{2}$ do fatorial 2^k	42
5.4	Construção de Meia Fração	44
5.5	Fração $\frac{1}{4}$ do fatorial 2^k	47
5.6	Construção da Fração $\frac{1}{4}$	47
5.7	Exemplo: Um fatorial 2^{6-2}	49
5.8	O conceito de resolução	50
6	Superfície de Resposta	51
6.1	Introdução: idéias básicas	51
6.1.1	Representação da superfície de resposta	52
6.1.2	Objetivos da superfície de resposta	52
6.2	Método da máxima inclinação ascendente	54
6.2.1	Como realizar o método	55
6.3	Exemplo	56
6.4	Localização do ponto estacionário	59
6.5	Analisando a forma da superfície: o ponto estacionário	60
6.6	Continuando com o experimento	61
6.7	Encontrando o ponto estacionário	62
6.8	Forma da superfície	63

<i>Controle de Processos Industriais - Adilson dos Anjos</i>	3
7 TABELAS	65

1 Experimentos fatoriais

1.1 Introdução

Os experimentos fatoriais são aqueles que consideram as combinações entre dois ou mais **grupos de tratamentos ou fatores**. Normalmente, tem-se de 2 a 3 fatores, cada um com diferentes **níveis**. Por exemplo, um fator poderia ser temperatura de cozimento e outro fator poderia ser tipo de embalagem. Cada um destes fatores teria mais de um nível, ou seja, várias temperaturas e vários tipos de embalagem.

Quando todas as combinações possíveis estão presentes no experimento, tem-se um experimento fatorial completo, caso contrário, tem-se um experimento fatorial incompleto ou fracionário.

Em um experimento, quando os níveis de diferentes fatores são combinados, é possível determinar se existe **interação** entre os níveis de diferentes fatores. Quando ocorre a interação, pode-se então, estudar o comportamento de cada fator dentro de níveis do outro fator através da decomposição da soma de quadrados na análise de variância.

Os experimentos conduzidos num esquema fatorial permitem que se façam inferências sob vários aspectos, por exemplo, determinar qual combinação de níveis de fatores temperatura e tipo de embalagem fornece o maior tempo de conservação do alimento, citando o exemplo acima.

Um experimento fatorial pode ser conduzido tanto num delineamento completamente casualizado quanto em blocos casualizados ou em quadrado latino, entre outros. Um experimento fatorial não constitui por si só um delineamento. Ele é apenas uma forma de arranjo dos tratamentos no experimento.

O número de fatores em um experimento depende das causas que podem estar afetando a variável resposta. Quando tem-se um número muito grande de fatores ou níveis de fatores, as combinações aumentam muito, dificultando, às vezes, a instalação do experimento.

Quando utiliza-se três fatores ou mais, a interpretação da interação tripla ou ordem superior torna-se difícil de ser interpretada.

Algumas definições:

Fator: uma causa de variação conhecida e de interesse do pesquisador (um tipo de tratamento).

Nível: uma subdivisão do fator. Pode ser quantitativo ou qualitativo.

Na tabela 1, são apresentados alguns tipos de fatores e tipos de níveis.

Tabela 1: Exemplos de fatores e níveis

Fator	Nível	
Temperatura	$\neq$ temperaturas	quantitativo
Produto	$\neq$ marcas	qualitativo
Droga	$\neq$ doses	quantitativo

Notação

Admita um experimento com dois fatores, A e B, com 4 e 3 níveis respectivamente. Teremos 12 combinações possíveis ou 12 tratamentos. A tabela 2 mostra a forma de designação de fatores e níveis de um experimento fatorial:

Tabela 2: Exemplo: Notação de um experimento fatorial

Fator	Níveis			
A	A_1	A_2	A_3	A_4
B	B_1	B_2	B_3	

Onde cada combinação de níveis de diferentes fatores constitui um tratamento:

$$\begin{array}{cccc}
 A_1B_1 & A_2B_1 & A_3B_1 & A_4B_1 \\
 A_1B_2 & A_2B_2 & A_3B_2 & A_4B_2 \\
 A_1B_3 & A_2B_3 & A_3B_3 & A_4B_3
 \end{array}$$

Quando cada nível de um fator combina (*cruza*) com cada nível de outro(s) fator(es) temos um experimento fatorial de classificação cruzada. Será apresentado no decorrer do texto, que pode ocorrer em um experimento fatorial o caso onde nem todos os níveis de um fator cruzam com outros níveis de outro fator, onde dizemos que o experimento é de classificação hierárquica.

A estrutura de classificação cruzada permite estabelecer os seguintes efeitos:

- **Efeito Principal:** pode-se estudar isoladamente o efeito de cada fator no experimento;

- **Efeito da Interação:** quando existir, pode-se estudar o comportamento de cada fator, na presença ou ausência de níveis dos demais fatores. A interação ocorre somente entre níveis de diferentes fatores.

Quando ocorre interação, não é correto interpretar ou estudar os efeitos principais isoladamente. Deve-se estudar o efeito de um fator na presença de cada um dos níveis do outro fator.

Notação de efeitos principais e efeito da interação:

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow \text{Fator } A \\ B \rightarrow \text{Fator } B \end{array} \right\} = \text{Efeitos Principais}$$

$$\left. \begin{array}{l} A * B \\ A \times B \\ AB \end{array} \right\} = \text{Interação entre o Fator A e o Fator B}$$

$A(B_1) \rightarrow$ efeito de A dentro do nível B_1 (hierárquico)

Os experimentos fatoriais podem ser representados em função do número de fatores e em função do número de níveis, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 & \rightarrow \text{dois fatores, cada um com dois níveis} \\ 4 \times 3 & \rightarrow \text{dois fatores, um com 4 níveis e outro com 3 níveis} \\ 4 \times 3 \times 2 & \rightarrow \text{três fatores, com 4, 3 e 2 níveis, respectivamente} \end{array}$$

Quando o número de níveis é igual, para todos os fatores, pode-se usar a seguinte notação:

$$2 \times 2 = 2^2 \rightarrow \text{expoente=número de fatores} \rightarrow \text{base=número de níveis}$$

$$3 \times 3 \times 4 = 3^2 \times 4$$

Em geral, para níveis quantitativos, pode-se denotar A_0 como ausência e A_1 como presença. Exemplo: $A_0 = 0$ Kg, $A_1 = 5$ Kg e $A_2 = 10$ Kg.

1.2 Instalação do experimento

Para instalação do experimento, basta apenas considerar cada combinação de níveis de diferentes fatores como um tratamento e realizar o sorteio, implantação e condução como se estivesse realizando um experimento com apenas um fator.

É através da ANOVA que os efeitos de cada fator serão isolados e estudados.

1.3 Estimativas dos efeitos

Considere um experimento com dois fatores (A e B) cada um com dois níveis (a_1, a_2 e b_1, b_2), no seguinte arranjo (Tabela 3):

Tabela 3: Efeitos no modelo de classificação cruzada.

FATOR	A				
	nível	a_1	a_2	$\bar{x}$	$a_2 - a_1$
B	b_1	$a_1b_1 = 30$	$a_2b_1 = 32$	31	2 (efeito simples de A(B_1))
	b_2	$a_1b_2 = 36$	$a_2b_2 = 44$	40	8
	$\bar{x}$	33	38	35,5	5 (efeito principal)
	$b_2 - b_1$	6	12	9	

Aqui, os efeitos simples de cada fator, são estimados dentro de cada nível do outro fator da seguinte forma:

$$A(b_1) = (a_2b_1 - a_1b_1) \quad (1)$$

$$A(b_2) = (a_2b_2 - a_1b_2) \quad (2)$$

No exemplo

$$A(b_1) = (32 - 30) = 2 \quad \text{efeito simples de A}(b_1)$$

$$A(b_2) = (44 - 36) = 8$$

Os efeitos principais (média dos efeitos simples, de cada fator) podem ser determinados por

$$A = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_1)] \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_2b_1) + (a_1b_2 - a_1b_1)] \quad (4)$$

No exemplo,

$$A = \frac{1}{2}[(44 - 36) + (32 - 30)] = \frac{1}{2}[8 + 2] = 5$$

$$B = \frac{1}{2}[(36 - 30) + (44 - 32)] = \frac{1}{2}[6 + 12] = 9$$

Ou seja, o efeito principal de um fator é a média dos efeitos simples do mesmo fator.

Interação

Quando os efeitos simples de um mesmo fator são diferentes na presença de níveis de outro fator, diz-se que existe interação entre níveis dos fatores A e B.

A interação é definida por:

$$AB = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_1)] \quad (5)$$

$$BA = \frac{1}{2}[(b_2a_2 - b_1a_2) - (b_2a_1 - b_1a_1)] \quad (6)$$

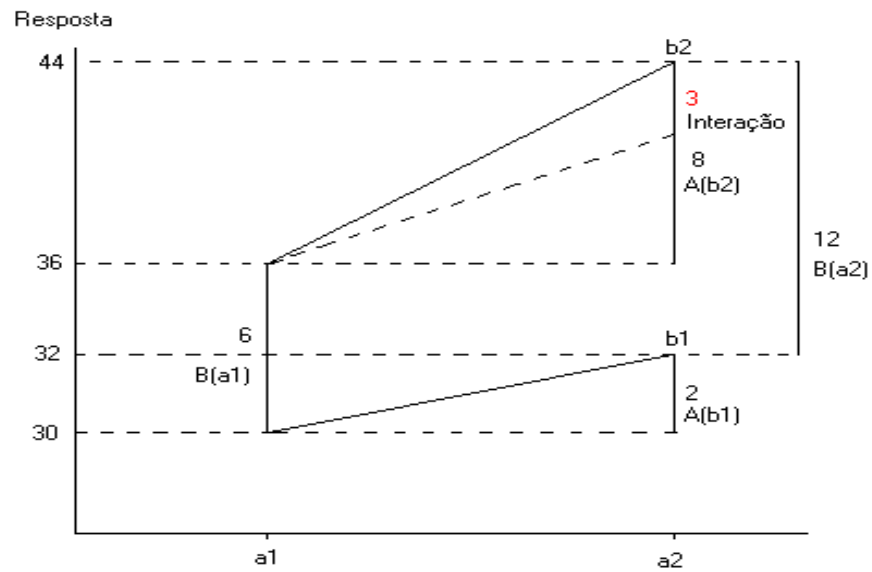
No exemplo,

$$AB = \frac{1}{2}[(44 - 36) - (32 - 30)] = \frac{1}{2}[8 - 2] = 3$$

$$BA = \frac{1}{2}[(44 - 32) - (36 - 30)] = \frac{1}{2}[12 - 6] = 3$$

Graficamente pode-se visualizar os efeitos da seguinte forma:

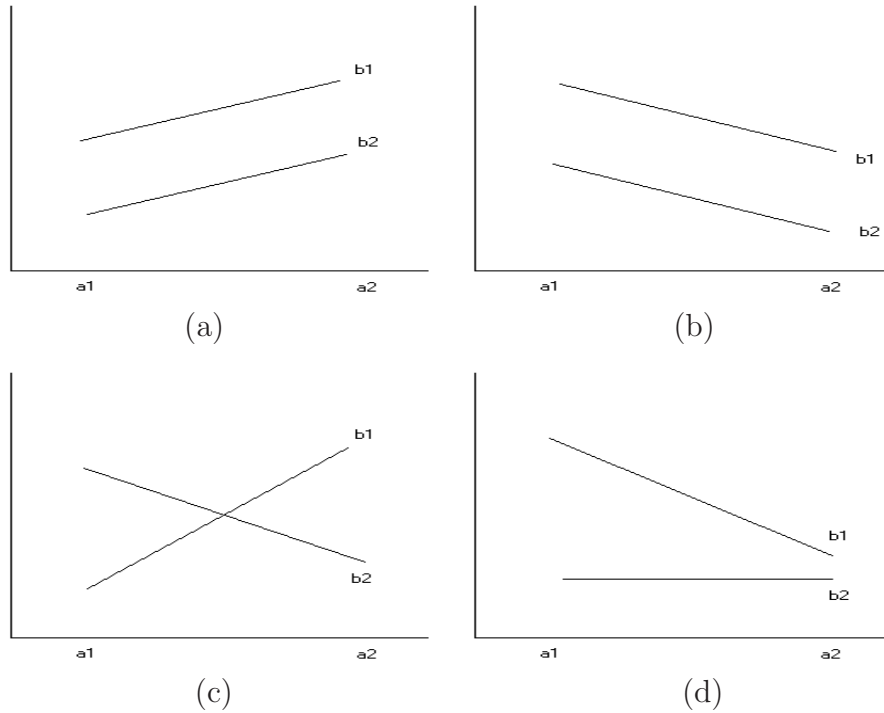
Figura 1: Exemplo de um gráfico de interação.



Os gráficos de interação podem apresentar diferentes comportamentos. Em geral, quando as retas são paralelas, é sinal de que não existe interação. Quando as retas se cruzam ou não são paralelas, pode ser que exista interação. Tudo depende da magnitude da interação e do erro experimental. Nem sempre, retas cruzadas indicam interação.

Na figura 2 são apresentados alguns exemplos de comportamento de gráficos de interação:

Figura 2: Exemplos de gráficos de interação.



