

# SUPERFÍCIE DE RESPOSTA EM EXPERIMENTO COM PARCELAS SUBDIVIDIDAS<sup>1</sup>

TELDE NATEL CUSTÓDIO<sup>2</sup>  
AUGUSTO RAMALHO DE MORAIS<sup>3</sup>  
JOEL AUGUSTO MUNIZ<sup>4</sup>

**RESUMO** – Com a publicação deste trabalho, objetivou-se apresentar um procedimento adequado para análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, mediante metodologia de superfície de resposta, na qual se procurou desenvolver a seqüência de operações para a realização das análises estatísticas e justificar a aplicação de testes apropriados. As conclusões obtidas foram: para testar os efeitos linear e quadrático do tratamento

primário, usa-se o QMResíduo (a) como denominador, e para os efeitos linear e quadrático do tratamento secundário e interação, usa-se o QMResíduo (b) como denominador; é possível realizar a análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, por meio da metodologia de superfície de resposta; a metodologia usada pode ser adaptada para experimentos em parcelas subdivididas envolvendo fatores quantitativos com outros números de níveis.

**TERMOS PARA INDEXAÇÃO:** Superfície de resposta, parcelas subdivididas, análise de variância, análise de regressão.

## RESPONSE SURFACE IN SPLIT PLOT EXPERIMENT

**ABSTRACT** - The purpose of this work was to present a procedure suitable for analysis of split plot experiments, when the factors under study are quantitative, by means of response surface methodology, where developing the sequence of operations for the achievement of the statistical analyses and to justify the application of appropriate tests were intended. The conclusions obtained were: the linear model proved suitable as regards as the proposed objectives, allowing to test the basic null hypotheses upon the effects of the primary treatments,

secondary treatments and interaction. To test the linear and quadratic effects of the primary treatment, the QMResidue(a) is used as a denominator and for the linear and quadratic effects of the secondary treatment and interaction, the QMResidue(b) was used as a denominator. It is possible to perform the analysis of split plot experiments, when the factors under study are quantitative, through the response surface methodology. The methodology used may be adapted to split plot experiments involving quantitative factors with other numbers of levels.

**INDEX TERMS:** Response surface, split plot, analysis of variance, analysis of regression.

### INTRODUÇÃO

Nas diversas áreas de pesquisa, como, por exemplo, Agronomia, Biologia, Engenharia, os pesquisadores freqüentemente se deparam com o problema de relacionar a influência de variáveis quantitativas que afetam uma ou mais variáveis-resposta. Na maioria das

vezes, o relacionamento desejado entre resposta e fatores é aquele que determina uma combinação dos níveis dos fatores, que dão uma resposta ótima. Atualmente tem-se dado ênfase ao uso da metodologia de superfície de resposta para estudar esse tipo de relacionamento.

- 
1. Parte da Dissertação apresentada à UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS (UFLA), pelo primeiro autor, para obtenção do grau de Mestre em Agronomia, Área de Concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária.
  2. Eng<sup>o</sup> Agrícola, Aluno do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária/UFLA, Caixa Postal 37, 37.200-000 - Lavras - MG.
  3. Eng<sup>o</sup> Agr., Doutor, Professor Adjunto do Departamento de Ciências Exatas/UFLA
  4. Eng<sup>o</sup> Agr., Doutor, Professor Titular do Departamento de Ciências Exatas/UFLA.

A metodologia de superfície de resposta é essencialmente um conjunto de técnicas estatísticas usadas em pesquisas, com a finalidade de determinar as melhores condições e dar maior conhecimento sobre a natureza de certos fenômenos. É composta por planejamento e análise de experimentos, que procura relacionar respostas com os níveis de fatores quantitativos que afetam essas respostas (Box e Draper, 1987). Esse relacionamento entre respostas e níveis de fatores procura, entre outros, atingir um dos objetivos: estabelecer uma descrição de como uma resposta é afetada por um número de fatores em alguma região de interesse; estudar e explorar a relação entre várias respostas e extremos obrigatórios; localizar e explorar a vizinhança de resposta máxima ou mínima. A aplicação dessa metodologia foi realizada inicialmente na indústria química, tendo sido seus fundamentos formalizados por Box e Wilson (1951). No campo agrônomo, o uso concentrou-se no estudo do rendimento de cultivares, como efeito de níveis de nutrientes aplicados ao solo, incluindo-se outros fatores, como: densidade de plantio e lâminas de irrigação.

Outro fator importante que se deve levar em conta, ao se planejar um experimento, é a escolha correta do tipo de delineamento que melhor se adapte às condições experimentais específicas do problema em estudo. Quando se têm dois ou mais fatores para serem estudados simultaneamente, uma das opções é a utilização do experimento em parcela subdividida. O experimento em parcela subdividida envolve uma estrutura de tratamentos, com dois ou mais fatores, com uma estrutura de delineamento em blocos incompletos, apresentando, pelo menos, dois tamanhos diferentes de unidades experimentais: as unidades experimentais maiores, chamadas de parcelas principais ou parcelas e as unidades experimentais menores, chamadas de subparcelas (Milliken e Johnson, 1984); nas parcelas, são casualizados os tratamentos primários, e nas subparcelas, os tratamentos secundários.

Os experimentos em parcelas subdivididas são utilizados principalmente na análise de dados originados de pesquisas agrícolas, industriais e biológicas, mas podem ser usados em outras áreas, quando por situações diversas na prática, não se pode instalar o experimento em esquema fatorial. O procedimento para análise desses tipos de experimentos está apresentado em Kempthorne (1952), Anderson e Bancroft (1952), Steel e Torrie (1980), Cochran e Cox (1976), dentre outros.

São poucos os trabalhos que relatam o uso da superfície de resposta em ensaios em parcelas subdivididas. Mischan e Pinho (1996) propuseram vários modelos de regressão, quando pelo menos um dos níveis dos fatores ou ambos são constituídos por fatores quantitativos.

Em muitos experimentos com dois fatores conduzidos no esquema de parcelas subdivididas, os tratamentos são constituídos por fatores quantitativos, como lâminas de água e doses de nutrientes; nesses casos, a aplicação de superfície de resposta pode ser conveniente. Esse é o tema do presente trabalho, que tem como objetivo apresentar um procedimento adequado para análise de experimento em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, por meio da metodologia de superfície de resposta, procurando desenvolver a seqüência de operações para a realização das análises estatísticas e justificar a aplicação de testes apropriados.

## MATERIAL E MÉTODOS

### 1. Material

Os dados experimentais usados como exemplo ilustrativo para o desenvolvimento da metodologia foram adaptados de um experimento conduzido por Scalco [Scalco, M.S. Comunicação Pessoal. 1999. (Departamento de Agricultura da UFPA)], por meio do qual se estudou o manejo de irrigação (0; 50%; 100% e 150% da evaporação do tanque "Classe A") e adubação nitrogenada (0; 60; 120 e 180 kg/ha de N na forma de uréia) na produção de trigo de inverno. Foi utilizado o delineamento em blocos casualizados com quatro repetições, instalado no esquema de parcelas subdivididas.

