

Teorias de Avaliação - CE095

Adilson dos Anjos¹

¹Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná
aanjos@ufpr.br

Curitiba, PR
2 de setembro de 2014

Teoria da Resposta ao Item

— Modelo de três parâmetros —

Suposições sobre o modelo

Unidimensionalidade:

- O instrumento de medida (prova, teste, questionário) mede apenas **um traço latente**.
- O traço latente é devido a apenas uma habilidade θ de cada indivíduo.

“Somente a partir de modelos com bom ajuste é que pode-se garantir a obtenção de itens e habilidades invariantes” (Andrade *et. al*, 2000).

Suposições sobre o modelo

Unidimensionalidade:

Por exemplo, pode-se elaborar um item sobre **Matemática** para alunos onde o enunciado está escrito na **Língua Inglesa**;

Além de conhecimentos de matemática (θ_1), o aluno precisa de conhecimentos de inglês (θ_2).

Modelo de três parâmetros

Suposições sobre o modelo

Unidimensionalidade:

- Pode ser razoável supor apenas um traço latente dominante (Ayala, 2009);
- Existem métodos/testes para avaliar a unidimensionalidade de um instrumento de medida;
(*veremos adiante nesse curso*)
- Principal método: **análise fatorial de informação completa**;
- Existem **modelos** para considerar a multidimensionalidade de um instrumento de medida;
- **Interpretação de modelos multidimensionais?**

Modelo de três parâmetros

Suposições sobre o modelo

Independência local:

- As respostas para um item são independentes das respostas para outro item condicionado a habilidade do indivíduo;
- Conhecido também como independência local ou independência condicional;
- Dado um grupo de respondentes com $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, a distribuição dos θ 's são independentes um do outro;
- Essa suposição vale tanto para o modelo unidimensional quanto para o multidimensional;

Pode ser avaliada por meio de um teste de independência: veja a função `descript()` do pacote `ltm`.

Modelo de três parâmetros

Suposições sobre o modelo

Independência:

“Unidimensionalidade implica em independência local”

Conceitos

Dificuldade do Item (b_i)

- Definição baseada em probabilidade (não em termos de quantidade de esforço ou em dificuldade percebida);
- Na mesma métrica do traço latente ou proficiência;
- Identifica a proficiência na qual 50% dos respondentes respondem corretamente o item (modelo de Rasch, 1LP e 2LP);
- Nestes modelos, se $b = 0,3$ espera-se que 50% dos respondentes com proficiência $\theta = 0,3$ consigam responder corretamente o item;
- O parâmetro b_i também é conhecido como **parâmetro de locação** e é o **ponto de inflexão** da curva logística, exceto no modelo de 3 parâmetros;

Modelo logístico

$$P(x) = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

$P(x)$ = probabilidade

z = alguma combinação linear

Modelo logístico de 3 parâmetros

$$P(U_{ij} = 1 | \theta_j, a_i, b_i, c_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta_j - b_i)}}$$

Observe que θ e b_i devem estar na mesma escala e teoricamente,

$$-\infty < \theta < \infty \quad \text{e} \quad -\infty < b_i < \infty$$

na prática, com métodos de estimação:

$$-4 < \theta < +4 \quad \text{e} \quad -3 < b_i < +3$$

Características

- Teoricamente a_i pode assumir valores entre $+\infty$ e $-\infty$.
- Na prática, os valores de a_i desejáveis seriam entre 0,8 até 2,5;
- Valores de $a_i > 1,0$: desejável;
- O parâmetro a_i indica como um item pode diferenciar indivíduos em diferentes pontos da escala do traço latente;
- O parâmetro a_i é proporcional à derivada da tangente da curva no ponto de inflexão;

Características

- Valores negativos de a_i indicam que:
 - pessoas com um traço latente alto possuem baixa probabilidade de acertar o item e,
 - pessoas com um traço latente baixo possuem alta probabilidade de acertar o item;
- Itens com a_i negativos devem ser descartados;
 - 1 Verificar se não pode ser um erro de gabarito;
 - 2 Verificar se não há problemas no enunciado;
- 'Dificuldade' e 'Discriminação' são independentes um do outro;