1.4 Modelo estatístico - 2 Fatores

Para um experimento fatorial com 2 fatores, em um delineamento completamente casualizado, o modelo estatístico é dado da seguinte forma:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

onde

μ = constante;

α_i = efeito do i-ésimo nível do fator A; $i=1, \dots, a$

β_j = efeito do j-ésimo nível do fator B; $j=1, \dots, b$

$(\alpha\beta)$ = efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator A e j-ésimo nível do fator B;

ϵ_{ijk} = erro associado ao i-ésimo nível do fator A, j-ésimo nível do fator B e a k-ésima repetição; $k=1, \dots, r$

Para os erros, pressupõe-se que

$$\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

O Quadro da análise de variância (4) é construído da seguinte forma:

Tabela 4: Quadro da Análise de Variância para um experimento fatorial com 2 fatores de efeitos fixos.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	a-1	SQA	SQA/a-1	QMA/QMRes
B	b-1	SQB	SQB/B-1	QMB/QMRes
AB	(a-1)(b-1)	SQAB	SQAB/(a-1)(b-1)	QMAB/QMRes
Resíduo	ab(r-1)	por diferença	SQRes/ab(r-1)	
Total	abr-1	SQtotal		

Para o cálculo das Somas de Quadrados, tem-se as seguintes expressões:

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQA = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQB = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQAB = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abr} - SQA - SQB$$

$$SQ_{Res} = SQ_{Total} - SQA - SQB - SQAB$$

As hipóteses testadas para cada fator dependem do efeito considerado, se fixo ou aleatório.

No caso de efeitos **fixos**, as hipóteses testadas serão as seguintes:

Fator A:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Fator B:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \quad \forall j$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } j \neq j'$$

Interação AB

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

No caso de efeitos **aleatórios**, as hipóteses testadas serão as seguintes:

Fator A:

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0$$

Fator B:

$$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$$

Interação AB

$$H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

Em resumo, as Esperanças dos Quadrados Médios estão na tabela 5. Em um modelo estatístico com dois ou mais fatores, podem existir modelos de efeitos fixos e aleatórios. Neste caso, dizemos que o modelo é de efeitos mistos.

Quando ocorre interação entre um fator de efeito fixo e um fator de efeito aleatório, diz-se que o efeito da interação é aleatório.

Tabela 5: Esperança de Quadrados médios para um experimento com 2 fatores.

Causas de Variação	GL	Efeito Fixo Modelo I	Efeitos Aleatórios Modelo II
A	a-1	$\sigma^2 + br \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + br\sigma_{\alpha}^2$
B	b-1	$\sigma^2 + ar \frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + ar\sigma_{\beta}^2$
AB	(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + r \frac{\sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$
Resíduo	ab(r-1)	σ^2	σ^2

1.5 Suposição de não interação

Em certas situações, o pesquisador pode considerar, por experiência, a não existência da interação entre os fatores na modelagem dos dados.

Se existir de fato interação significativa, as conclusões sobre o experimento podem estar equivocadas. Em geral, pode-se considerar este componente no modelo e avaliar a significância através do *valor p*.

1.6 Teste de comparações múltiplas

Os testes de comparações múltiplas anteriormente estudados (Tukey, Duncan, SNK), podem ser convenientemente aplicados também para os experimentos fatoriais, levando em conta que:

1. Se a interação for **não significativa** :
Comparar médias entre níveis do fator(es) significativo(s);
2. Se a interação for **significativa**:

Comparar níveis de um fator dentro de um nível do outro fator (correspondente à interação significativa)

2 Experimento fatorial 2^k

2.1 Introdução

Os experimentos fatoriais 2^k permitem ao pesquisador estudar k fatores, cada um com 2 níveis. O número de fatores varia segundo as necessidades e condições experimentais (recursos humanos, materiais e econômicos, principalmente).

Neste tipo de experimento, são usados, nos níveis dos fatores, valores das características que permitam avaliar o comportamento da variável resposta, de uma forma simples. Em geral, utilizam-se os valores extremos de operação (máximo e mínimo) para avaliar os efeitos dos fatores sobre a variável resposta. Em outros casos, pode-se trabalhar com a ausência ou presença da característica em estudo, nos níveis dos fatores.

2.2 Experimentos fatoriais 2^2

Em experimentos fatoriais 2^2 , para facilitar a construção de um experimento com confundimento, por exemplo, utiliza-se a notação de sinais “mais” e “menos”. Nesse tipo de experimento, os níveis dos fatores são arbitrariamente designados com + para o nível “máximo” (ou presente), e “-” para o nível “mínimo” (ou ausente).

Na tabela 6, a representa a combinação do nível A+ com B-, b representa A- e B+, ab representa os dois fatores no nível +, e (1) representa os dois fatores no nível -. Suponha um experimento fatorial 2^2 . Utilizando a notação de sinais a representação pode ser visualizada na tabela 6:

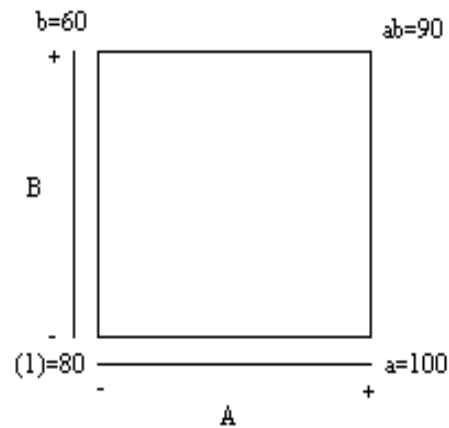
Graficamente, as combinações dos diferentes níveis dos diferentes fatores podem ser expressas como efeitos, utilizando-se os símbolos (1) , a , b e ab . Na figura 3, representa-se a soma das r repetições de cada combinação.

A estimação dos efeitos pode ser feita considerando que (1) , a , b e ab representam os totais de todas as n repetições de cada tratamento. Assim, por exemplo,

Tabela 6: Tabela de sinais de um experimento fatorial 2^2 .

Fator A	Fator B	Tratamento	Efeito	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Total
-	-	A menor, B menor	(1)	28	25	27	80
+	-	A maior, B menor	a	36	32	32	100
-	+	A menor, B maior	b	18	19	23	60
+	+	A maior, B maior	ab	31	30	29	90

Figura 3: Representação de um experimento fatorial 2^2 .



para estimar o efeito do fator A, é necessário encontrar o efeito de A no nível menor de B, $[a-(1)]/n$, e o efeito de A no nível maior de B, $[ab-b]/n$, e tirar a média desses dois efeitos.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2n} \{ [ab - b] + [a - (1)] \} \\
 &= \frac{1}{2n} [ab + a - b - (1)]
 \end{aligned}$$

O efeito da interação AB, pode ser encontrado por:

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{1}{2n} \{ [ab - b] - [a - (1)] \} \\
 &= \frac{1}{2n} [ab + (1) - a - b]
 \end{aligned}$$

De outra forma, os efeitos podem ser estimados encontrando-se a diferença entre as médias dos tratamentos com sinal “+” e “-”.

$$\begin{aligned}
 A &= \bar{y}_{A+} - \bar{y}_{A-} \\
 &= \frac{ab + a}{2n} - \frac{b + (1)}{2n} \\
 &= \frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]
 \end{aligned}$$

E para a interação

$$\begin{aligned}
 AB &= \frac{ab + (1)}{2n} - \frac{a + b}{2n} \\
 &= \frac{1}{2n}[ab + (1) - a - b]
 \end{aligned}$$

Usando os dados da tabela 6, os efeitos médios estimados para A e AB são os seguintes: A=8,33 e AB=1,67.

2.3 Quadro de sinais “mais” e “menos”

Uma maneira alternativa de estimar os efeitos dos fatores, em um experimento fatorial, é representar as diferentes combinações de tratamentos, através de sinais “mais” e “menos”.

Para um experimento fatorial 2^2 , existem quatro combinações de tratamentos, que podem ser representadas por (1), a, b e ab. Assim, os efeitos podem ser estimados, utilizando-se contrastes entre as combinações de tratamentos (tabela 7). A coluna I será formada, sempre, por sinais de “mais”, e as demais serão compostas pelos sinais que representam os respectivos níveis de cada combinação.

Tabela 7: Tabela de sinais de um fatorial 2^2 .

Tratamento	Efeito Fatorial			
	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Como exemplo, pode-se estimar o efeito de A, usando-se o seguinte contraste:

$$-(1) + a - b + ab$$

2.4 Análise de Variância

Para o exemplo da tabela 6, considera-se o modelo

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (7)$$

com

$i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2, 3$ (repetições)

e os efeitos de A e B como sendo fixos.

As hipóteses testadas, neste experimento, são as seguintes:

Fator A:

$$H_0 : a_1 = a_2$$

$$H_1 : a_1 \neq a_2$$

Fator B:

$$H_0 : b_1 = b_2$$

$$H_1 : b_1 \neq b_2$$

Interação AB:

$$H_0 : (AB)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (AB)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

Obtenção da análise de variância

Para calcular as somas de quadrados dos fatores, é necessário obter um quadro auxiliar (tabela 8):

Tabela 8: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados.

Fator	a1	a2	Total
b1	80	100	180
b2	60	90	150
Total	140	190	330

$$C = \frac{(\sum_{i,j,k}^{2,2,3} y_{ijk})^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{(330)^2}{12} = 9075$$

$$SQ_{Total} = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 - C = (28^2 + \dots + 29^2) - C = 323$$

$$SQA = \frac{\sum_i y_{i..}^2}{JK} - C = \frac{(140^2 + 190^2)}{6} - C = 208,33$$

$$SQB = \frac{\sum_j y_{.j.}^2}{IK} - C = \frac{(180^2 + 150^2)}{6} - C = 75,00$$

$$SQA \times B = \frac{\sum_{ij} y_{ij.}^2}{K} - SQA - SQB - C = \frac{(80^2 + 100^2 + 60^2 + 90^2)}{3} - SQA - SQB - C = 8,33$$

A tabela da ANOVA fica da seguinte forma (tabela 9):

Tabela 9: Tabela da Análise de Variância para o experimento 2^2 .

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	1	208,33	208,33	53,15**
B	1	75,00	75,00	19,13**
AB	1	8,33	8,33	2,13 ^{ns}
Resíduo	8	31,34	3,92	
Total	11	323		

F tabelado:

$$F_{0,05}(1; 8) = 5,32$$

$$F_{0,01}(1; 8) = 11,26$$

Conclusão:

Fator A: De acordo com o teste F, existe diferença significativa, ao nível de 1% de significância, entre níveis do fator A, considerando a variável resposta em estudo.

Fator B: De acordo com o teste F, existe diferença significativa, ao nível de 1% de significância, entre níveis do fator B, considerando a variável resposta em estudo.

Interação A x B: De acordo com o teste F, não existe interação significativa entre os níveis dos fatores A e B, ao nível de significância de 5%, ou seja, o efeito do fator A é independente do fator b, e vice-versa.

2.5 Análise de Resíduos

Para que os resultados da análise de variância sejam válidos, é preciso que os pressupostos da análise de variância também sejam satisfeitos.

Inicialmente, verifica-se o pressuposto da normalidade dos resíduos, através do gráfico normal de probabilidade, ou através de um teste estatístico. Nesse livro, utilizaremos o teste de Shapiro-Wilk.

Em seguida, verifica-se o pressuposto da homocedasticidade. Vale ressaltar que, como em um experimento fatorial 2^k tem-se, apenas, dois níveis, pode ser difícil identificar problemas dessa natureza. Deve-se avaliar esse pressuposto para cada um dos fatores do experimento.

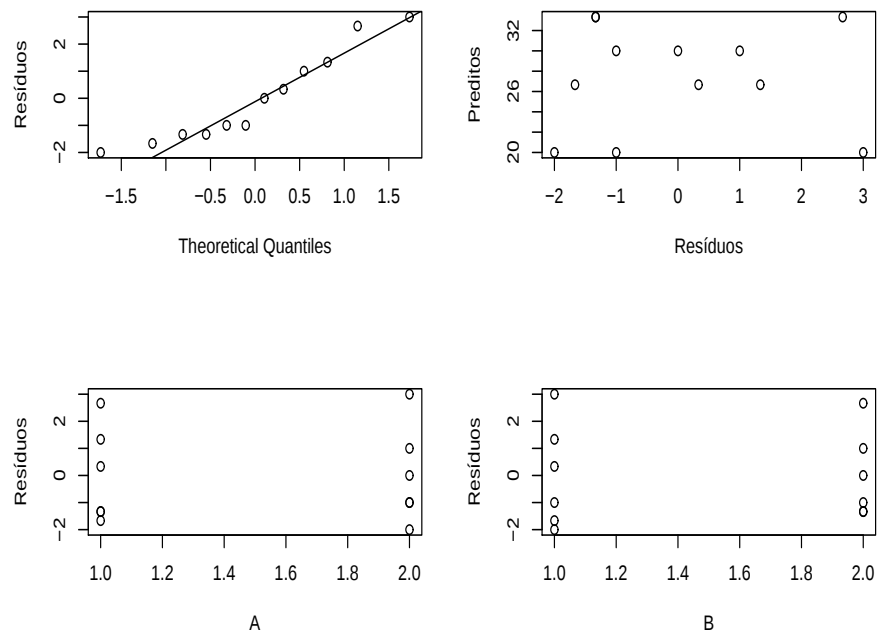
A independência dos resíduos também deve ser verificada, através de um gráfico dos resíduos *vs* preditos quando existe a informação da ordem de obtenção das observações.

Quando há repetições, *outliers* podem ser avaliados, utilizando-se do critério de $\pm 3s$.

No R, os pressupostos da análise de variância podem ser facilmente verificados. Observe, nos gráficos da figura 4 que não há problemas de inadequação do modelo.

Interpretando esses gráficos, observa-se que não há evidências de violação dos pressupostos.

Pelo teste de Shapiro-Wilk, não há evidências da violação da hipótese de normalidade dos resíduos desse experimento, considerando um nível de significância de

Figura 4: Análise de resíduos de um experimento fatorial 2^2 .

5%.

Shapiro-Wilk normality test

```
data: k2.aov$res
W = 0.906, p-value = 0.1895
```

Verifique se há algum candidato a outlier!