Para o desenvolvimento das operações para obtenção das somas de quadrados e expressões que compõem o teste F, considerou-se parte dos dados de produção de grãos (Tabela 1).

### 2. Métodos

#### 2.1 Um modelo Linear

A metodologia de superfície de resposta foi aplicada a um experimento em parcelas subdivididas, com a finalidade de obtenção da análise de variância, quando os tratamentos primários e secundários são constituídos por fatores quantitativos (doses, lâminas, concentrações), usando-se o seguinte modelo linear:

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + b_j + t_1 X_i + t_2 X_i^2 + tb_{ij} + v_1 Z_k + v_2 Z_k^2 + tv_{11} X_i Z_k + tv_{12} X_i Z_k^2 + tv_{21} X_i^2 Z_k + tv_{22} X_i^2 Z_k^2 + e_{ijk} \quad (1)$$

em que:

$y_{ijk}$ : valor observado no  $i$ -ésimo nível do tratamento primário, no  $k$ -ésimo nível do tratamento secundário, no  $j$ -ésimo bloco;  $\mathbf{m}$ : uma constante inerente a todas as observações;  $b_j$ : efeito do  $j$ -ésimo bloco;  $X_i$ : valor quantitativo do  $i$ -ésimo nível do tratamento primário;  $t_1$ : efeito linear;  $t_2$ : efeito quadrático;  $tb_{ij}$ : erro experimental em nível de parcelas;  $Z_k$ : valor quantitativo do  $k$ -ésimo nível do tratamento secundário;  $v_1$ : efeito linear;  $v_2$ : efeito quadrático;  $X_i Z_k$ : valor quantitativo da interação do  $i$ -ésimo nível do tratamento primário *versus* o  $k$ -ésimo nível do tratamento secundário;  $tv_{11}$ : efeito da interação linear X linear;  $tv_{12}$ : efeito da interação linear X quadrática;  $tv_{21}$ : efeito da interação quadrática X linear;  $tv_{22}$ : efeito da interação quadrática X qua-

drática;  $e_{ijk}$ : erro experimental em nível de subparcelas.

Na forma matricial, o modelo linear é dado por:

$$\tilde{y} = X\tilde{q} + \tilde{e} \quad (2)$$

sendo:

$\tilde{y}$ : vetor das observações, de dimensões ( $n \times 1$ );  $X$ : matriz de incidência dos parâmetros (matriz do delineamento), de dimensões ( $n \times p$ );  $\tilde{q}$ : vetor de parâmetros desconhecidos do modelo, de dimensões ( $p \times 1$ );  $\tilde{e}$ : vetor dos erros aleatórios associados às observações, de dimensões ( $n \times 1$ ).

Efetuuou-se ainda a partição da matriz  $X$ , da seguinte maneira:

$$X = [ \begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & X_{11} \end{array} ] \quad (3)$$

sendo:

$[X_1]$ : vetor dos coeficientes associados à constante  $\mathbf{m}$ , com  $r[X_1] = 1$ ;  $[X_1 : X_2]$ : matriz dos coeficientes associados à constante  $\mathbf{m}$  e aos  $J$  blocos, com  $r[X_1 : X_2] = J$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3]$ : matriz dos coeficientes associados à constante  $\mathbf{m}$ , aos  $J$  blocos e aos efeitos linear do  $i$ -ésimo nível do tratamento primário, com  $r[X_1 : X_2 : X_3] = J + 1$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4] = J + 2$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  e  $tb$  (parcelas), com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5] = IJ$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$  e  $v_1$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6] = IJ + 1$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$ ,  $v_1$  e  $v_2$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7] = IJ + 2$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  e  $tv_{11}$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8] = IJ + K$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $tv_{11}$  e  $tv_{12}$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9] = IJ + K + 1$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9 : X_{10}]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $tv_{11}$ ,  $tv_{12}$  e  $tv_{21}$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 :$

$X_6 : X_7 : X_8 : X_9 : X_{10}] = IJ + I + K - 1$ ;  $[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9 : X_{10} : X_{11}]$ : matriz dos coeficientes associados aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $tb$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $tv_{11}$ ,  $tv_{12}$ ,  $tv_{21}$  e  $tv_{22}$ , com  $r[X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 : X_7 : X_8 : X_9 : X_{10} : X_{11}] = IJ + I + K$ .

## 2.2 Esperança Matemática das Somas de Quadrados

Na obtenção das esperanças matemáticas das somas de quadrados, considerou-se uma restrição paramétrica, também usada na solução das equações normais, a qual é formada pela seguinte função linear não estimável:

$$\sum_{j=1}^I b_j = 0 \quad (4)$$

Sem perda de generalidades, os valores dos níveis de lâmina ( $X_i$ ) e doses de nitrogênio ( $Z_k$ ) foram codificados ou transformados, pelo uso de polinômios ortogonais; os polinômios ortogonais de primeiro e segundo grau, adaptados aos níveis de cada fator, foram obtidos de acordo com o procedimento proposto por Nogueira (1979) e foram designados por  $X_i$  e  $X_i^c$  (linear e quadrático, fator lâmina) e por  $Z_k$  e  $Z_k^c$  (linear e quadrático, fator nitrogênio), respectivamente. Os coeficientes desses polinômio encontram-se tabulados em vários livros-texto, como Pimentel Gomes (1990).

**TABELA 1** - Dados de produção de trigo, em kg/ha, em função de três níveis de irrigação, três doses de adubação nitrogenada e duas repetições.

Níveis de Irrigação	Doses de Nitrogênio	Blocos		Total	Média
		I	II		
50	60	2.133,0	2.411,0	4.544,0	2.272,0
	120	4.101,0	3.288,0	7.389,0	3.694,5
	180	3.538,0	3.395,0	6.933,0	3.466,5
100	60	5.503,0	5.630,0	11.133,0	5.566,5
	120	5.687,0	5.991,0	11.678,0	5.839,0
	180	5.418,0	5.899,0	11.317,0	5.658,5
150	60	3.809,0	4.147,0	7.956,0	3.978,0
	120	4.182,0	4.288,0	8.470,0	4.235,0
	180	3.830,0	4.112,0	7.942,0	3.971,0
Totais		38.201,0	39.161,0	77.362,0	4.297,9

Fonte: Dados adaptados de Scalco (1999)

Dado que os polinômios são ortogonais, a soma de seus coeficientes é nula, bem como os produtos de seus coeficientes, entre os efeitos lineares ( $X_i$ ,  $Z_k$ ), quadráticos ( $X_i^2$ ,  $Z_k^2$ ) e interações ( $X_i Z_k$ ,  $X_i^2 Z_k$ ,  $X_i Z_k^2$ ).