Modelo de dois parâmetros

Diferentes valores negativos de a :

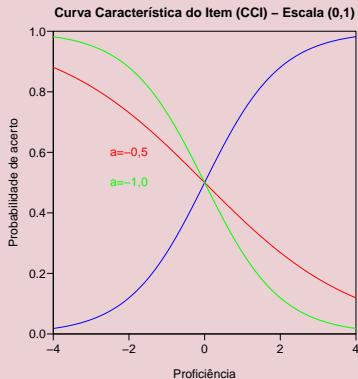


Figura 1 : Curvas características dos itens para valores **negativos** do coeficiente de discriminação a .

Características

- Acerto casual (parâmetro c): probabilidade assintótica de uma resposta correta quando $\theta \rightarrow -\infty$;
- O valor de c_i pode variar em função das características dos distratores;
- problemas de convergência;
- necessário ter pessoas com baixa habilidade para calibrar os parâmetros dos itens;
- Métodos Bayesianos (BILOG-MG / mirt) ou 'controle manual' (constraint): possível no **R** .

Características

- Ponto de inflexão: a interpretação depende do valor de c_i
- No modelo de 3 parâmetros, o parâmetro b representa a habilidade necessária para se ter uma probabilidade de acerto igual a $(1 + c)/2$.

Modelo de 3 parâmetros

$$P(U_{ij} = 1 | \theta_j, a_i, b_i, c_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{a_i(\theta_j - b_i)}}{1 + e^{a_i(\theta_j - b_i)}}$$

em que,

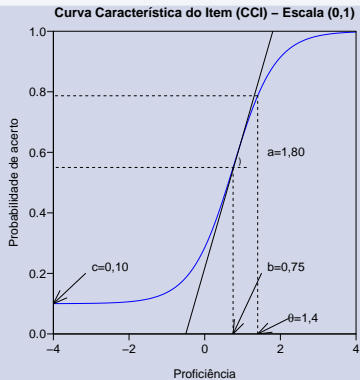
$P(U_{ij} = 1 | \theta_j, a_i, b_i, c_i)$ é a probabilidade do indivíduo j com habilidade θ_j acertar o item i ;

b_i é o parâmetro de dificuldade (ou de posição) do item i , medido na mesma escala de habilidade;

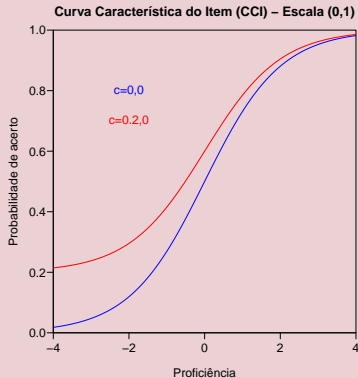
a_i é o parâmetro de discriminação (ou inclinação) do item i , com valor proporcional à inclinação da Curva Característica do Item no ponto b_i ;

c_i é o parâmetro do item que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente o item i (também chamado de probabilidade de acerto casual).

Teoria da Resposta ao Item



Modelo de três parâmetros

Diferentes valores de c :Figura 2 : Curvas características dos itens para diferentes valores de c_i .

Função de informação do item

- Permite avaliar o quanto um item contém de informação sobre o traço latente;
- Essa função é simétrica em relação ao parâmetro de dificuldade b_i (no modelo de Rasch e 1LP);

Função de informação do item para o modelo de Rasch/1LP

A função de informação do item é definida por:

$$I_i(\theta) = P_i(\theta)Q_i(\theta)$$

em que

$$P_i(\theta) = P(X_i = 1|\theta)$$

$$Q_i(\theta) = 1 - P_i(\theta)$$

Função de informação do item para o modelo de Rasch/1LP

- O máximo dessa função ocorre quando $P_i(\theta) = Q_i(\theta)$;
- Para o modelo de Rasch/1LP o valor máximo de $I_i(\theta)$ é 0,25;
- Para o modelo de um parâmetro,

$$I_i(\theta) = a_i^2 P_i(\theta) Q_i(\theta)$$

- Observe que, no modelo de 1LP, quanto maior o coeficiente de discriminação, maior será a informação fornecida pelo item!