Observe, ainda, que, no experimento fatorial 2^k , como há somente dois níveis para cada fator, o próprio teste F funciona como um teste de comparações múltiplas. Basta somente saber quais são as médias de cada combinação, para inferir a respeito dos efeitos dos tratamentos.

Use,

```
> model.tables(k2.aov, ty="means")
```

para obter as médias dos níveis dos fatores.

2.6 Experimento fatorial 2^3

2.7 Introdução

Os experimentos fatoriais 2^3 são muito semelhantes aos experimentos fatoriais 2^2 . Basicamente, um terceiro fator é acrescentado ao modelo estatístico.

O modelo nesse caso, fica mais extenso:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

com

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, a \text{ ou } I \\ j &= 1, \dots, b \text{ ou } J \\ k &= 1, \dots, c \text{ ou } K \\ l &= 1, \dots, d \text{ ou } r \end{aligned}$$

e

y_{ijkl} é a observação referente ao efeito do i -ésimo nível do fator α , j -ésimo nível do fator β , k -ésimo nível do fator γ , efeito da interação entre o i -ésimo nível do fator α e j -ésimo nível do fator β , efeito da interação entre $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ e $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$, efeito do l -ésimo bloco ρ_l , uma constante μ e ao erro ϵ_{ijkl} .

O quadro da análise de variância pode ser formado da seguinte maneira (tabela 10):

Tabela 10: Quadro da Análise de Variância para o experimento com 3 fatores em blocos completos (efeitos fixos).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	a-1	SQA	SQA/a-1	QMA/QMRes
B	b-1	SQB	SQB/b-1	QMB/QMRes
C	c-1	SQC	SQC/c-1	QMC/QMRes
AB	(a-1)(b-1)	SQAB	SQAB/(a-1)(b-1)	QMAB/QMRes
AC	(a-1)(c-1)	SQAC	SQAC/a-1)(c-1)	QMAC/QMRes
BC	(b-1)(c-1)	SQBC	SQBC/(b-1)(c-1)	QMBC/QMRes
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	SQABC	SQABC/(a-1)(b-1)(c-1)	QMABC/QMRes
Trat	(t-1)	SQTrat	SQTrat/(t-1)	QMTrat/QMRes
Blocos	(d-1)	SQBlocos	SQBlocos/(d-1)	QMBlocos/QMRes
Resíduo	diferença	SQRes	SQRes/	
Total	abcd-1	SQTotal		

As hipóteses testadas nesse modelo são as seguintes:

Fator A

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Fator B

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \quad \forall j$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } j \neq j'$$

Fator C

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k \quad \forall k$$

$$H_1 : \gamma_k \neq \gamma_{k'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } k \neq k'$$

Interação AB

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

Interação AC

$$H_0 : (\alpha\gamma)_{ik} = 0 \quad \forall i, k$$

$$H_1 : (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ik$$

Interação BC

$$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0 \quad \forall j, k$$

$$H_1 : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } jk$$

Interação ABC

$$H_0 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad \forall i, j, k$$

$$H_1 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um } trio ijk$$

Assim como nos experimentos fatoriais 2^2 , um experimento fatorial 2^3 pode ser conduzido em um delineamento em blocos completos casualizados. Note que, nesse experimento, o número de tratamentos passa a ser oito, e o número de unidades experimentais aumenta bastante, em comparação com o experimento fatorial 2^2 .

Por essa razão, experimentos com mais do que 3 fatores, muitas vezes, são planejados através da técnica do confundimento (para redução do tamanho do bloco), ou através do fracionamento do experimento (para redução do número de unidades experimentais).

A análise estatística é realizada da maneira usual (ver exemplo 2.8).

2.8 Exemplo de um experimento fatorial 2^3

Considere o modelo de um experimento com 3 fatores e as respectivas interações duplas e triplas.

Considere, ainda, os dados de um experimento no delineamento em blocos completos casualizados com 6 repetições, no esquema fatorial $2 \times 2 \times 2$, cada fator em dois níveis: 0 (ausência) e 1 (presença) (tabela 11).

A análise de variância, para esse experimento, é realizada da mesma maneira

Tabela 11: Experimento fatorial 2^3 .

Tratamentos	Blocos						TOTAIS
	I	II	III	IV	V	VI	
$A_0B_0C_0$	3.029	3.857	2.448	2.448	3.543	4.314	19.639
$A_1B_0C_0$	3.362	3.714	3.429	3.190	2.686	4.038	20.419
$A_0B_1C_0$	3.448	3.600	3.895	4.267	3.086	3.657	21.953
$A_0B_0C_1$	2.438	3.086	3.771	4.657	1.962	3.210	19.124
$A_1B_1C_0$	4.171	3.114	4.124	3.981	3.038	3.590	22.018
$A_1B_0C_1$	4.905	6.295	4.924	4.952	5.381	5.543	32.000
$A_0B_1C_1$	3.533	5.048	3.467	4.095	1.876	2.895	20.914
$A_1B_1C_1$	4.476	4.752	4.848	4.676	6.829	3.771	29.352
TOTAIS	29362	33.466	30.906	32.266	28.401	31.018	18.5419

como feita para os experimentos fatoriais 2^2 . Considera-se, apenas, mais um fator na análise. Nesse caso, três quadros auxiliares são necessários para fazer os cálculos de soma de quadrados.

Análise de Variância

Para o cálculo da Análise de Variância, utilizam-se os seguintes quadros auxiliares:

Tabela 12: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de A e B.

	B0	B1	Total
A0	38.763	42.867	81.630
A1	52.419	51.370	103.789
Total	91.182	94.327	185.419

Tabela 13: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de A e C.

	C0	C1	Total
A0	41.592	40.038	81.630
A1	42.437	61.352	103.789
Total	84.029	101.390	185.419

As somas de quadrados podem ser obtidas da seguinte forma:

$$C = \frac{(185.419)^2}{6 \times 8} = 716.254.283$$

$$SQ_{Total} = (3029^2 + \dots + 3771^2) - C = 49.845.226$$

$$SQ_{Trat} = \frac{(19.639^2 + \dots + 29.352^2)}{6} - C = 26.748.232$$

Tabela 14: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de B e C.

	C0	C1	Total
B0	40.058	51.124	91.182
B1	43.971	50.266	94.237
Total	84.029	101.390	185.419

$$SQ_{\text{Blocos}} = \frac{(29.362^2 + \dots + 31.018^2)}{8} - C = 2.134.332$$

$$SQA = \frac{(81.630^2 + 103.789^2)}{24} - C = 10.229.610$$

$$SQB = \frac{(91182^2 + 94237^2)}{24} - C = 194.438$$

$$SQC = \frac{(84029^2 + 101390^2)}{24} - C = 6.279.256$$

$$SQAB = \frac{(38763^2 + \dots + 51370^2)}{12} - C - SQA - SQB = 553.196$$

$$SQAC = \frac{(41592^2 + \dots + 61352^2)}{12} - C - SQA - SQC = 8.728.749$$

$$SQBC = \frac{(40058^2 + \dots + 50266^2)}{12} - C - SQB - SQC = 474.218$$

$$SQABC = SQ_{\text{Trat}} - SQA - SQB - SQC - SQAB - SQAC - SQBC = 288.765$$

O quadro da Análise de Variância resultará em:

Tabela 15: Quadro da Análise de Variância para o experimento de adubação do cafeeiro, em um arranjo fatorial 2^3 conduzido no delineamento blocos completos casualizados (efeitos fixos).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	1	10.229.610	10.229.610	17,08**
B	1	194.438	194.438	0,32 NS
C	1	6.279.256	6.279.256	10,48**
AB	1	553.196	553.196	0,92 NS
AC	1	8.728.749	8.728.749	14,57**
BC	1	474.218	474.218	0,79NS
ABC	1	288.765	288.765	0,48 NS
Trat	7	26.748.232		
Blocos	5	2.134.332		
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	
Total	47	49.845.226		

Como a interação AC foi significativa, não pode-se estudar os efeitos principais isoladamente. Pode-se então, estudar o comportamento dos níveis de A na ausência e na presença de C (C0 e C1) e vice-versa. Neste caso, o efeito de B foi não significativo.

Mas, se esse efeito fosse significativo, poderia ser estudado isoladamente, pois não ocorreu interação com nenhum outro fator do modelo.

Em geral basta apenas definir uma forma: AB ou BA. Lembre-se de que AB=BA. Mas, dependendo do modo como o *pesquisador* deseja visualizar o resultado, as vezes, a definição da ordem de apresentação pode ser importante. O estudo da interação pode ser realizado das seguintes maneiras.

1. Estudo de A na ausência e presença de C:

SQA na ausência de C (C0)

$$\text{SQA d. C0} = \frac{41592^2 + 42437^2}{12} - \frac{(84029)^2}{24} = 29.751,0416$$

SQA na presença de C (C1)

$$\text{SQA d. C1} = \frac{40038^2 + 61352^2}{12} - \frac{(101390)^2}{24} = 18.928.608,17$$

Tabela 16: Quadro da Análise de Variância para estudo de A na ausência e presença de C.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
SQA d. C0	1	29.751,0416	29.751,0416	0,05NS
SQA d. C1	1	18.928.608,17	18.928.608,17	31,60**
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	

Conclusão: de acordo com o teste F, não há diferença significativa ($p > 0,05$) entre os níveis de A quando na ausência de C.

Há diferença significativa ($p < 0,01$), de acordo com o teste F, entre os níveis de A na presença de C. Com o uso de A1 juntamente com C1 a resposta aumenta significativamente.

2. Estudo de C na ausência e presença de A:

SQC na ausência de A (A0)

$$\text{SQC d. A0} = \frac{41592^2 + 40038^2}{12} - \frac{(81630)^2}{24} = 100622$$

SQC na presença de A (A1)

$$\text{SQC d. A1} = \frac{42437^2 + 61352^2}{12} - \frac{(103789)^2}{24} = 14907384$$

Como a interação AB=BA, as conclusões devem ser as mesmas em relação a análise anterior.

Vale lembrar, que os pressupostos com relação aos resíduos foram satisfeitos.

Tabela 17: Quadro da Análise de Variância para estudo de C na ausência e presença de A.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
SQC d. A0	1	100.622	100.622	0,17NS
SQC d. A1	1	4.907.384	4.907.384	24,89**
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	

Utilizando o quadro de sinais, também é possível obter-se os valores da soma de quadrados para qualquer efeito.

2.9 Quadro de sinais para um experimento fatorial com 2^3 fatores.

Também, para esse experimento, pode-se construir o quadro de sinais para estimar os efeitos dos fatores. Podemos, através da tabela 18, atribuir os sinais para cada um dos fatores do modelo:

Tabela 18: Tabela de sinais para um experimento fatorial com 3 fatores e 2 níveis.

Efeito	A0B0C0	A1B0C0	A0B1C0	A0B0C1	A1B1C0	A1B0C1	A0B1C1	A1B1C1
A	-	+	-	-	+	+	-	+
B	-	-	+	-	+	-	+	+
C	-	-	-	+	-	+	+	+
AB	+	-	-	+	+	-	-	+
AC	+	-	+	-	-	+	-	+
BC	+	+	-	-	-	-	+	+
ABC	-	+	+	+	-	-	-	+
Totais	19639	20419	21953	19124	22018	32000	20914	29352

O efeito de um fator pode ser estimado, por exemplo, do fator A, da seguinte forma:

$$\hat{Y}_A = -A_0B_0C_0 + A_1B_0C_0 - A_0B_1C_0 - A_0B_0C_1 + A_1B_1C_0 + A_1B_0C_1 - A_0B_1C_1 + A_1B_1C_1$$

Observe que atribuiu-se o sinal $-$ para ausência de A, e o sinal $+$ para presença de A.

Assim, pode-se estimar o efeito do fator, substituindo o total de cada combinação, da seguinte forma:

$$\hat{Y}_A = -19.639 + 20.419 - 21.953 - 19.124 + 22.018 + 32.000 - 20.914 + 29.352 = 22.159$$

A Soma de Quadrados do efeito é calculada por

$$SQ_{\text{efeito}} = \frac{\hat{Y}_{\text{efeito}}^2}{r \sum_{i=1}^I c_i^2}$$

onde r=repetições e c=coeficientes (número de sinais ou termos)

Então,

$$SQA = \frac{(22.159)^2}{6 \times 8} = 10.229.610,02$$

Compare com os resultados do exercício deste tópico

3 Experimentos com confundimento

3.1 Introdução

Em alguns experimentos, não é possível ter homogeneidade dentro de blocos, devido à necessidade de se ter blocos grandes. Em experimentos fatoriais, esse fato não é incomum, devido ao grande número de tratamentos.

Dessa forma, uma saída é reduzir o número de tratamentos (fatores ou níveis) para que estes sejam alocados em blocos pequenos e homogêneos. Porém, com isso, o experimentador perde a oportunidade de estudar mais níveis e/ou mais fatores no experimento.

Em geral, nos experimentos fatoriais 2^k , as interações triplas ou superiores podem não ser de interesse do pesquisador, ou ainda, sabe-se, a priori, que algumas interações não ocorrem. Nessa situação, uma segunda alternativa é confundir o efeito de algum fator com o efeito de blocos.

A vantagem deste tipo de experimento é que se consegue estudar a mesma quantidade de fatores ou níveis, com homogeneidade dentro dos blocos.

Uma desvantagem é que, quando se faz uso desta técnica, existe uma redução dos graus de liberdade do resíduo. E claro, alguns efeitos (de interação) não poderão ser estimados.

Dizemos que dois efeitos estão *confundidos*, quando não é possível isolar o efeito de cada um deles.