Para a determinação das esperanças matemáticas das formas quadráticas, que fornecem as somas de quadrados, usou-se o seguinte teorema, enunciado em Searle (1971):

**TEOREMA 1:** Seja  $y = X\theta + e$ , definido como modelo linear de Gauss-Markoff,  $y$  um vetor de variáveis aleatórias com vetor de esperanças  $X\theta$  e matriz de covariâncias  $\Sigma$ , positiva definida, denotado por  $y \sim N(X\theta, \Sigma)$ . Se  $P$  é uma matriz de constantes, real e simétrica, então a forma quadrática  $Q(y) = y'Py$  tem esperança matemática dada por:

$$E[y'Py] = \text{tr}(P\Sigma) + \mathbf{q}'X'PX\mathbf{q} \quad (5)$$

sendo:  $P$ : núcleo da forma quadrática;  $\text{tr}$ : operador traço de uma matriz;  $\Sigma$ : matriz de covariâncias, dada por:

$$\text{Cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) =$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2, & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k = k' \\ \mathbf{s}_a^2, & \text{se } i = i', j = j' \text{ e } k \neq k' \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

Do modelo adotado em (1) e das pressuposições associadas aos erros entre subparcelas, consideradas independentes, e de uso tradicional nos experimentos planejados em parcelas subdivididas, de (6), obteve-se a seguinte matriz de variâncias e covariâncias ( $\Sigma$ ):

$$\Sigma = I_{(t)} \otimes V_{(JK)} \quad (7)$$

sendo:  $I_{(t)}$  a matriz identidade, e

$$V = \begin{bmatrix} s_a^2 + s^2 & 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 & 0 \\ 0 & s_a^2 + s^2 & 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 \\ s_a^2 & 0 & s_a^2 + s^2 & 0 & s_a^2 & 0 \\ 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 + s^2 & 0 & s_a^2 \\ s_a^2 & 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 + s^2 & 0 \\ 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 & 0 & s_a^2 + s^2 \end{bmatrix}$$

De acordo com o modelo em (1), o esquema de análise de variância obtido, usando-se a notação  $R(\cdot)$ , de acordo com Searle (1971), está apresentado na Tabela 2, o qual é concordante ao apresentado por Mischon e Pinho (1996). Nota-se que foi usado o modelo seqüencial ou as somas de quadrados tipo I; esses tipos de somas de quadrados são proveitosas para modelos hierárquicos, polinomiais e testes envolvendo a homo-

geneidade de coeficientes de regressão (Speed e Hocking, 1976; Searle, 1987; Littell, Freund e Spector, 1997).

Para realização das operações matriciais, utilizou-se como suporte computacional o software Mathematica (Wolfram, 1993) e para a realização da análise de variância, utilizou-se o software SAS (SAS Institute, 1993).

**TABELA 2** - Esquema de análise de variância de um experimento em parcelas subdivididas, com desdobramento dos graus de liberdade, sob a forma de superfície de resposta.

FV	GL	Soma de quadrados
Blocos	J - 1	$R(\mu, b) - R(\mu)$
Trat.(A)	I - 1	$R(\mu, b, t) - R(\mu, b)$
Reg. Linear ( $t_1$ )	1	$R(\mu, b, t_1) - R(\mu, b)$
Reg. Quadrática ( $t_2$ )	1	$R(\mu, b, t_1, t_2) - R(\mu, b, t_1)$
...	...	...
Reg.(I - 1)grau ( $t_{I-1}$ )	1	$R(\mu, b, t_1, t_2, \dots, t_{I-1}) - R(\mu, b, t_1, t_2, \dots, t_{I-2})$
RESÍDUO (a)	(I - 1)(J - 1)	$R(\mu, b, t, tb) - R(\mu, b, t)$
Trat.(B)	K - 1	$R(\mu, b, t, tb, v) - R(\mu, b, t, tb)$
Reg.Linear ( $v_1$ )	1	$R(\mu, b, t, tb, v_1) - R(\mu, b, t, tb)$
Reg. Quadrática ( $v_2$ )	1	$R(\mu, b, t, tb, v_1, v_2) - R(\mu, b, t, tb, v_1)$
...	...	...
Reg.(k - 1)grau ( $v_{K-1}$ )	1	$R(\mu, b, t, tb, v_1, v_2, \dots, v_{K-1}) - R(\mu, b, t, tb, v_1, v_2, \dots, v_{K-2})$
Interação AxB	(I - 1)(K - 1)	$R(\mu, b, t, tb, v, tv) - R(\mu, b, t, tb, v)$
$tv_{11}$	1	$R(\mu, b, t, tb, v, tv_{11}) - R(\mu, b, t, tb, v)$
$tv_{12}$	1	$R(\mu, b, t, tb, v, tv_{11}, tv_{12}) - R(\mu, b, t, tb, v, tv_{11})$
...	...	...
$tv_{(I-1)(K-1)}$	1	$R(\mu, b, t, tb, v, tv_{11}, \dots, tv_{(I-1)(K-1)}) - R(\mu, b, t, tb, v, tv_{11}, \dots, tv_{(I-2)(K-2)})$
RESÍDUO (b)	I(J - 1)(K - 1)	$y'y - R(\mu, b, t, tb, v, tv)$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 1. Esperança Matemática das Somas de Quadrados

#### 1.1. Esperança matemática de SQ( $\mu$ )

Considerando-se a matriz  $X_1$  e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + e_{ijk} \quad (8)$$

A soma de quadrados de parâmetros, de acordo com Searle (1987), pode ser obtida por:

$$SQ\mathbf{q}_1 = SQ(\mathbf{m}) = R(\mathbf{m}) = \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' y$$

A redução na soma de quadrados total devido ao parâmetro  $\mathbf{m}$  é:

$$R(\mathbf{m}) = y' \mathbf{X}_1' (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^G \mathbf{X}_1' y$$

$$P_1$$

$$SQ(\mathbf{m}) = y' P_1 y \quad (9)$$

Aplicando-se o teorema 1, descrito em (5) na expressão (9), tem-se:

$$E[SQ(\mathbf{m})] = E[y' P_1 y] = \text{tr}[P_1 \Sigma] + \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' P_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1$$

Multiplicando-se  $P_1$  por  $\Sigma$ , cuja expressão está definida em (7), tem-se que:

$$P_1 \Sigma = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) P_1$$

como  $P_1$  é uma matriz simétrica e idempotente, tem-se que:

$$\text{tr}[P_1 \Sigma] = r[P_1 \Sigma] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) r[P_1]$$

em que  $r[P_1]$  é o posto da matriz  $\mathbf{X}_1$ .