Função de informação do item para o modelo 3LP

- Para o modelo de 3 parâmetros,

$$I_i(\boldsymbol{\theta}) = a_i^2 \frac{Q_i(\boldsymbol{\theta})}{P_i(\boldsymbol{\theta})} \left[\frac{P_i(\boldsymbol{\theta}) - c_i}{1 - c_i} \right]$$

Função de informação do item:

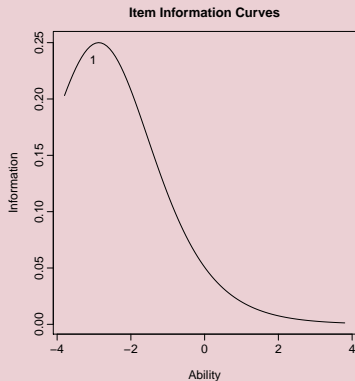


Figura 3 : Função de informação do item para o exemplo LSAT: item 1.

Função de informação do item:

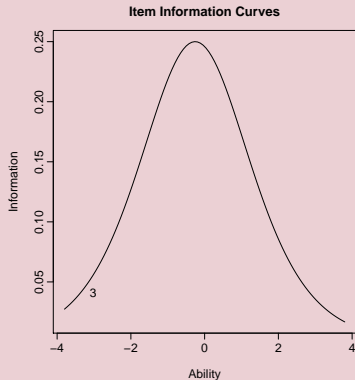


Figura 4 : Função de informação do item para o exemplo LSAT item 3.

Função de informação do teste:

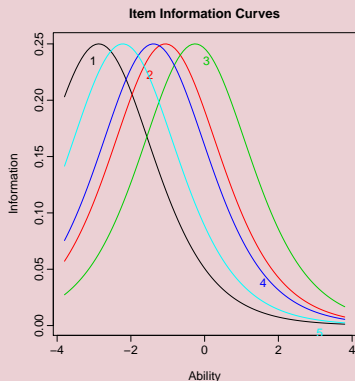


Figura 5 : Função de informação do item para o exemplo LSAT: todos os itens.

Função de informação do item para o modelo de Rasch/1LP

- Utilizada para o planejamento do teste/instrumento;
- Escolha dos itens de acordo com a habilidade dos respondentes;
- Provas com itens mais fáceis ou mais difíceis;

Função de informação do Teste

- É a soma das informações fornecidas por cada item;
-

$$I_i(\theta) = \sum_{i=1}^I I_i(\theta)$$

Função de informação do teste:

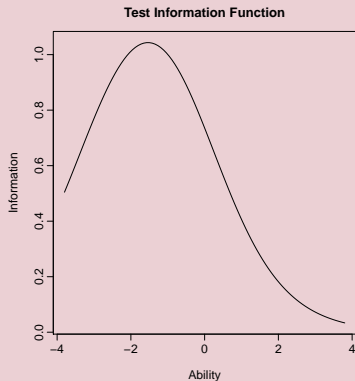


Figura 6 : Função de informação do Teste para o exemplo LSAT.

Função de informação do teste:

- Quanto maior o número de itens, maior será a informação sobre a proficiência ou habilidade obtida pelo teste/instrumento.

Erro padrão de estimação

- Forma alternativa de representar a função de informação do teste;

-

$$EP(\theta) = \frac{1}{\sqrt{I(\theta)}}$$

Erro padrão de estimação:

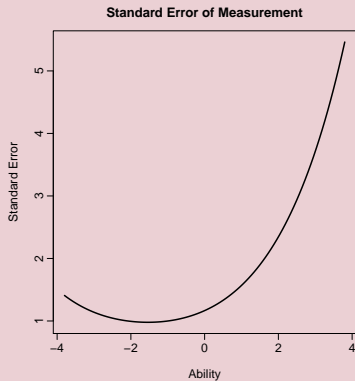


Figura 7 : Erro de medida para o exemplo LSAT.