Confundimento é uma técnica de delineamento experimental, para realizar um experimento fatorial completo em blocos, onde o tamanho do bloco é menor do que o número de tratamentos (considerando uma repetição). Este procedimento faz com que certos efeitos, normalmente interações de ordem alta, fiquem confundidos com o efeito de blocos.

3.2 Confundimento no fatorial 2^k

O delineamento de um experimento, onde o número de tratamentos ou com-

combinações não podem ser locadas em um único bloco, pode ser feito de algumas maneiras. Inicialmente, decide-se qual interação deverá ser confundida. Normalmente, escolhe-se aquela de maior grau. Para definir quais tratamentos devem ser alocados em cada bloco, pode-se utilizar o critério de sinais. Em um bloco ou bloquinho, alocam-se as combinações com sinal “mais” e em outro as combinações com sinal “menos”. Um outro método é considerar as combinações que possuem efeitos com número de letras, pares e ímpares. Por exemplo, o efeito da interação AB possui um número par de letras, e o efeito da interação ABC possui um número ímpar.

Exemplo com repetição:

Considere o experimento fatorial com os fatores ABC (2^3), supondo que, nesse experimento, não seja possível ter blocos homogêneos com 8 tratamentos, e que a interação ABC não seja de interesse. No entanto, pode-se construir blocos menores, com 4 tratamentos e, nesse caso, uma saída seria confundir o efeito da interação ABC com blocos.

Para um experimento fatorial 2^3 , utiliza-se o quadro de sinais (+ e -) para formar os sub-blocos ou bloquinhos, colocando-se, de um lado, coeficientes positivos e, de outro, os coeficientes negativos.

Para situações onde o número de tratamentos é grande, existe outra maneira de se determinar o confundimento e a formação dos blocos.

Assim, a partir de um bloco, temos a seguinte formação, com o confundimento da interação tripla ABC:

<i>Bloco1</i>	<i>Bloco2</i>
<i>A0B0C0</i>	<i>A1B0C0</i>
<i>A1B1C0</i>	<i>A0B1C0</i>
<i>A1B0C1</i>	<i>A0B0C1</i>
<i>A0B1C1</i>	<i>A1B1C1</i>

Observe que cada nível de um fator aparece duas vezes, dentro de um mesmo bloco. Isso garante que o efeito da interação dupla ainda pode ser estimado, sem perdas. Já, para a interação tripla, isso não ocorre, uma vez que nem todas as combinações triplas ocorrem dentro de um mesmo bloco.

A análise de variância será realizada, conforme a tabela 19:

Veja que, nesse caso, o efeito da interação tripla não é estimado, pois ele está confundido com blocos.

Tabela 19: Quadro da Análise de Variância para um experimento 2^3 , com e sem confundimento da interação tripla, com 4 repetições.

Causas de	GL s/conf.	GL c/ conf.
A	1	1
B	1	1
C	1	1
AB	1	1
AC	1	1
BC	1	1
ABC	1	-
TRAT	7	6
BLOCOS	3	7
RESÍDUO	21	18
Total	31	31

3.3 Confundimento nos experimentos fatoriais 3^2

Em experimentos fatoriais com mais de dois níveis, para a formação de blocos incompletos, utilizam-se as **equações de geometria finita**, baseadas no sistema de numeração ternário ou de base 3, onde utilizam-se, apenas, 3 algarismos: 0, 1 e 2. Aqui, o algarismo 3, no sistema decimal, representa o 0, no sistema ternário, o algarismo 4 representa o 1, o algarismo 5 representa o 2, e assim por diante.

Exemplo:

Em um experimento fatorial 3^2 , podem ser formados 9 tratamentos, da seguinte forma: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.

Designando x_1 para o primeiro fator e x_2 para o segundo fator, podemos formar as equações de geometria finita que fornecerão os “bloquinhos” do experimento.

As equações são:

$$x_1 + x_2 = 0, 1, 2 \quad (\text{módulo } 3) \quad (8)$$

$$x_1 + 2x_2 = 0, 1, 2 \quad (\text{módulo } 3) \quad (9)$$

$$2x_1 + x_2 = 0, 1, 2 \quad (\text{módulo } 3) \quad (10)$$

A primeira equação fornece uma possível combinação de bloquinhos e a segunda, outra combinação.

Para a formação dos bloquinhos, devemos escolher uma das equações (que formarão 3 bloquinhos cada em função do módulo 3), colocando, em um bloco, a soma dos níveis da equação igual a 0, em outro, a soma igual a 1 e no terceiro, a soma igual a 2. Assim, se utilizarmos a primeira equação, tem-se a seguinte formação:

$Bloco1 : x_1 + x_2 = 0$	$Bloco2 : x_1 + x_2 = 1$	$Bloco3 : x_1 + x_2 = 2$
$00 \rightarrow 0 + 0 = 0$	$01 \rightarrow 0 + 1 = 1$	$02 \rightarrow 0 + 2 = 2$
$12 \rightarrow 1 + 2 = 3 = 0$	$10 \rightarrow 1 + 0 = 1$	$11 \rightarrow 1 + 1 = 2$
$21 \rightarrow 2 + 1 = 3 = 0$	$22 \rightarrow 2 + 2 = 4 = 1$	$20 \rightarrow 2 + 0 = 2$

A análise de variância de um experimento fatorial 3^2 , com 4 repetições, sem e com confundimento, ficaria da seguinte forma (tabela 20):

Tabela 20: Quadro da Análise de Variância para um experimento 3^2 , com e sem confundimento da interação dupla.

Causas de	GL s/conf.	GL c/ conf.
A	2	2
B	2	2
AB	4	2
TRAT	8	6
BLOCOS	3	11
RESÍDUO	24	18
Total	35	35

Observe que apenas dois graus de liberdade da interação foram perdidos, com o confundimento dos blocos. Assim, ainda pode-se estimar o efeito da interação da parte não confundida. Neste caso, dizemos que temos um experimento com *confundimento parcial*.

3.4 Confundimento no Fatorial 3^3

Em um experimento fatorial completo 3^3 existem 27 combinações possíveis entre os níveis dos diferentes fatores. Considerando a necessidade de realização de um experimento em blocos completos casualizados, pode ser difícil constituir blocos homogêneos.

De modo geral, em um experimento fatorial 3^k são possíveis 3^p blocos incompletos com $p < k$.

Utilizando-se a técnica do confundimento nesse tipo de experimento, podem ser estabelecidos 4 grupos diferentes de tratamentos para formação dos blocos ou bloquinhos. Especificamente nesse exemplo, a interação tripla possuirá 8 graus de liberdade, onde apenas dois podem ser utilizados para o uso do confundimento com da interação com blocos. Portanto, isso é considerado um *confundimento parcial*.

Ainda, isso será visto com mais atenção, esse experimento poderá ser realizado com apenas uma repetição de cada tratamento e nesse caso, usa-se a interação tripla como resíduo para obtenção da estatística F.

Em um experimento fatorial 3^3 , o confundimento pode ser realizado de 4 maneiras (grupos) diferentes. A construção dos grupos baseia-se nas equações de geometria finita, utilizando o sistema ternário. Estes 4 grupos são conhecidos como grupos de Yates e são fornecidos a seguir:

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, 1, 2 \\ W &= 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, 1, 2 \\ X &= x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 1, 2 \\ Y &= x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Utilizando o grupo Z, obtém-se a seguinte estrutura:

<i>Bloco1</i>			<i>Bloco2</i>			<i>Bloco3</i>		
$x_1 + x_2 + x_3$		= 0	$x_1 + x_2 + x_3$		= 1	$x_1 + x_2 + x_3$		= 2
000	$\rightarrow 0 + 0 + 0$	= 0	001	$\rightarrow 0 + 0 + 1$	= 1	002	$\rightarrow 0 + 0 + 2$	= 2
012	$\rightarrow 0 + 1 + 2 = 3$	= 0	010	$\rightarrow 0 + 1 + 0$	= 1	011	$\rightarrow 0 + 1 + 1$	= 2
021	$\rightarrow 0 + 2 + 1 = 3$	= 0	022	$\rightarrow 0 + 2 + 2 = 4$	= 1	020	$\rightarrow 0 + 2 + 0$	= 2
102	$\rightarrow 1 + 0 + 2 = 3$	= 0	100	$\rightarrow 1 + 0 + 0$	= 1	101	$\rightarrow 1 + 0 + 1$	= 2
111	$\rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$	= 0	112	$\rightarrow 1 + 1 + 2 = 4$	= 1	110	$\rightarrow 1 + 1 + 0$	= 2
120	$\rightarrow 1 + 2 + 0 = 3$	= 0	121	$\rightarrow 0 + 2 + 2 = 4$	= 1	122	$\rightarrow 1 + 2 + 2 = 5$	= 2
201	$\rightarrow 2 + 0 + 1 = 3$	= 0	202	$\rightarrow 2 + 0 + 2 = 4$	= 1	200	$\rightarrow 2 + 0 + 0$	= 2
210	$\rightarrow 2 + 1 + 0 = 3$	= 0	211	$\rightarrow 2 + 1 + 1 = 4$	= 1	212	$\rightarrow 2 + 1 + 2 = 5$	= 2
222	$\rightarrow 2 + 2 + 2 = 6$	= 0	220	$\rightarrow 2 + 2 + 0 = 4$	= 1	221	$\rightarrow 2 + 2 + 1 = 5$	= 2

Agora, os blocos deverão ser formados utilizando-se as combinações de níveis de fatores com os índices correspondentes.

3.5 Exemplo

Considere o seguinte conjunto de dados, proveniente de um experimento fatorial 3^3 , conduzido por meio da técnica do confundimento. Utilizou-se o grupo W para construção dos bloquinhos.

Tabela 21: Experimento fatorial 3^3 com confundimento (grupo W)

Bloco 1		Bloco 2		Bloco 3		Totais
Trat	Resp	Trat	Resp	Trat	Resp	
000	5719	001	6406	002	4781	16.906
012	5188	010	6719	011	6094	18.001
021	7062	022	6875	020	6875	20.812
101	4812	102	5812	100	3500	14.124
110	5656	111	6062	112	7656	19.374
122	5969	120	6594	121	6062	18.625
202	5938	200	6031	201	6812	18.781
211	5375	212	6844	210	5547	17.766
220	6031	221	6719	222	6781	19.531
Total	51.750		58.062		54.108	163.920

A análise de variância é feita da forma usual para um experimento fatorial, incluindo os quadros auxiliares para cálculo do efeito da interação. Lembrando que o efeito da interação tripla (parte não confundida) é estimado por diferença.

Análise de Variância

As somas de quadrados são obtidas por:

$$C = \frac{163920}{9 \times 3} = 995176533$$

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1, j=1} y_{ij}^2 - C = \frac{5719^2 + \dots + 6781^2}{9} - C = 19456507$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{\sum_{j=1}^3 B_j^2}{I} - C = \frac{(51750^2 + 58062^2 + 54108^2)}{9} - C = 2260579$$

Para encontrar o restante das somas de quadrados é necessário construir os quadros auxiliares. Observe que os totais os níveis dos fatores são obtidos através da combinação das combinações que possuem o nível do fator correspondente, da seguinte forma:

$$A_0 B_0 = 000 + 001 + 002 = 5719 + 6406 + 4781 = 16906 \text{ e assim por diante.}$$

Tabela 22: Quadro auxiliar I para obtenção das Somas de Quadrados.

	B0	B1	B2	Total
A0	16906	18001	20812	55719
A1	14124	19374	18625	52123
A2	18781	17766	19531	56078
Total	49811	55141	58968	163920

Tabela 23: Quadro auxiliar II para obtenção das Somas de Quadrados.

	C0	C1	C2	Total
A0	19313	19562	16844	55719
A1	15750	16936	19437	52123
A2	17604	18906	19563	56078
Total	52672	55404	55844	163920

Tabela 24: Quadro auxiliar III para obtenção das Somas de Quadrados.

	C0	C1	C2	Total
B0	15250	18030	16531	49811
B1	17922	17531	19688	55141
B2	19500	19843	19625	58968
Total	52672	55404	55844	163920

Assim, as somas de quadrados dos fatores principais e das interações ficam:

$$\begin{aligned} SQA &= \frac{55719^2 + 52123^2 + 56078^2}{9} - C \\ SQB &= \frac{49811^2 + 55141^2 + 58968^2}{9} - C \\ SQC &= \frac{52672^2 + 55404^2 + 55844^2}{9} - C \\ SQAB &= \frac{(16906^2 + \dots + 19531^2)}{3} - C - SQA - SQB \\ SQAC &= \frac{(19313^2 + \dots + 19563^2)}{3} - C - SQA - SQC \\ SQBC &= \frac{(15250^2 + \dots + 19625^2)}{3} - C - SQB - SQC \end{aligned}$$

A interação tripla, ABC, é estimada por diferença.

Finalmente, o quadro da ANOVA pode ser completado:

Tabela 25: Quadro da Análise de Variância para o experimento faorial 3³ utilizando a técnica do confundimento (Grupo W).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Blocos	2	2.260.579	1.130.290	4,62 ns
A	2	1.063.042	531.521	2,17 ns
B	2	4.700.203	2.350.102	9,61 **
C	2	656.260	328.130	1,34 ns
AB	4	3.905.134	976.284	3,99 ns
AC	4	3.869.632	967.408	3,96 ns
BC	4	1.535.012	383.753	1,57 ns
ABC(resíduo)	6	1.466.645	244.441	
Total	26	19.456.507		

De acordo com o teste F, apenas o efeito do fator B foi significativo ao nível de 1%, considerando a variável resposta em estudo.

Nesse caso, a análise dos pressupostos fica bastante prejudicada, uma vez que, não foram utilizadas repetições. Mas, isso ainda pode ser realizado.