Neste caso,  $r[P_1] = r[X_1] = 1$ , logo:

$$\text{tr}[P_1 \Sigma] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2)$$

Tomando-se, agora, a expressão  $\mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' P_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1$ . Efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (4), obtém-se

$$\mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' P_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1)^G \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1 = [\mathbf{m}][n][\mathbf{m}] = n\mathbf{m}^2$$

Portanto,

$$E[SQ\mathbf{m}] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 \quad (10)$$

#### 1.2. Esperança matemática de SQ(b)

Considerando-se a matriz  $[X_1 : X_2]$  e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + b_j + e_{ijk} \quad (11)$$

A soma de quadrados para o efeito de blocos (SQ(b)), de acordo com Searle (1987), pode ser obtida por meio da redução:

$$SQ\mathbf{q}_2 = SQ(b) = R(\mathbf{m}, b) - R(\mathbf{m}) = R(b / \mathbf{m})$$

$$R(b / \mathbf{m}) = \mathbf{q}_2' \mathbf{X}_2' y - \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' y$$

$$R(b / \mathbf{m}) = y' \mathbf{X}_2' (\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2)^G \mathbf{X}_2' y - y' P_1 y$$

$$P_2$$

então

$$R(b / \mathbf{m}) = y' P_2 y - y' P_1 y$$

ou ainda,

$$SQ(b) = y' (P_2 - P_1) y \quad (12)$$

Aplicando-se (5) em (12), tem-se:

$$E[SQ(b)] = E[y' (P_2 - P_1) y] = E[y' P_2 y] - E[y' P_1 y]$$

$$= \text{tr}[P_2 \Sigma] + \mathbf{q}_2' \mathbf{X}_2' P_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{q}_2 - \text{tr}[P_1 \Sigma] - \mathbf{q}_1' \mathbf{X}_1' P_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{q}_1$$

$$\text{Mas, } P_2 \Sigma = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) P_2$$

como  $P_2 = \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_2' \mathbf{X}_2)^G \mathbf{X}_2' = \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^+$  é uma matriz simétrica e idempotente, pois  $\mathbf{X}_2^+$  é a inversa de Moore-Penrose da matriz  $\mathbf{X}_2$ , tem-se que:

$$\text{tr}[P_2 \Sigma] = r[P_2 \Sigma] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) r[P_2]$$

mas,  $r[P_2] = r[X_2] = 2$  para o exemplo, e numa situação geral onde tem-se J blocos, é  $r[P_2] = J$ .

Logo,

$$\text{tr}[P_2 \Sigma] = J(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2)$$

Tomando-se a expressão

$\mathbf{q}_2' \mathbf{X}_2' P_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{q}_2$  e efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (4), obtém-se:

$$\mathbf{q}_2' \mathbf{X}_2' P_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{q}_2 = n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2$$

Assim:

$$E[y' P_2 y] = J(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2$$

logo, a esperança matemática da soma de quadrados de blocos ou da redução devido aos parâmetros b's ajustados para  $\mathbf{m}$ , é:

$$E[y'(P_2 - P_1)y] = [J(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2] - [(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2]$$

Simplificando, obtém-se:

$$E[\text{SQ}(b)] = (J-1)(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 \quad (13)$$

### 1.3. Esperança matemática de $\text{SQ}(t_1)$

Considerando-se a matriz  $[X_1 : X_2 : X_3]$  e o modelo reduzido

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + b_j + t_1 x_i + e_{ijk} \quad (14)$$

A soma de quadrados de parâmetros ( $\mathbf{m}$ ,  $b$  e  $t_1$ ) ou a redução na soma de quadrados devido aos parâmetros  $\mathbf{m}$ ,  $b$  e  $t_1$ , conforme Searle (1987), é:

$$\text{SQ}q_3 = \text{SQ}(\mathbf{m}, b, t_1) = R(\mathbf{m}, b, t_1) = \mathbf{q}_3' \mathbf{X}_3' y = y' \mathbf{X}_3 (\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3)^G \mathbf{X}_3' y$$

fazendo-se  $\mathbf{X}_3 (\mathbf{X}_3' \mathbf{X}_3)^G \mathbf{X}_3' = \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_3^+ = \mathbf{P}_3$ , tem-se que a soma de quadrados para o efeito linear do tratamento primário  $\text{SQ}(t_1)$  ou a redução devido ao efeito linear do tratamento primário ajustado para  $\mathbf{m}$  e  $b$ , é:

$$\text{SQ}q_3 = \text{SQ}(t_1) = R(t_1 / \mathbf{m}, b) = R(\mathbf{m}, b, t_1) - R(\mathbf{m}, b) \\ R(t_1 / \mathbf{m}, b) = y' \mathbf{P}_3 y - y' \mathbf{P}_2 y$$

ou

$$\text{SQ}(t_1) = y' (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) y \quad (15)$$

Aplicando-se (5) em (15), tem-se:

$$E[\text{SQ}t_1] = E[y' (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) y] = E[y' \mathbf{P}_3 y] - E[y' \mathbf{P}_2 y] = \\ \text{tr}[\mathbf{P}_3 \Sigma] + \mathbf{q}_3' \mathbf{X}_3' \mathbf{P}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{q}_3 - \text{tr}[\mathbf{P}_2 \Sigma] - \mathbf{q}_2' \mathbf{X}_2' \mathbf{P}_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{q}_2 \\ \text{Mas, } \mathbf{P}_3 \Sigma = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) \mathbf{P}_3$$

como  $\mathbf{P}_3 = \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_3^+$  é uma matriz simétrica e idempotente, conforme propriedade da matriz de Moore-Penrose (Searle, 1987), tem-se que:

$$\text{tr}[\mathbf{P}_3 \Sigma] = r[\mathbf{P}_3 \Sigma] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) r[\mathbf{P}_3]$$

mas,  $r[\mathbf{P}_3] = r[\mathbf{X}_3] = 3$  para o exemplo considerado, e generalizando, tem-se que  $r[\mathbf{X}_3] = J + 1$ . Logo:

$$\text{tr}[\mathbf{P}_3 \Sigma] = (J+1)(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2)$$

Considerando-se, agora, a expressão  $\mathbf{q}_3' \mathbf{X}_3' \mathbf{P}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{q}_3$  e efetuando-se as multiplicações e aplicando-se as restrições de (4), obtém-se:

$$\mathbf{q}_3' \mathbf{X}_3' \mathbf{P}_3 \mathbf{X}_3 \mathbf{q}_3 = n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 + \text{JK} (\sum_{i=1}^J x_i^2) t_1^2$$

em que  $\sum_{i=1}^J x_i^2$  é a soma dos quadrados dos coeficientes de efeitos lineares do fator primário. Assim:

$$E[y' \mathbf{P}_3 y] = (J+1)(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 + \text{JK} (\sum_{i=1}^J x_i^2) t_1^2$$

então a esperança matemática da soma de quadrados de efeito linear (ou regressão linear) do tratamento primário, ou ainda, a redução devido à regressão linear ajustado para  $\mathbf{m}$  e  $b$  é:

$$E[y' (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) y] = [(J+1)(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2 + \text{JK} (\sum_{i=1}^J x_i^2) t_1^2] - [J(K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + n\mathbf{m}^2 + \text{IK} \sum_{j=1}^J b_j^2]$$

Portanto,

$$E[\text{SQ}t_1] = (K\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2) + \text{JK} (\sum_{i=1}^J x_i^2) t_1^2 \quad (16)$$

As mesmas considerações feitas nos itens 1.1, 1.2 e 1.3, e outras semelhantes, foram consideradas para os outros parâmetros do modelo. De modo análogo, pode-se obter a esperança matemática relativa a qualquer outra fonte de variação que tenha interesse, em uma determinada pesquisa. Desse modo, seguindo-se o mesmo raciocínio e passos descritos anteriormente, chega-se ao resultado da Tabela 3.

## 2. Análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos

O esquema de análise de variância com decomposição dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta, com as respectivas esperanças matemáticas de quadrados médios e critérios para obtenção da estatística F, estão apresentados na Tabela 3.

**TABELA 3** - Esquema de análise de variância com as fontes de variação, graus de liberdade, esperanças matemáticas de quadrados médios e critérios para obtenção da estatística F.

FV	GL	E[QM]	QM	TESTE F
Blocos	J - 1	$(\mathbf{s}^2 + \mathbf{K}\mathbf{s}_a^2) + \frac{\mathbf{IK} \sum_j b_j^2}{\mathbf{J} - 1}$	V <sub>1</sub>	V <sub>1</sub> /V <sub>5</sub>
T Linear(t <sub>1</sub> )	1	$(\mathbf{s}^2 + \mathbf{K}\mathbf{s}_a^2) + \mathbf{JK}(\sum_i x_i^2)t_1^2$	V <sub>2</sub>	V <sub>2</sub> /V <sub>5</sub>
T Quadrático(t <sub>2</sub> )	1	$(\mathbf{s}^2 + \mathbf{K}\mathbf{s}_a^2) + \mathbf{JK}(\sum_i x_i^4)t_2^2$	V <sub>3</sub>	V <sub>3</sub> /V <sub>5</sub>
...	...	...	...	...
T Grau (I-1)	1	$(\mathbf{K}\mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2) + \mathbf{JK}(\sum_{i=1}^I x_i^{i-1})^2 t_{I-1}^2$	V <sub>4</sub>	V <sub>4</sub> /V <sub>5</sub>
RESÍDUO(a)	(I - 1)(J - 1)	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{K}\mathbf{s}_a^2$	V <sub>5</sub>	
T' Linear(v <sub>1</sub> )	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{IJ}(\sum_k z_k^2)v_1^2$	V <sub>6</sub>	V <sub>6</sub> /V <sub>14</sub>
T' Quadrático(v <sub>2</sub> )	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{IJ}(\sum_k z_k^4)v_2^2$	V <sub>7</sub>	V <sub>7</sub> /V <sub>14</sub>
...	...	...	...	...
T' Grau (K-1)	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{IJ}(\sum_{k=1}^K z_k^{K-1})^2 v_{K-1}^2$	V <sub>8</sub>	V <sub>8</sub> /V <sub>14</sub>
tv <sub>11</sub>	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{J}(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^2)(\text{tv})_{11}^2$	V <sub>9</sub>	V <sub>9</sub> /V <sub>14</sub>
tv <sub>12</sub>	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{J}(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^2 z_k^4)(\text{tv})_{12}^2$	V <sub>10</sub>	V <sub>10</sub> /V <sub>14</sub>
tv <sub>21</sub>	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{J}(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^4 z_k^2)(\text{tv})_{21}^2$	V <sub>11</sub>	V <sub>11</sub> /V <sub>14</sub>
tv <sub>22</sub>	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{J}(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} x_i^4 z_k^4)(\text{tv})_{22}^2$	V <sub>12</sub>	V <sub>12</sub> /V <sub>14</sub>
...	...	...	...	...
tv <sub>(I-1)(K-1)</sub>	1	$\mathbf{s}^2 + \mathbf{J}(\sum_{i=1, k=1}^{I, K} (x_i^{I-1})^2 (z_k^{K-1})^2)(\text{tv})_{(I-1)(K-1)}^2$	V <sub>13</sub>	V <sub>13</sub> /V <sub>14</sub>
RESÍDUO(b)	I(J - 1)(K - 1)	$\mathbf{s}^2$	V <sub>14</sub>	

Partindo-se, inicialmente, de que as hipóteses de nulidade a serem avaliadas são:  $H_0^1: t_1 = 0$ ;  $H_0^2: t_2 = 0$ ;  $H_0^3: v_1 = 0$ ;  $H_0^4: v_2 = 0$ ;  $H_0^5: tv_{11} = 0$ ;  $H_0^6: tv_{12} = 0$ ;  $H_0^7: tv_{21} = 0$  e  $H_0^8: tv_{22} = 0$ ; que correspondem à verificação de não-existência dos efeitos linear e quadrático para tratamentos primários e tratamentos secundários e de ausência de efeitos das interações linear X linear, linear X quadrática, quadrática X linear e quadrática X quadrática entre tratamentos primários e secundários, respectivamente.

Verificou-se (Tabela 3) que os erros apropriados para testar essas hipóteses são evidentes quando se observam as esperanças matemáticas de quadrados médios. Observa-se que para avaliar os efeitos linear ( $t_1 = 0$ ) e quadrático ( $t_2 = 0$ ) do tratamento primário, pela estatística F, usa-se o QMResíduo(a) como denominador; esse resultado é concordante e semelhante aos obtidos por vários autores para os experimentos em parcelas subdivididas, (Kempthorne, 1952; Pimentel Gomes, 1990; Mischán e Pinho, 1996).

Para avaliação dos efeitos linear ( $v_1 = 0$ ) e quadrático ( $v_2 = 0$ ) do tratamento secundário, a estatística F usa como denominador o QMResíduo(b); esse resultado é análogo àqueles encontrados na literatura para os experimentos em parcelas subdivididas (Mischán e Pinho, 1996 entre outros).

Já para avaliação das interações entre tratamentos primários (t) e secundários (v), do tipo linear X linear ( $tv_{11} = 0$ ), linear X quadrática ( $tv_{12} = 0$ ), quadrática X linear ( $tv_{21} = 0$ ) e quadrática X quadrática ( $tv_{22} = 0$ ), a estatística F utiliza como denominador o QMResíduo(b). Esse resultado não era esperado, pois acreditava-se que o denominador fosse uma média dos dois resíduos. Justifica-se esse fato talvez pela metodologia usada, visto que na notação R( . ) e nos modelos seqüenciais há uma adição de cada fonte de variação seqüencialmente no modelo na ordem listada; assim, cada modelo é ajustado para os efeitos precedentes, semelhantes às aplicações realizadas por Mischán e Pinho (1996) e Littell, Freund e Spector (1997).