4 Gráfico Normal de Probabilidade para análise de experimentos fatoriais

Quando analisamos dados de experimentos sem repetições, duas situações ocorrem:

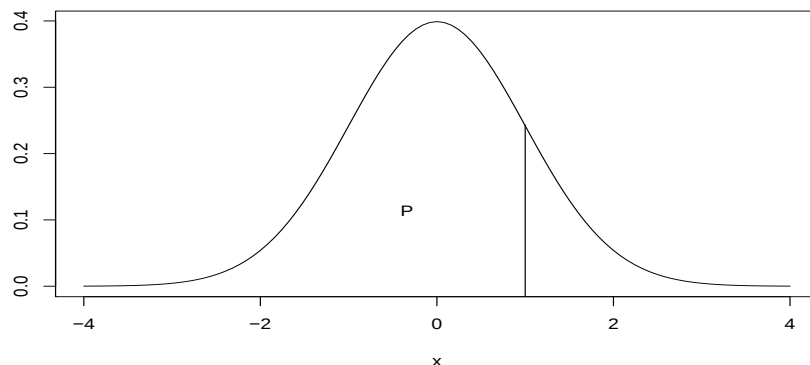
1. Interações de ordem maior realmente ocorrem: isso pode inflacionar o termo de erro, induzindo a conclusões erradas pois teremos um resíduo superestimado.
2. Ainda, normalmente estamos interessados em selecionar efeitos que sejam significativos: quando pressupomos que algum efeito pode não ser significativo, podemos não avaliar corretamente o que está acontecendo no experimento.

Nessa situação, uma alternativa ao teste F da ANOVA é utilizar o *Gráfico Normal de Probabilidade*. Nesse gráfico, todos os efeitos estimados dos fatores podem ser avaliados, inclusive as interações de maior ordem. Utilizando a estratégia de uma repetição ou mesmo com o confundimento (parcial ou completo), pode-se avaliar a significância de cada um dos fatores individualmente.

4.1 Como construir o gráfico

Considere a figura 5, representando uma Distribuição Normal.

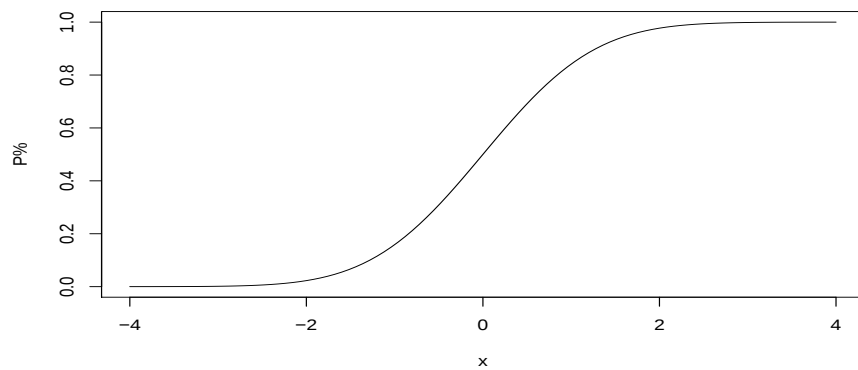
Figura 5: Distribuição Normal.



A probabilidade percentual P de ocorrência de algum valor menor do que x é dada pela área a esquerda de x .

Fazendo um gráfico para todos os possíveis valores de P vs x obtém-se a curva normal acumulada, que tem a característica sigmóide (forma de S, figura 6).

Figura 6: Distribuição Normal Acumulada.



Para gerar o gráfico normal de probabilidade, faz-se um ajuste na escala vertical (P) de modo a se obter uma linha reta. Considere uma amostra de 10 pontos ($n=10$). A primeira observação (ordenada) apresenta os primeiros 10% da distribuição acumulada da variável. A segunda representa 20% e assim por diante. Considerando que a para estabelecer uma reta a partir da curva acumulada o ponto central (50% ou 0.5) permanece o mesmo, o ajuste pode ser realizado em relação ao centro ou 0.5. Ou ainda, a cada 10% pode-se considerar o ponto intermediário da classe para refazer o gráfico de P vs x . Assim, de forma geral tem-se

$$P_i = 100 * \frac{i - 0.5}{n}$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representa a posição da observação na amostra ordenada e n o tamanho da amostra ou no caso de um experimento, o número de efeitos.

Um gráfico dos efeitos ordenados vs os valores percentuais P_i indica o comportamento dos efeitos. Nesse gráfico, tem-se que tentar avaliar quais são os efeitos que não devem estar ocorrendo ao acaso. Isso pode ser identificado de forma *subjetiva* pelos pontos que se afastam de uma linha reta.

Essa linha reta é colocada subjetivamente sobre os pontos. Uma sugestão (Montgomery, 2001) é estabelecer uma reta entre os pontos nos quantis 25% e 75%.

Para saber quais são os efeitos *significativos* basta observar quais são os pontos

no gráfico que se afastam da reta e identificar os efeitos correspondentes.

4.2 Exemplo

Considere o exemplo fornecido nas notas de aula de um experimento fatorial 2^4 com uma repetição. Os efeitos estimados são apresentados na tabela 26:

Tabela 26: Estimativas de efeitos de um experimento 2^4

Efeitos	Estimativas
A	-8,00
B	24,00
C	-2,25
D	-5,50
AB	1,00
AC	0,75
AD	0,00
BC	-1,25
BD	4,50
CD	-0,25
ABC	-0,75
ABD	0,50
ACD	-0,25
BCD	-0,75
ABCD	-0,25

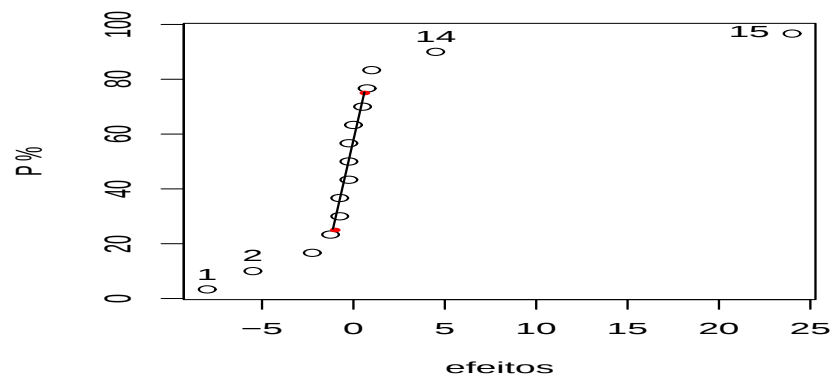
As probabilidades de cada um dos efeitos são obtidas por $P = 100*(i-0,5)/15$. Assim, os resultados para construção do gráfico são apresentados na tabela 4.2

Tabela 27: Cálculo dos Percentuais P_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
efeitos	-8	-5,5	-2,25	-1,25	-0,75	-0,75	-0,25	-0,25	-0,25	0	0,5	0,75	1	4,5	24
Identificação	A	D	C	BC	ABC	BCD	CD	ACD	ABCD	AD	ABD	AC	AB	BD	B
P_i	3,3	10	16,7	23,3	30	36,7	43,3	50	56,7	63,3	70	76,7	83,3	90	96,7

Construindo o gráfico (figura 7), pode-se avaliar quais dos efeitos são significativos.

Figura 7: Gráfico Normal de Probabilidade.



Observe que os pontos que se afastam da reta são aqueles que indicam um efeito significativo.

5 Experimento Fatorial Fracionado

5.1 Introdução

Quando o número de fatores em um experimento é grande, o número de combinações também aumenta. Em um experimento fatorial 2^3 tem-se 8 combinações, em um experimento fatorial 2^6 são 64 combinações. Nesse último caso, 6 graus de liberdade são referentes aos efeitos principais e 15 graus de liberdade para interações duplas. Os 42 graus de liberdade restantes são referentes as outras interações. Assim como nos experimentos com confundimento, pode-se assumir que interações de ordem superior são desprezíveis ou sem interesse. Desse modo, o pesquisador pode realizar apenas uma **fração** do experimento fatorial completo e analisar os efeitos principais, por exemplo, desprezando interações de ordem superior.

Os experimentos que utilizam apenas uma fração das combinações possíveis são chamados de experimentos fatoriais fracionários. Nesse capítulo serão estudados os experimentos fatoriais fracionários $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

5.2 Utilidade

Em experimentos industriais é comum existirem muitos fatores afetando uma variável resposta, principalmente em experimentos utilizados no desenvolvimento de produtos e processos. Quando do desenvolvimento inicial de algum produto ou processo, o pesquisador pode não ter em mente quais são os potenciais fatores que causam algum efeito sobre a variável resposta. Em geral muitos fatores são estudados simultaneamente para tentar identificar aqueles que geram alguma mudança ou alteração na resposta, sem no entanto, se preocupar em avaliar o grau do efeito estudado.

Esse tipo de experimento é conhecido como *screening*. A partir de um experimento do tipo *screening* o pesquisador pode decidir quais são os fatores que atuam de forma significativa. A seguir, um novo ou novos experimentos completos são realizados para investigar melhor os fatores significativos. Esse tipo de experimentação

aumenta sensivelmente a produtividade em pesquisa.

5.3 Fração $\frac{1}{2}$ do fatorial 2^k

Em um experimento com 3 fatores são necessárias 8 combinações de tratamentos para realização de um experimento fatorial completo ($2^3 = 8$). Contudo, pode não ser possível executar o experimento completo. Uma alternativa é realizar **meia fração** desse experimento, ou seja, $2^{3-1} = 4$ combinações de tratamento.

Veja que

$$\frac{1}{2}2^3 = 2^{-1}2^3 = 2^{3-1}$$

A notação utilizada para experimentos fatoriais fracionários desse tipo é

$$\boxed{2^{k-1}}$$

A tabela de sinais + e −, tabela 28, pode ser utilizada para selecionar quais combinações deverão ser utilizadas. Por exemplo, pode-se utilizar os tratamentos que possuem somente os sinais + na coluna ABC.

Tabela 28: Tabela de sinais para um fatorial 2^3

Trat	Efeito							
	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	-	+	-	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

Nesse exemplo, a interação ABC é chamada de **gerador** da fração.

Observe que a coluna I (identidade) também é sempre +, logo pode-se escrever que

$$I = ABC \quad \text{ou} \quad I = -ABC$$

Que é chamada de relação definidora da fração. De outra forma, veja que multiplicando os sinais de *uma mesma coluna*, sempre obteremos o sinal +, que designamos pela letra I.

Exemplo:

$$AA = A^2 = I ; BB = B^2 = I; \dots$$

No experimento 2^{3-1} , temos que

$$C = AB \text{ (multiplicando por C ambos os lados)}$$

$$CC = CAB$$

$$I = ABC \text{ o gerador da relação definidora.}$$

Ainda, no experimento $2^{3-1} = 4$ tem-se 3 graus de liberdade que são utilizados para estimar os efeitos principais A,B e C.

Observe que as estimativas dos efeitos l podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} l_A &= \frac{1}{2}(a - b - c + abc) \\ l_B &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\ l_C &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc) \end{aligned} \tag{11}$$

Observe também que para as interações duplas,

$$\begin{aligned} l_{BC} &= \frac{1}{2}(a - b - c + abc) \\ l_{AC} &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\ l_{AB} &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc) \end{aligned} \tag{12}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
l_{BC} &= l_A \\
l_{AC} &= l_B \\
l_{AB} &= l_C
\end{aligned} \tag{13}$$

Por esse motivo, é impossível diferenciar o efeito de A e BC, B e AC e C e AB nessa estrutura de experimento fracionário.

Na realidade, quando estimamos os efeito de A, estamos estudando A+AB, ou seja, os efeitos estão confundidos. Essa estrutura de confundimento pode ser identificada utilizando a relação definidora $I = ABC$. Basta multiplicar algum efeito pela relação definidora que a estrutura de confundimento surgirá:

$$AI = AABC = A^2BC = BC$$

Do mesmo modo para B e C, tem-se

$$\begin{aligned}
BI &= ABBC = AB^2C = AC \\
CI &= ABCC = ABC^2 = AB
\end{aligned} \tag{14}$$

5.4 Construção de Meia Fração

A construção de uma meia fração inicia pelo quadro de sinais do fatorial completo (tabela 29).

O k-ésimo fator será identificado com o sinal da multiplicação dos fatores restantes. Por exemplo, para o fatorial 2^{3-1} escreve-se o quadro de sinais para os fatores A e B e os níveis do fator C são obtidos pela multiplicação dos sinais de A e B.

O gerador $I = ABC \dots K$ é utilizado na coluna do k-ésimo fator, então, $k = ABC \dots (K-1)$ define o produto dos sinais + e -. Veja que uma outra maneira de se criar uma meia fração é dividir os tratamentos em dois blocos, com a interação de maior ordem confundida.

Tabela 29: Construção da fração 1/2.

Tratamento	2^2		2^{3-1}_{III}	
			I=ABC	I=-ABC
	A	B	C=AB	C=-AB
1	-	-	+	-
2	+	-	-	+
3	-	+	-	+
4	+	+	+	-

Exemplo: Considere uma experimento fatorial completo 2^5 . Nesse caso, são necessários 32 ensaios para realização do experimento completo. Uma fração meia necessita apenas 16 ensaios ou $2^{5-1} = 16$.

Tabela 30: Exemplo fatorial completo 2^5 .

Ensaio	A	B	C	D	E	ABCD	Resp
1	-	-	-	-	-	+	61
2	+	-	-	-	-	-	53
3	-	+	-	-	-	-	63
4	+	+	-	-	-	+	61
5	-	-	+	-	-	-	53
6	+	-	+	-	-	+	56
7	-	+	+	-	-	-	54
8	+	+	+	-	-	+	61
9	-	-	-	+	-	+	69
10	+	-	-	+	-	-	61
11	-	+	-	+	-	-	94
12	+	+	-	+	-	+	93
13	-	-	+	+	-	-	66
14	+	-	+	+	-	+	60
15	-	+	+	+	-	+	95
16	+	+	+	+	-	-	98
17	-	-	-	-	+	+	56
18	+	-	-	-	+	-	63
19	-	+	-	-	+	-	70
20	+	+	-	-	+	+	65
21	-	-	+	-	+	-	59
22	+	-	+	-	+	+	55
23	-	+	+	-	+	+	67
24	+	+	+	-	+	-	65
25	-	-	-	+	+	-	44
26	+	-	-	+	+	+	45
27	-	+	-	+	+	+	78
28	+	+	-	+	+	-	77
29	-	-	+	+	+	+	49
30	+	-	+	+	+	-	42
31	-	+	+	+	+	-	81
32	+	+	+	+	+	+	82

Como selecionar meia fração?

Construir um fatorial 2^4 completo para os fatores A,B,C,D (tabela 31). Utilizar a coluna ABCD para definir os níveis de E, ou seja,

$$E = ABCD$$

O experimento fatorial fracionário nesse caso, seria conduzido com as seguintes combinações (tabela 31).

Tabela 31: Exemplo fatorial fracionário 2^{5-1} - 16 ensaios.

Ensaio	A	B	C	D	E=ABCD	Resp
1	-	-	-	-	+	56
2	+	-	-	-	-	53
3	-	+	-	-	-	63
4	+	+	-	-	+	65
5	-	-	+	-	-	53
6	+	-	+	-	+	55
7	-	+	+	-	+	67
8	+	+	+	-	-	61
9	-	-	-	+	-	69
10	+	-	-	+	+	45
11	-	+	-	+	+	78
12	+	+	-	+	-	93
13	-	-	+	+	+	49
14	+	-	+	+	-	60
15	-	+	+	+	-	95
16	+	+	+	+	+	82

Verifique que, tanto no fatorial completo quanto no fatorial fracionário, os fatores B, D e E e as interações BD e DE são significativos. Isso demonstra a utilidade do fatorial fracionário em encontrar a significância de efeitos, mesmo com um experimento reduzido pela metade.

5.5 Fração $\frac{1}{4}$ do fatorial 2^k

Quando em um experimento o número de fatores que devem ser estudados é muito grande, mesmo considerando uma meia fração, é necessário reduzir ainda mais o experimento, utiliza-se a fração $1/4$. Uma maneira é utilizando apenas um quarto do experimento fatorial completo.

Esse tipo de experimento é denotado por

$$2^{k-2}$$

5.6 Construção da Fração $\frac{1}{4}$

Em um experimento com k fatores, constrói-se inicialmente um quadro de sinais $+$ e $-$ para $k-2$ fatores. As duas colunas (efeitos) que serão confundidos, serão construídas pela multiplicação dos $k - 2$ fatores restantes.

Uma fração $\frac{1}{4}$ possui dois geradores. Chamando-se as funções geradoras de P e Q, com sinais $+$ e $-$, pode-se determinar quais as frações serão geradas. Poderão ser geradas até 4 frações, associadas com os geradores P e Q, pela troca de sinais.

A relação definidora do confundimento é dado por $I = P = Q = PQ$. Estes elementos são chamados de palavras da relação definidora. Os padrões de confundimento dos efeitos são produzidos pela multiplicação das colunas pelo efeito desejado por cada palavra da relação definidora. Especificamente neste caso, cada efeito estará confundido com outros três efeitos.

Considerando um fatorial 2^{6-2} e escolhendo $P=ABCE$ e $Q=BCDF$ como geradores temos

$$I = ABCE = BCDF = ADEF$$

Observe que, $BCDF * ABCE = AB^2C^2DEF = AIIDEF = ADEF$. Esse confundimento, como será visto mais adiante é dito de resolução IV porque o gerador possui quatro letras.

Para encontrar o padrão de confundimento geral, multiplica-se o efeito por cada palavra da relação definidora.

Exemplo:

Para o fator B,

1. $B*ABCE=ACE$
2. $B*BCDF=CDF$
3. $B*ADEF=ABDEF$

Para o fator AB

1. $AB*ABCE=CE$
2. $AB*BCDF=ACDF$
3. $AB*ADEF=BDEF$

Ou seja, quando estamos estimando o efeito de B, por exemplo, na verdade estamos estudando

$$\boxed{B+ACE+CDF+ABDEF}$$

5.7 Exemplo: Um fatorial 2^{6-2}

Inicialmente, constrói-se um fatorial completo para um experimento 2^4 . Em seguida, multiplicam-se as colunas referentes aos geradores P e Q. Aqui, consideramos $E=ABC$ e $F=BCD$. Se tivéssemos um experimento fatorial completo, seriam realizados $2^6 = 64$ ensaios. Se tivéssemos uma meia fração, seriam realizados $2^{6-1} = 32$ ensaios. Nesse exemplo, uma fração $1/4$ terá apenas 16 ensaios. A tabela 32 fornece o resultado final da estrutura de um experimento fatorial fracionado 2^{6-2} .

Tabela 32: Exemplo fatorial fracionário 2^{6-2} .

Ensaio	A	B	C	D	E=ABC	F=BCD
1	-	-	-	-	-	-
2	+	-	-	-	+	-
3	-	+	-	-	+	+
4	+	+	-	-	-	+
5	-	-	+	-	+	+
6	+	-	+	-	-	+
7	-	+	+	-	-	-
8	+	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	-	+
10	+	-	-	+	+	+
11	-	+	-	+	+	-
12	+	+	-	+	-	-
13	-	-	+	+	+	-
14	+	-	+	+	-	-
15	-	+	+	+	-	+
16	+	+	+	+	+	+

Do mesmo modo como na fração meia, existem outras três frações possíveis:

- i. $I=ABCE$ e $I=-BCDF$;
- ii. $I=-ABCE$ e $I=BCDF$;
- iii. $I=-ABCE$ e $I=-BCDF$;

5.8 O conceito de resolução

Um experimento fatorial fracionário é dito de resolução **R** se nenhum dos efeitos de p-fatores estão confundidos com outro efeito contendo menos do que R - p-fatores. Para efeito de notação, utiliza-se um algarismo romano para identificar a resolução.

Ex: um experimento 2^{3-1} é dito de resolução III. Veja que utiliza-se nesse tipo de experimento a relação definidora $I=ABC$ (ou $I=-ABC$).

$$2_{III}^{3-1}$$

Os experimentos fatoriais de resolução III, IV e V são os mais comuns.

1. Resolução III: um experimento de resolução III não confunde efeitos principais entre si, mas confunde efeitos principais com interações duplas, interações duplas podem ser confundidas com outras. Ex: 2_{III}^{3-1} ($I=ABC$)
2. Resolução IV: em experimentos de resolução IV, efeitos principais não são confundidos com outros efeitos principais ou com interações duplas mas, interações duplas são confundidas entre si. Ex: 2_{IV}^{4-1} ($I=ABCD$).
3. Resolução V: nesse experimento, efeitos principais ou interações duplas não são confundidos com outros efeitos principais ou interações duplas. Mas, interações duplas são confundidas com interações triplas. Ex: 2_V^{5-1} ($I=ABCDE$).

Em geral, a resolução corresponde ao tamanho da menor palavra na relação definidora.

Vários autores trazem tabelas com as possíveis resoluções para diferentes números de ensaios e diferentes geradores.

De um modo geral, um experimento fatorial fracionário pode ser gerado a partir de $\frac{1}{2^p}$ fração de um fatorial completo 2^k .

6 Superfície de Resposta

6.1 Introdução: idéias básicas

Em um experimento com dois fatores quantitativos, x_1 e x_2 , por exemplo, pode-se representar a variável dependente y , através de um modelo de regressão

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon_{ij}$$

Este modelo, de grau um, é chamado de modelo de primeira ordem.

A representação gráfica deste modelo é chamada de *Superfície de Resposta*.

Se a relação entre as variáveis não for linear, usa-se um polinômio de grau maior, em geral dois (um modelo de segunda ordem),

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{12} X_1 X_2 + \epsilon_{ij}$$

De maneira geral, o modelo pode ser escrito como

$$y_{ij} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \epsilon$$

Normalmente, a relação entre as variáveis é desconhecida. Deve-se portanto, ajustar modelos adequadamente. De maneira geral, a superfície de resposta é representada como uma resposta y em função dos níveis dos fatores quantitativos x_1 e x_2 e de um erro aleatório ϵ

$$y = f(x_1, x_2) + \epsilon$$

Como estamos interessados no ajuste de modelos, uma forma eficiente de obter valores para o ajuste é através de delineamentos experimentais. Existem vários

delineamentos experimentais específicos para utilização em modelos de superfície de resposta. Além dos fatoriais completos 2^k , 3^k e fatoriais fracionários existe o experimento central composto e o estrela.

Como estudado em experimentos fatoriais, não é possível encontrar um ponto ótimo apenas estudando um fator de cada vez. Quando combinamos dois ou mais fatores, os níveis que serão utilizados ou selecionados ao final do experimento devem ser aqueles que em conjunto proporcionam a melhor resposta.

A idéia de que escolhendo um nível de um fator como sendo o ponto ótimo e fixando esse valor para obtenção do nível ótimo do outro fator é errônea. A análise dessa combinação ótima exige um planejamento do experimento de modo que se alcance a informação desejada.

A metodologia de superfície de resposta faz uso de técnicas de planejamento de experimentos fatoriais e o ajuste de modelos de regressão.

6.1.1 Representação da superfície de resposta

Além do gráfico de superfície de resposta, representado por x_1 e x_2 no plano e y , a variável resposta, representada perpendicularmente ao plano (figura 8), pode-se utilizar o gráfico de contorno ou curva de nível (figura 9). Esse gráfico é construído, baseando-se nas coordenadas dos pontos do plano e da variável resposta. Onde linhas são desenhadas nos mesmos valores de resposta para diferentes níveis dos fatores quantitativos.

6.1.2 Objetivos da superfície de resposta

A construção de uma superfície de resposta tem como objetivo encontrar um ponto ótimo dentro do espaço amostral experimental. Dependendo da situação busca-se um ponto de máximo (produção, rendimento) ou um ponto de mínimo (custo, falhas).

Em outra situação, busca-se apenas encontrar uma vizinhança do ponto ótimo como objetivo inicial. A partir daí, outros modelos podem ser desenvolvidos para encontrar exatamente o ponto ótimo.

Figura 8: Representação da superfície de resposta.

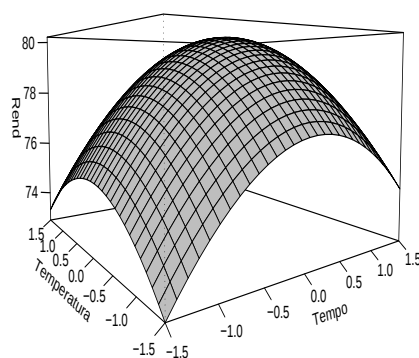
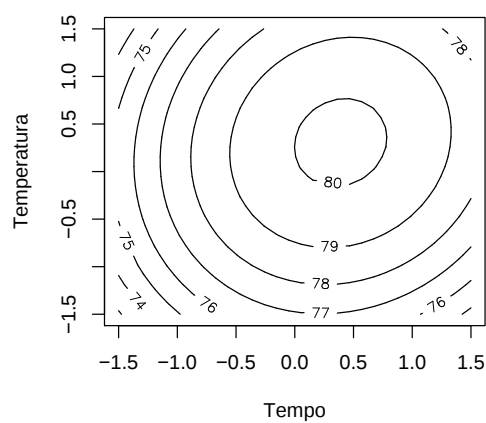


Figura 9: Representação da superfície por curva de nível.



A metodologia de superfície de resposta pode ser aplicada em várias áreas do conhecimento. Em geral, é aplicada em ensaios da área de química, onde um engenheiro pode estar interessado em saber para quais níveis de temperatura e pressão ele obtém o maior rendimento em uma reação, na agricultura um agrônomo pode estar interessado em saber para quais quantidades de nitrogênio e fósforo ele obtém a maior produção de grãos, um engenheiro de alimentos pode estar desenvolvendo um produto e gostaria de saber quais os níveis de sal e açúcar devem ser adicionados em um produto para que se tenha uma avaliação ótima e assim por diante.

Em experimentos de otimização, vários aspectos devem ser considerados tanto no planejamento, quanto na análise dos ensaios. Em primeiro lugar, os pontos de otimização podem ser confundidos. Isto pode ocorrer quando existe um ponto de sela na superfície ou ainda, um ponto de cumeeira. Nesse caso, deve-se tomar cuidado com as conclusões. A análise gráfica é importante nesse momento. Em segundo lugar, a região do ponto ótimo pode estar fora do espaço amostral avaliado. Nesse caso, o ponto ótimo pode não ser aquele definido para o experimento em função de não ter sido estudada toda magnitude da variável resposta.

A metodologia de superfície de resposta é um método sequencial, onde o pesquisador inicia com uma combinação de níveis dos fatores que podem estar afastados do ponto ótimo e a partir dessa combinação são gerados novos níveis para atingir o ponto ótimo (se existir).

O pesquisador pode fazer uso da experiência ou de alguma informação prévia para atingir o ponto ótimo. Caso contrário, pode-se fazer uso do método da máxima inclinação ascendente para obtenção do ponto ótimo.