Estudando regressão num experimento em parcelas subdivididas, quando ambos os fatores são quantitativos, Mischán e Pinho (1996) consideraram o modelo:

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + t_1x_i + t_2x_i^2 + K + t_{11}x_i^{t-1} + \mathbf{b}_j + (\mathbf{ab})_{ij} + v_1z_k + v_2z_k^2 + K + v_{k-1}z_k^{K-1} + (\mathbf{ag})_{ik} + e_{ijk}$$

ou seja, usaram a regressão no fator  $\alpha$  e no fator  $\gamma$  e, quando desdobraram a interação, estudaram a regressão do fator  $\gamma$  dentro de cada nível do fator  $\alpha$ ; nesse último caso, o resíduo adequado foi o QMResíduo(b). Já, quando estudaram regressão do fator  $\alpha$  dentro de cada nível do fator  $\gamma$ , sugerem que o resíduo adequado para testar os efeitos de regressão é obtido pela combinação linear  $QMResíduo = [(b - 1)QMResíduo(b) + QMResíduo(a)]/ b$ . Esses resultados são semelhantes aos encontrados no presente trabalho, exceto quanto ao teste específico para os efeitos das interações; mas, considerando que, em geral, o teste F para interação fator A X fator B é realizado tendo como denominador o QMResíduo(b), o resultado aqui obtido não parece tão estranho.

Os estimadores dos parâmetros foram obtidos minimizando os erros  $e_{ijk}$  ou a soma de quadrados do resíduo(b), que é tradicional nos textos de estatística, para esse tipo de experimento. Na obtenção de parâmetros e de funções lineares estimáveis Chakrabarti (1962) considerou um modelo com apenas um erro experimental ( $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \rho_j + \tau_k + \delta_{jk} + \epsilon_{ijk}$ ), no entanto, para a realização de testes de significância, o erro  $\epsilon_{ijk}$  foi decomposto em dois outros, os quais vão corresponder aos resíduo(a) e resíduo(b); desse modo, os resultados aqui obtidos estão coerentes aos de Chakrabarti (1962), entre outros.

Para os casos de dados não balanceados, sugere-se que novos estudos sejam realizados, pois não é garantido que o esquema adotado seja o mesmo. Estudando os experimentos em parcelas subdivididas, com os tratamentos primários em blocos incompletos parcialmente balanceados, Morais (1992) havia verificado que não existe um teste exato para comparar tratamentos primários dentro de um dado tratamento secundário, visto que as funções lineares entre efeitos de tratamentos primários, dado um tratamento secundário, nem sempre são estimáveis, sendo estimáveis, por exemplo, aquelas provenientes de combinações lineares das observações presentes no mesmo bloco.

### 3. Exemplo Ilustrativo

A análise de variância dos dados da Tabela 1, com decomposição dos efeitos de tratamentos sob a

forma de superfície de resposta encontra-se apresentada na Tabela 4. Observa-se que a variável analisada (produção de trigo em kg/ha) mostrou-se significativamente influenciada pelas lâminas de irrigação, doses de nitrogênio e interação lâminas de irrigação X doses de nitrogênio, mostrando a existência de efeitos de lâminas de irrigação, de doses de nitrogênio e um comportamento diferenciado da aplicação dos níveis de nitrogênio nas diversas lâminas de irrigação (interação). Portanto, verifica-se que é viável a decomposição dos efeitos de tratamentos sob a forma de superfície de resposta.

A equação de superfície estimada usando as médias dos tratamentos é

$$\bar{y} = -6655,720 + 187,998 L + 42,728 N - 0,834 L^2 - 0,122 N^2 - 0,100 LN \quad (17)$$

Os níveis ótimos de lâmina de irrigação (L) e dose de nitrogênio (N), são os seguintes: L = 104,74% da ECA e N = 132,67 kg/ha, que proporcionam uma produção máxima de 6.017,60 kg/ha de trigo.

A superfície ajustada para os dados de produção de trigo de acordo com a equação de regressão estimada encontra-se apresentada na Figura 1, onde se observa

que, de maneira geral, houve influência de lâminas de irrigação e de doses de nitrogênio sobre a produção de trigo em kg/ha, indicando que maiores produtividades podem ser obtidas com lâminas de irrigação na faixa de 90 a 120% da ECA e doses de nitrogênio na faixa de 100 a 160 kg/ha. Esse fato pode também ser confirmado pela análise da Figura 2, onde estão plotadas isoquantas obtidas a partir do modelo (17).

#### 4. Análise usando o SAS

Utilizando o PROC GLM do SAS, e considerando o modelo saturado ou de resíduo zero, ou seja:

$$Y = B L L*L B*L B*L*L N N*N N*L N*L*L N*N*L N*N*L*L B*N B*N*N B*N*L B*N*L*L B*N*N*L B*N*N*L*L \quad (18)$$

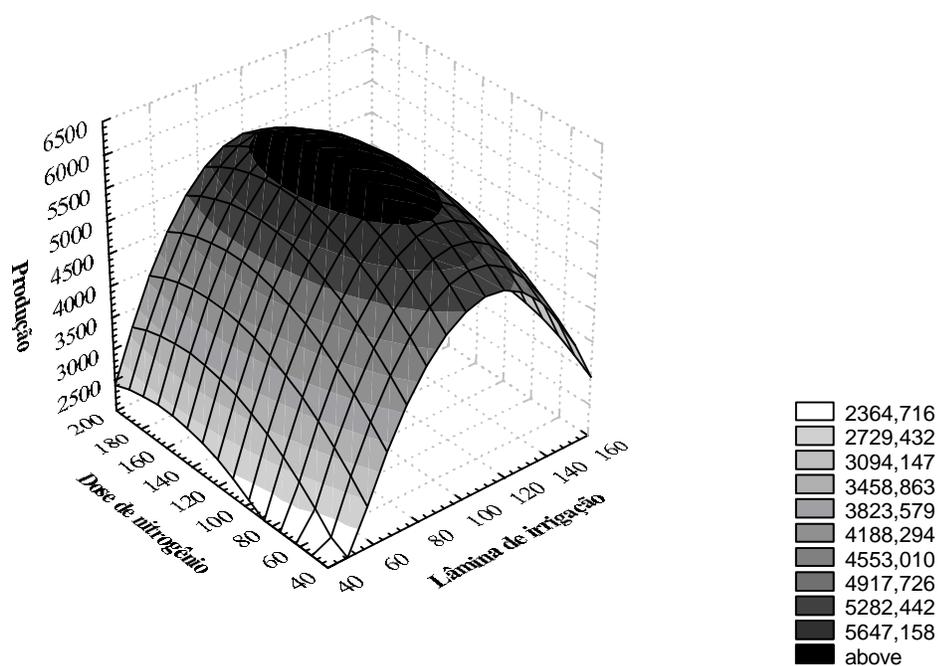
sendo: Y = resposta; B = blocos; L = lâmina e N = nitrogênio

Em que cada efeito no modelo representa 1 grau de liberdade, e as interações B\*L e B\*L\*L são as partes que compõem o Resíduo(a) da Tabela 4 e as interações B\*N B\*N\*N B\*N\*L B\*N\*L\*L B\*N\*N\*L B\*N\*N\*L\*L são as partes do Resíduo(b), conforme se observa pelos resultados da Tabela 5.