6.2 Método da máxima inclinação ascendente

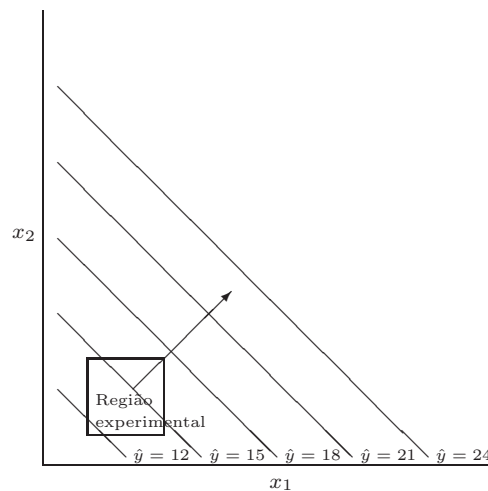
Nem sempre, quando um experimento é planejado para se encontrar o ponto ótimo, tem-se a possibilidade deste ponto estar dentro da região amostral utilizada. Mas, observando-se o comportamento da superfície, pode-se prever onde deve estar localizado o ponto ótimo, de maneira que, um novo experimento ou novas observações podem levar-nos para mais próximo da região do ponto ótimo.

O objetivo desse método é utilizar um procedimento experimental simples e economicamente eficiente para se aproximar do ponto ótimo.

6.2.1 Como realizar o método

O método baseia-se no movimento sequencial ao longo da máxima inclinação (ou no sentido em que ocorre o aumento máximo da variável resposta). Na figura 10, pode-se visualizar como caminhar na superfície.

Figura 10: Método da máxima inclinação ascendente



Os passos para realização do método são:

1. Realizar um experimento com o objetivo de ajustar um modelo de primeira ordem, em uma pequena região de interesse, definida pelas variáveis x_1 e x_2 . Lembre-se de que em um modelo de primeira ordem as curvas de nível são representadas por retas paralelas;
2. Utilizar a informação obtida em 1 para determinar a direção de máxima inclinação ascendente, ou seja, onde $\hat{y}$ aumenta mais rapidamente. Esta direção é perpendicular as curvas de nível e é tomada a partir da região de interesse;
3. Conduzir experimentos ao longo da direção de máxima inclinação até que seja encontrada uma região onde não ocorra nenhum aumento na variável resposta;
4. Repetir os passos 1,2,3 (a partir do passo 3) até que não seja detectada falta de ajuste do modelo de primeira ordem;
5. Quando for detectada falta de ajuste do modelo de primeira ordem, realizar experimentos adicionais para obter uma estimação mais precisa da condição

ótima de operação do processo. Na maior parte das vezes, esse procedimento envolve o ajuste de um modelo de segunda ordem.

Todo esse procedimento pode facilmente ser adaptado no caso de um experimento onde busca-se uma minimização. O método então chamar-se-á Método da Máxima Inclinação Descendente.

6.3 Exemplo

Suponha que deseja-se maximizar o rendimento de um processo químico, onde duas variáveis influenciam o processo: tempo (x_1) e temperatura (x_2).

O processo é realizado normalmente em 35 minutos e 155 °F de temperatura, resultando em um rendimento de 40%. O engenheiro responsável acredita que o ponto ótimo está localizado próximo desta região, variando entre 30 e 40 minutos e entre 150 e 160 °F.

Como um facilitador das análises, sugere-se que os níveis dos fatores sejam codificados para um intervalo (-1,1).

Chamando de c_1 e c_2 as variáveis codificadas (tempo e temperatura, respectivamente), a codificação pode ser feita da seguinte forma:

$$c_1 = \frac{x_1 - 35}{5} \text{ e } c_2 = \frac{x_2 - 155}{5}$$

Aqui, 35 e 155 são os valores médios de tempo e temperatura, respectivamente e 5 representa o intervalo de variação destes níveis (arbitrário).

Foi realizado um experimento fatorial 2^2 aumentado por 5 pontos centrais. Nesse exemplo, esses 5 pontos são medidas de uma mesma combinação e fornecem uma estimativa para o erro experimental. Os dados do experimento estão na tabela 33:

Com estes dados, obteve-se o seguinte modelo de primeira ordem

$$\hat{y} = 40,44 + 0,775c_1 + 0,325c_2$$

Dado que o modelo foi corretamente estimado (isso precisa ser checado), deve-se tentar encontrar o ponto onde ocorre a máxima inclinação ascendente. Deve-se

Tabela 33: Experimento fatorial 2^2 aumentado em cinco pontos (central composto).

Variáveis naturais		Variáveis codificadas		Rendimento
Tempo	Temperatura	c_1	c_2	
30	150	-1	-1	39,3
30	160	-1	1	40,0
40	150	1	-1	40,9
40	160	1	1	41,5
35	155	0	0	40,3
35	155	0	0	40,5
35	155	0	0	40,7
35	155	0	0	40,2
35	155	0	0	40,6

“caminhar” 0,775 unidades na direção de c_1 e 0,325 unidades na direção de c_2 .

Pode-se escolher caminhar 5 minutos (unidades) para tempo de reação, que equivale a variável codificada c_1 como um $\Delta c_1 = 1$. Essa escolha de 5 minutos é arbitrária e pode variar em função do conhecimento do pesquisador sobre o fenômeno.

Dado que o valor de Δc_1 foi definido como sendo 1, o valor de Δc_2 é dado por

$$\Delta c_2 = \frac{\hat{\beta}_{c_1}}{\hat{\beta}_{c_2}} \Delta c_1 = \frac{0,325}{0,775} 1 = 0,42$$

Considera-se uma inclinação a partir da origem. Essa inclinação é dada por Δc_2 .

Em um novo experimento, levando-se em conta a máxima inclinação ascendente pode-se tentar prever o ponto ótimo (tabela 34). Devem ser realizados vários ensaios até que uma redução na resposta seja observada.

Tabela 34: Novos ensaios para caminhar na superfície.

Ensaio	Variáveis codificadas		Variáveis naturais		Resposta
Origem	0	0	35	155	
Δ	1	0,42	5	2	
Origem + Δ	1	0,42	40	157	41,0
Origem + 2Δ	2	0,84	45	159	42,9
Origem + 3Δ	3	1,26	50	161	47,1
Origem + 4Δ	4	1,68	55	163	49,7
Origem + 5Δ	5	2,10	60	165	53,8
Origem + 6Δ	6	2,52	65	167	59,9
Origem + 7Δ	7	2,94	70	169	65,0
Origem + 8Δ	8	3,36	75	171	70,4
Origem + 9Δ	9	3,78	80	173	77,6
Origem + 10Δ	10	4,20	85	175	80,3
Origem + 11Δ	11	4,62	90	178	76,2
Origem + 12Δ	12	5,04	95	180	75,1

Δ Variável natural: Tempo = $\Delta c_1 \times 5 = 1 \times 5 = 5$

Δ Variável natural: Temperatura = $\Delta c_2 \times 5 = 0,42 \times 5 = 2$

Observe que no ensaio 10, o valor de 80,3 aparece como o maior valor da resposta. Isso indica uma aproximação do ponto ótimo.

Logo, um novo modelo deve ser construído ao redor dessa região, ou seja, em $x_1 = 85$ e $x_2 = 175$.

Assim, um novo experimento é realizado ao redor desse ponto, considerando uma variação de 80 até 90 para tempo e de 170 até 180 para temperatura. Novamente, um experimento fatorial 2^2 é realizado com cinco pontos centrais. O resultado é apresentado na tabela 35:

Tabela 35: Novo experimento fatorial 2^2 aumentado em cinco pontos.

Variáveis		Variáveis codificadas		Resposta
80	170	-1	-1	76,5
80	180	-1	1	77,0
90	170	1	-1	78,0
90	180	1	1	79,5
85	175	0	0	79,9
85	175	0	0	80,3
85	175	0	0	80,0
85	175	0	0	79,7
85	175	0	0	79,8

Para esses dados, o modelo estimado, considerando as variáveis codificadas é

$$\hat{y} = 78,97 + 1c_1 + 0,5c_2$$

Uma análise criteriosa desse modelo indica que um modelo que considere um efeito quadrático é mais adequado.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado	p-valor
Regressão	2	5			
Resíduo	6	11,12			
Interação	1	0,25	0,25	4,72	0,0955
Erro quadrático	1	10,658	10,658	201,09	0,001
Erro puro	4	0,212	0,0530		
Total	8	16,12			

6.4 Localização do ponto estacionário

Dados os níveis de x_1 e x_2 , é necessário encontrar os valores que otimizam a variável resposta. Se esse ponto existe, os valores de x_1 e x_2 serão obtidos pelas derivadas parciais de

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = 0$$

Este ponto é chamado de **ponto estacionário** e pode representar um ponto de **máximo**, ou um ponto de **mínimo** ou um ponto de **sela**.

Através de uma visualização gráfica, pode-se na maioria das vezes identificar com boa precisão o ponto estacionário. Caso contrário, deve-se estimar o modelo e encontrar o ponto estacionário de maneira analítica.

Um procedimento matemático pode ser elaborado a partir do modelo de segunda ordem (usando notação matricial)

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + x'b + x'Bx \quad (15)$$

$$\text{onde, } x_{k \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}; b_{k \times 1} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}; B_{k \times k} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12}/2 & \cdots & \hat{\beta}_{1k}/2 \\ & \hat{\beta}_{22} & \cdots & \hat{\beta}_{2k}/2 \\ \text{sim.} & & \ddots & \\ & & \cdots & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

Observe que na matriz B, os elementos da diagonal principal são os coeficientes quadráticos.

Fazendo a derivada de $\hat{y}$ em relação aos elementos de x e igualando a zero

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = b + 2Bx = 0 \quad (16)$$

O ponto estacionário x_0 é a solução da equação 16

$$x_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}b \quad (17)$$

Substituindo 17 em 15 o valor predito pode ser encontrado por

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2}x_0'b$$

6.5 Analisando a forma da superfície: o ponto estacionário

Encontrado o ponto estacionário, é preciso descobrir o que acontece na vizinhança do ponto: se é um máximo, mínimo ou ponto de sela.

Uma forma simples é visualizar o gráfico, caso contrário, a maneira formal é utilizar a análise canônica que estuda a sensibilidade de cada uma das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_k$ no modelo de segunda ordem.

A idéia é transformar o modelo da superfície em novas coordenadas com a origem no ponto estacionário x_0 e rotacionar os eixos até que eles fiquem paralelos ao eixo principal da superfície de resposta estimada.

Esse novo modelo será da forma

$$\hat{y} = \hat{y}_0 + \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \cdots + \lambda_k w_k^2$$

Onde w_i é a variável independente transformada e λ_i são constantes (autova-

lores ou raízes características da matriz B).

A superfície é caracterizada pelos sinais e pela magnitude dos λ 's. Obviamente, o ponto estacionário deve estar dentro da região estudada e nessa condição:

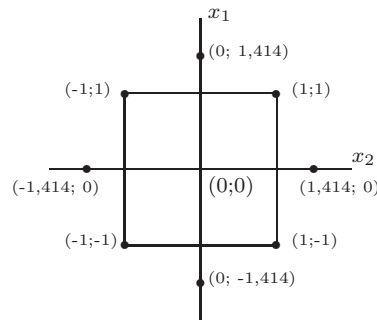
- se os λ_i 's são todos positivos, x_0 é um ponto de **mínimo**;
- se os λ_i 's são todos negativos, x_0 é um ponto de **máximo**;
- se os λ_i 's têm sinais diferentes, x_0 é um ponto de **sela**;

6.6 Continuando com o experimento

Os dados do experimento podem ser acrescentados de novas observações para que o ajuste do modelo de segunda ordem possa ser realizado.

Em geral esses novos pontos são obtidos utilizando-se de alguns delineamentos, como por exemplo o delineamento central composto. Nesse experimento, o pesquisador decidiu acrescentar os pontos nas coordenadas $c_1 = 0, c_2 = \pm 1,414$ e $c_1 = \pm 1,414, c_2 = 0$. Essas coordenadas correspondem ao delineamento no formato estrela veja figura 11.

Figura 11: Planejamento estrela



Os resultados são apresentados na tabela 36.

Com esses dados, deve-se procurar ajustar um modelo quadrático.

O modelo ajustado, considerando as variáveis codificadas é dado por

$$Rend. = 79,94 + 0,99c_1 + 0,52c_2 - 1,38c_1^2 - 1,00c_2^2 + 0,25c_1 * c_2$$

Tabela 36: Experimento fatorial central composto 2^2 acrescentado de quatro pontos no formato estrela.

Variáveis		Variáveis codificadas		Resposta
80	170	-1	-1	76,5
80	180	-1	1	77,0
90	170	1	-1	78,0
90	180	1	1	79,5
85	175	0	0	79,9
85	175	0	0	80,3
85	175	0	0	80,0
85	175	0	0	79,7
85	175	0	0	79,8
92,07	175	1,414	0	78,4
77,93	175	-1,414	0	75,6
85	182,07	0	1,414	78,5
85	182,07	0	-1,414	77,0

E considerado as variáveis naturais

$$Rend. = -1430,52 + 7,81tempo + 13,27temp. - 0,055tempo^2 - 0,04temp.^2 + 0,01tempo*temp.$$

6.7 Encontrando o ponto estacionário

Utilizando o procedimento matemático para visualizar o ponto estacionário, temos que:

$$b = \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1,376 & 0,1250 \\ 0,1250 & -1,001 \end{bmatrix}$$

E as coordenadas do ponto estacionário são obtidas por

$$x_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}b$$

$$x_0 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0,7345 & -0,0917 \\ -0,0917 & -1,0096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,389 \\ 0,306 \end{bmatrix}$$

Ou seja, essas coordenadas correspondem aos pontos

$$0,389 = \frac{x_1 - 85}{5} = 86,96 \approx 87 \text{ minutos e } 0,306 = \frac{x_2 - 175}{5} = 176,53 \approx 176,5^\circ F$$

E o valor predito no ponto estacionário é $y_0 = 80,21$.

$$\hat{y}_0 = 79,94 + \frac{1}{2}[0,3890,306] \begin{bmatrix} 0,995 \\ 0,515 \end{bmatrix}$$

6.8 Forma da superfície

Utilizando a análise canônica, devemos encontrar os autovalores, encontrando as raízes características de $|B - \lambda I| = 0$;

$$\begin{vmatrix} -1,376 - \lambda & 0,1250 \\ 0,1250 & -1,001 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante tem-se a seguinte equação:

$$\lambda^2 + 2,3788\lambda + 1,3639 = 0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1 = -0,9641$ e $\lambda_2 = -1,4147$.

Logo, a forma canônica do modelo estimado é dada por

$$\hat{y} = 80,21 - 0,964w_1^2 - 1,4147w_2^2$$

Como λ_1 e λ_2 possuem sinais negativos, o ponto estacionário encontrado é um ponto de máximo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANZATTO D. A.; KRONKA, S. do N. **Experimentação agrícola**. Jaboticabal: UNESP, 1989.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistics for experiments: an introduction to design, data analysis and model building**, John Wiley & Sons, 1978.
- COCHRAN, W. G.; COX, G. M. **Experimental designs**. 2ED. New York: John Wiley & Sons, 1957.
- COX, D. R. **Planning of experiments**. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- FEDERER, W. T. **Statistical design and analysis for intercropping experiments, v.1: two crops**, New York: Springer-Verlag, 1993.
- HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments. Volume I: introduction to experimental design**. John Wiley & Sons, 1994.
- MEAD, R. **The design the experiments: statistical principles for practical applications**. Cambridge University Press, 1988.
- MILLIKEN, G. A.; JOHNSON, D. E. **Analysis of messy data. Volume I: designed experiments**. New York: Chapman & Hall, 1992.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 3ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- PEARCE, S. C. **The agricultural field experiments: a statistical examination of theory and practice**. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 13ed. Piracicaba: ESALQ-USP, 1990.
- STEEL, R. G. D.; TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. 2 ed. New York: McGraw-hill, 1980.
- VIEIRA, S. **Estatística experimental**. 2 ed. São Paulo:Atlas, 1999.
- WERKEMA, Maria Cristina Catarino; AGUIAR, Sílvio. **Planejamento e análise de experimentos: como identificar as principais variáveis influentes em um processo**. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, 1996.

7 TABELAS

Tabela 1: Limites unilaterais de F ao nível de 5% de probabilidade

n1=número de graus de liberdade do numerador, n2= número de graus de liberdade do denominador

n2\n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80	1,78	1,75	1,73	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72	1,69	1,67	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,01

Tabela 2: Limites unilaterais de F ao nível de 1% de probabilidade

n1=número de graus de liberdade do numerador, n2= número de graus de liberdade do denominador

n2\n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9	6083,4	6106,7	6125,8	6143,0	6157,0	6170,0	6208,7	6234,3	6260,4	6286,4	6313,0	6339,5	6365,6
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,42	99,43	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92	26,87	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25	14,20	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,82	9,77	9,72	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,56	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,31	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,52	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01	4,96	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,56	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29	4,25	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05	4,01	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86	3,82	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70	3,66	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61	3,56	3,52	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50	3,45	3,41	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40	3,35	3,31	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27	3,23	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24	3,19	3,15	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,09	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,12	3,07	3,03	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07	3,02	2,98	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	3,02	2,97	2,93	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98	2,93	2,89	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94	2,89	2,85	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90	2,86	2,81	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,87	2,82	2,78	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,84	2,79	2,75	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,74	2,70	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61	2,56	2,52	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,44	2,39	2,35	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	2,28	2,23	2,19	2,15	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	2,13	2,08	2,04	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,01

Tabela 3: Valores de t em níveis de 10% a 0,1% de probabilidade.

GLRES	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,30

Tabela 4: Valores da amplitude total estudentizada (q), para uso no teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade. I =número de tratamentos, GLRES= número de graus de liberdade do resíduo.

GLRES\I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17,97	26,98	32,82	37,08	40,41	43,40	45,40	47,36	49,07	50,59	51,96	53,20	54,33	55,36	56,32	57,22	58,04	58,83	59,56
2	6,09	8,33	9,80	10,88	11,74	12,44	13,03	13,54	13,99	14,39	14,75	15,08	15,33	15,65	15,91	16,14	16,37	16,57	16,77
3	4,50	5,91	6,83	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,72	9,95	10,15	10,35	10,53	10,69	10,84	10,98	11,11	11,24
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83	8,03	8,21	8,37	8,53	8,66	8,79	8,91	9,03	9,13	9,23
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	7,00	7,17	7,32	7,47	7,60	7,72	7,83	7,93	8,03	8,12	8,21
6	3,46	4,34	4,90	5,31	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14	7,24	7,34	7,43	7,51	7,59
7	3,34	4,17	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,30	6,43	6,55	6,66	6,76	6,85	6,94	7,02	7,10	7,17
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48	6,57	6,65	6,73	6,80	6,87
9	3,20	3,95	4,42	4,76	5,02	5,24	5,43	5,60	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28	6,36	6,44	6,51	6,58	6,64
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,31	5,46	5,60	5,72	5,83	5,94	6,03	6,11	6,19	6,27	6,34	6,41	6,47
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,33
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,40	5,51	5,62	5,71	5,80	5,88	5,95	6,02	6,09	6,15	6,21
13	3,06	3,74	4,15	4,45	4,69	4,89	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79	5,86	5,93	6,00	6,06	6,11
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71	5,79	5,85	5,92	5,97	6,03
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,60	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31	5,40	5,49	5,57	5,65	5,72	5,79	5,85	5,90	5,96
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59	5,66	5,73	5,79	5,84	5,90
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,71	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54	5,61	5,68	5,73	5,79	5,84
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,50	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,50	5,57	5,63	5,69	5,74	5,79
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,32	5,39	5,46	5,53	5,59	5,65	5,70	5,75
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,11	5,20	5,28	5,36	5,43	5,49	5,55	5,61	5,66	5,71
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,10	5,18	5,25	5,32	5,38	5,44	5,49	5,55	5,59
30	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82	4,92	5,00	5,08	5,15	5,21	5,27	5,33	5,38	5,43	5,48
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,64	4,74	4,82	4,90	4,98	5,04	5,11	5,16	5,22	5,27	5,31	5,36
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,00	5,06	5,11	5,15	5,20	5,24
120	2,80	3,36	3,69	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,90	4,95	5,00	5,04	5,09	5,13
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,69	4,74	4,80	4,85	4,89	4,93	4,97	5,01

Tabela 5: Valores da amplitude total estudentizada (z), para uso no teste de Duncan, ao nível de 5% de probabilidade.
I=número de médias abrangidas pelo contraste, GLRES= número de graus de liberdade do resíduo.

n\I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	50	100
1	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00
2	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09
3	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
4	3,93	4,01	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02
5	3,64	3,74	3,79	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83
6	3,46	3,58	3,64	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68
7	3,35	3,47	3,54	3,58	3,60	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61
8	3,26	3,39	3,47	3,52	3,55	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56
9	3,20	3,34	3,41	3,47	3,50	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52
10	3,15	3,30	3,37	3,43	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,48	3,48	3,48
11	3,11	3,27	3,35	3,39	3,43	3,44	3,45	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,47	3,48	3,48	3,48
12	3,08	3,23	3,33	3,36	3,40	3,42	3,44	3,44	3,46	3,46	3,46	3,46	3,47	3,48	3,48	3,48
13	3,06	3,21	3,30	3,35	3,38	3,41	3,42	3,44	3,45	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
14	3,03	3,18	3,27	3,33	3,37	3,39	3,41	3,42	3,44	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
15	3,01	3,16	3,25	3,31	3,36	3,38	3,40	3,42	3,43	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
16	3,00	3,15	3,23	3,30	3,34	3,37	3,39	3,41	3,43	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
17	2,98	3,13	3,22	3,28	3,33	3,36	3,38	3,40	3,42	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
18	2,97	3,12	3,21	3,27	3,32	3,35	3,37	3,39	3,41	3,43	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
19	2,96	3,11	3,19	3,26	3,31	3,35	3,37	3,39	3,41	3,43	3,44	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47
20	2,95	3,10	3,18	3,25	3,30	3,34	3,36	3,38	3,40	3,43	3,44	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
22	2,93	3,08	3,17	3,24	3,29	3,32	3,35	3,37	3,39	3,42	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
24	2,92	3,07	3,15	3,22	3,28	3,31	3,34	3,37	3,38	3,41	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
26	2,91	3,06	3,14	3,21	3,27	3,30	3,34	3,36	3,38	3,41	3,43	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
28	2,90	3,04	3,13	3,20	3,26	3,30	3,33	3,35	3,37	3,40	3,43	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
30	2,89	3,04	3,12	3,20	3,25	3,29	3,32	3,35	3,37	3,40	3,43	3,44	3,46	3,47	3,47	3,47
40	2,86	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30	3,33	3,35	3,39	3,42	3,44	3,46	3,47	3,47	3,47
60	2,83	2,98	3,08	3,14	3,20	3,24	3,28	3,31	3,33	3,37	3,40	3,43	3,45	3,47	3,48	3,48
100	2,80	2,95	3,05	3,12	3,18	3,22	3,26	3,29	3,32	3,36	3,40	3,42	3,45	3,47	3,53	3,53
∞	2,77	2,92	3,02	3,09	3,15	3,19	3,23	3,26	3,29	3,34	3,38	3,41	3,44	3,47	3,61	3,67

Tabela 6: Valores de t_d , para uso no teste de Dunnett, ao nível de 5% de probabilidade.
I=número de tratamentos, GLRES= número de graus de liberdade do resíduo.

GLRES\I-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	2,57	3,03	3,29	3,48	3,62	3,73	3,82	3,90	3,97	4,03	4,09	4,14	4,26	4,42
6	2,45	2,86	3,10	3,26	3,39	3,49	3,57	3,64	3,71	3,76	3,81	3,86	3,97	4,11
7	2,36	2,75	2,97	3,12	3,24	3,33	3,41	3,47	3,53	3,58	3,63	3,67	3,78	3,91
8	2,31	2,67	2,88	3,02	3,13	3,22	3,29	3,35	3,41	3,46	3,50	3,54	3,64	3,76
9	2,26	2,61	2,81	2,95	3,05	3,14	3,20	3,26	3,32	3,36	3,40	3,44	3,53	3,65
10	2,23	2,57	2,76	2,89	2,99	3,07	3,14	3,19	3,24	3,29	3,33	3,36	3,45	3,57
11	2,20	2,53	2,72	2,84	2,94	3,02	3,08	3,14	3,19	3,23	3,27	3,30	3,39	3,50
12	2,18	2,50	2,68	2,81	2,90	2,98	3,04	3,09	3,14	3,18	3,22	3,25	3,34	3,45
13	2,16	2,48	2,65	2,78	2,87	2,94	3,00	3,06	3,10	3,14	3,18	3,21	3,29	3,40
14	2,14	2,46	2,63	2,75	2,84	2,91	2,97	3,02	3,07	3,11	3,14	3,18	3,26	3,36
15	2,13	2,44	2,61	2,73	2,82	2,89	2,95	3,00	3,04	3,08	3,12	3,15	3,23	3,33
16	2,12	2,42	2,59	2,71	2,80	2,87	2,92	2,97	3,02	3,06	3,09	3,12	3,20	3,30
17	2,11	2,41	2,58	2,69	2,78	2,85	2,90	2,95	3,00	3,03	3,07	3,10	3,18	3,27
18	2,10	2,40	2,56	2,68	2,76	2,83	2,89	2,94	2,98	3,01	3,05	3,08	3,16	3,25
19	2,09	2,39	2,55	2,66	2,75	2,81	2,87	2,92	2,96	3,00	3,03	3,06	3,14	3,23
20	2,09	2,38	2,54	2,65	2,73	2,80	2,86	2,90	2,95	2,98	3,02	3,05	3,12	3,22
24	2,06	2,35	2,51	2,61	2,70	2,76	2,81	2,86	2,90	2,94	2,97	3,00	3,07	3,16
30	2,04	2,32	2,47	2,58	2,66	2,72	2,77	2,81	2,86	2,89	2,92	2,95	3,02	3,11
40	2,02	2,29	2,44	2,54	2,62	2,68	2,73	2,77	2,81	2,85	2,87	2,90	2,97	3,06
60	2,00	2,27	2,41	2,51	2,58	2,64	2,69	2,73	2,77	2,80	2,83	2,86	2,92	3,00
120	1,98	2,24	2,38	2,47	2,55	2,60	2,65	2,69	2,73	2,76	2,79	2,81	2,87	2,95
∞	1,96	2,21	2,35	2,44	2,51	2,57	2,61	2,65	2,69	2,72	2,74	2,77	2,83	2,91

Tabela 7: Distribuição de Qui-quadrado.

Valor crítico de χ^2 tal que $P(\chi_k^2 > \chi_0^2) = \alpha$.

GL	0,995	0,975	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,05	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,22	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,48	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,83	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	1,24	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,69	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	2,18	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,70	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	3,25	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,82	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	4,40	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	5,01	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	5,63	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	6,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	6,91	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	7,56	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	8,23	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	8,91	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	9,59	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	10,28	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	10,98	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	11,69	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	12,40	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	13,12	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	13,84	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	14,57	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	15,31	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	16,05	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	16,79	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	24,43	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	32,36	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	40,48	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	48,76	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,17	57,15	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	65,65	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	74,22	124,34	129,56	135,81	140,17