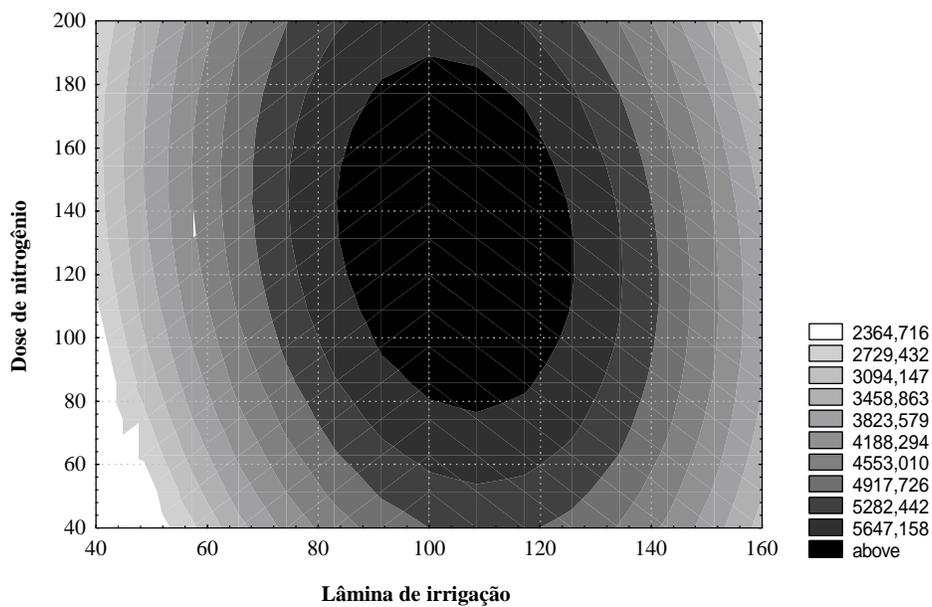
**TABELA 4** - Resumo da análise de variância para os dados do exemplo ilustrativo.

FV	GL	QM	F	Pr>F
Blocos	1	51.199,9999	0,4070	0,5890
Lâminas(L)	2	9.957.173,5556	79,0620	0,0125
L Linear(t <sub>1</sub> )	1	2.522.667,0000	20,0300	0,0465
L Quadrática(t <sub>2</sub> )	1	17.391.660,1111	138,0930	0,0072
Resíduo(a)	2	125.942,0000		
Nitrogênio(N)	2	655.520,0556	11,2790	0,0093
N Linear(v <sub>1</sub> )	1	545.706,7500	9,3893	0,0221
N Quadrático(v <sub>2</sub> )	1	765.333,3611	13,1681	0,0110
Interação L x N	4	297.809,1388	5,1240	0,0386
L Linear x N Linear(tv <sub>11</sub> )	1	721.801,0000	12,4191	0,0125
Desvios	3	156.478,5100	2,6923	0,1395
Resíduo(b)	6	58.120,3333		
Total	17			

**CV(a) = 8,26%; CV(b) = 5,61%**



**FIGURA 1** - Efeito de lâminas de irrigação e de doses de nitrogênio sobre a produção de trigo em kg/ha



**FIGURA 2** - Isoquantas do modelo selecionado para expressar o efeito de lâminas de irrigação e doses de nitrogênio sobre a produção de trigo em kg/ha.

**TABELA 5** - Resultado obtido utilizando o PROC GLM do SAS (modelo saturado).

FV	GL	SQ	
B	1	51.199,9999	
L	1	2.522.667,0000	
L*L	1	17.391.660,1111	
B*L	1	164.268,0000	}Partes do Resíduo(a)
B*L*L	1	87.616,0000	
N	1	545.706,7500	
N*N	1	765.333,3611	
L*N	1	721.801,0000	
L*L*N	1	167.835,3800	
L*N*N	1	212.628,3800	
L*L*N*N	1	88.971,6800	
B*N	1	1.260,7500	}Partes do Resíduo(b)
B*N*N	1	130.682,2500	
B*L*N	1	16.653,1200	
B*L*L*N	1	58.509,3700	
B*L*N*N	1	76.275,3700	
B*L*L*N*N	1	65.341,1200	
Total	17		

Considerando-se o seguinte modelo:

$$Y = B L L*L B*L B*L*L N N*N N*N*L N*L*L N*N*L N*N*L*L \quad (19)$$

Onde foram eliminados as partes do Resíduo(b). Os resultados estão apresentados nas Tabelas 6 e 7.

**TABELA 6** - Resultado obtido utilizando o PROC GLM do SAS.

FV	GL	SQ	QM	F	Pr>F
Modelo	11	22.719.707,78	2.065.427,98	35,54	0,0001
Resíduo	6	348.722,00	58.120,33		
Total	17	230.684.429,78			

**TABELA 7** - Resultado obtido utilizando o PROC GLM do SAS.

FV	GL	SQ
B	1	51.199,9999
L	1	2.522.667,0000
L*L	1	17.391.660,1111
B*L	1	164.268,0000
B*L*L	1	87.616,0000
N	1	545.706,7500
N*N	1	765.333,3611
L*N	1	721.801,0000
L*L*N	1	167.835,3800
L*N*N	1	212.628,3800
L*L*N*N	1	88.971,6800

Observa-se pelos resultados que as somas de quadrados da análise de variância são as mesmas da Tabela 4. Os estimadores foram obtidos minimizando o

resíduo(b) com 6 graus de liberdade, em concordância com a Tabela 4.

Tomando o modelo saturado e eliminando as partes do Resíduo(a), tem-se o modelo:

$$Y = B L L * L N N * N N * L N * L * L N * N * L N * N * L * L B * N B * N * N B * N * L B * N * L * L B * N * N * L B * N * N * L * L \quad (20)$$

Os resultados estão apresentados nas Tabelas 8 e 9.

Os novos estimadores são obtidos minimizando o Resíduo(a) com 2 graus de liberdade, embora com soma de quadrados diferente da Tabela 4, pois agora ela representa os termos faltantes equivalendo à soma de quadrados Tipo III.

Utilizando o PROC MIXED do SAS, e considerando um modelo misto, no qual bloco e as interações com ele são aleatórias, o modelo fica:

$$Y = L L * L N N * N N * L N * L * L N * N * L N * N * L * L \quad (21)$$

Os resultados são os apresentados nas Tabelas 10 e 11.

Observando os resultados, nota-se que as estimativas de L e de L\*L são as mesmas do modelo (20) e as de N, N\*N, N\*L, N\*L\*L, N\*N\*L e N\*N\*L\*L são as mesmas do modelo (19), obtidas utilizando o PROC GLM. Portanto, o modelo (21) concilia na estimação e nos testes de hipóteses.

**TABELA 8** - Resultado obtido utilizando o PROC GLM do SAS.

FV	GL	SQ	QM	F	Pr>F
Modelo	15	22.929.830,76	1.528.655,38	22,06	0,0442
Resíduo	2	138.599,02	69.299,51		
Total	17	230.684.429,78			

**TABELA 9** - Resultado obtido utilizando o PROC GLM do SAS.

FV	GL	SQ
B	1	51.199,9999
L	1	2.522.667,0000
L*L	1	17.391.660,1111
N	1	545.706,7500
N*N	1	765.333,3611
L*N	1	721.801,0000
L*L*N	1	167.835,3800
L*N*N	1	212.628,3800
L*L*N*N	1	88.971,6800
B*N	1	1.260,7500
B*N*N	1	130.682,2500
B*L*N	1	179.784,45
B*L*L*N	1	133.566,48
B*L*N*N	1	16.476,47
B*L*L*N*N	1	236,58

**TABELA 10** - Resultado obtido utilizando o PROC MIXED do SAS (Solução para efeitos fixos).

Efeito	Estimativa	Erro Padrão	GL	t	Prob >  t
Intercepto	-13.726,00000	3.352,75500	1	-4,09	0,1525
L	331,33000	76,14440	1	4,35	0,1438
L*L	-1,45660	0,37680	1	-3,87	0,1612
N	164,62080	63,45360	6	2,59	0,0410
N*N	-0,57130	0,26160	6	-2,18	0,0717
N*L	-2,49840	1,44100	6	-1,73	0,1337
N*L*L	0,01010	0,00710	6	1,42	0,2061
N*N*L	0,00850	0,00590	6	1,45	0,1981
N*N*L*L	-0,00004	0,00003	6	-1,20	0,2771

**TABELA 11** - Fontes de Variação, graus de liberdade do numerador (NGL) e denominador (DGL) e testes de efeitos fixos usando o PROC MIXED do SAS.

Fonte	NGL	DGL	F(Tipo III)	Pr>F
L	1	1	18,93	0,1438
L*L	1	1	14,94	0,1612
N	1	6	6,73	0,0410
N*N	1	6	4,77	0,0717
L*N	1	6	3,01	0,1337
L*L*N	1	6	2,01	0,2061
L*N*N	1	6	2,09	0,1981
L*L*N*N	1	6	1,43	0,2771

**TABELA 12** - Resultado obtido utilizando o PROC MIXED do SAS (Solução para efeitos fixos).

Efeito	Estimativa	Erro Padrão	GL	t	Prob >   t
Intercepto	-6655,722222	853,3419	1	-7,80	0,0812
L	187,998333	12,6995	1	14,80	0,0429
L*L	-0,834067	0,0594	1	-14,03	0,0453
N	42,727778	10,5829	9	4,04	0,0029
N*N	-0,121505	0,0411	9	-2,95	0,0162
N*L	-0,100125	0,0349	9	-2,86	0,0186

**TABELA 13** - Fontes de Variação, graus de liberdade do numerador (NGL) e denominador (DGL) e testes de efeitos fixos usando o PROC MIXED do SAS.

Fonte	NGL	DGL	F(Tipo III)	Pr>F
L	1	1	219,15	0,0429
L*L	1	1	196,70	0,0453
N	1	9	16,30	0,0029
N*N	1	9	8,70	0,0162
L*N	1	9	8,21	0,0186

Utilizando o modelo de superfície de resposta de segunda ordem, ou seja,

$$Y = L L * L \quad N N * N N * L \quad (22)$$

e utilizando o PROC MIXED do SAS, no qual o bloco e as interações com ele são aleatórias, têm-se os resultados apresentados nas Tabelas 12 e 13.

Observa-se pelos resultados que os graus de liberdade estão associados de forma mais adequada, apenas os desvios estão incorporados ao Resíduo(b).

Esses fatos sugerem que experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores são quantitativos, podem ser analisados pelo SAS sem problema algum.

### CONCLUSÕES

a) Experimentos em parcelas subdivididas com fatores quantitativos são analisados pelos Procedimentos PROC GLM e PROC MIXED do SAS.

b) É possível realizar a análise de experimentos em parcelas subdivididas, quando os fatores em estudo são quantitativos, por meio da metodologia de superfície de resposta;

c) Para testar os efeitos linear e quadrático do tratamento primário, usa-se o QMResíduo(a) como denominador e para os efeitos linear e quadrático do tratamento secundário e interação usa-se o QMResíduo(b) como denominador;

d) A metodologia usada pode ser adaptada para experimentos em parcelas subdivididas envolvendo fatores quantitativos com outros números de níveis.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, R.L.; BANCROFT, T.A. **Statistical theory in research**. New York: McGraw-Hill Book, 1952. 399 p.
- BOX, G.E.P.; DRAPER, N.R. **Empirical model building and response surfaces**. New York: J. Wiley, 1987. 669p.
- BOX, G.E.P.; WILSON, K.B. On the experimental attainment of optimum conditions (with discussion). **Journal of the Royal Statistical Society, B**, London, v.13, p. 1-45, 1951.
- CHAKRABARTI, M.C. **Mathematics of design and analysis of experiments**. London: Asia Publishing House, 1962. 120p.
- COCHRAN, W.G.; COX, G.M. **Diseños experimentales**. 3. ed. México:Trilla, 1976. 661p.
- KEMPTHORNE, O. **The designs and analysis of experiments**. Nova York: Wiley, 1952. 631p.
- LITTEL, R.C.; FREUND, R.J.; SPECTOR, P.C. **Sas system for linear models**. 6. ed. Cary: SAS Institute, 1997. 329p.
- MILLIKEN, G.A; JOHNSON, D.E. **Analysis of messy data; designed experiments**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984. 485p.
- MISCHAN, M.M.; PINHO, S.Z. de. **Experimentação agrônômica: dados não balanceados**. Botucatu: Fundibio, 1996. 456p.
- MORAIS, A.R. **Análise intrablocos de experimentos em parcelas subdivididas com tratamentos principais em blocos incompletos parcialmente balanceados**. Piracicaba: ESALQ/USP, 1992. 117p. (Tese - Doutorado em Estatística e Experimentação Agrônômica).
- NOGUEIRA, I.R. Método geral para obtenção de tabelas de polinômios ortogonais. **Revista de Agricultura**, Piracicaba, v.54, n.4, p.269-279, dez. 1979.
- PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 13. ed. Piracicaba: Nobel, 1990. 468p.
- SAS INSTITUTE. **Procedures guide for computers**. 6.ed. Cary, N.C: 1993. 846p.
- SEARLE, S.R. **Linear models**. New York: J. Wiley, 1971. 532p.
- SEARLE, S.R. **Linear models for unbalanced data**. New York: J. Wiley, 1987. 536p.
- SPEED, F.M.; HOCKING, R.R. The use of R( . ) notation with unbalanced data. **The American Statistician**, Washington, v.28, n.1, p.30-33, Feb. 1976.
- STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H. **Principles and procedure of statistics**. 2.ed. Nova York: McGraw-Hill, 1980. 633p.
- WOLFRAM, S. **MATHEMATICA: a system for doing Mathematics by computer**. 2.ed. Reading: Addison Wesley, 1993. 961p.