

# Teorias de Avaliação - CE095

Adilson dos Anjos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Estatística  
Universidade Federal do Paraná  
aanjos@ufpr.br

Curitiba, PR  
9 de setembro de 2014

# Teoria da Resposta ao Item –Ideias sobre estimação–

Suposições sobre o modelo (Rasch e 1 LP)

#### Forma da função:

- Os dados devem seguir a forma da função (*logit* ou *probit*);
- No caso da função logística a forma de 'S';
- Verificar o *ajuste do modelo*;

### Método da máxima verossimilhança

Modelo de Rasch:

$$P(X = x_{ij} | \theta, b_i) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta - b_i)}}$$

$a = 1$  para qualquer item.

Modelo de 1LP:  $a$  é estimado mas, é o mesmo para qualquer item!!

### Método da máxima verossimilhança

Estimando  $\theta$  de um indivíduo:

Na prática, nem os parâmetros dos itens e nem os parâmetros dos indivíduos ( $\theta$ ) são conhecidos;

### Método da máxima verossimilhança

Considere um conjunto de 5 itens com os seguintes parâmetros  $b_i$ :

$$b_1 = -1,9$$

$$b_2 = -0,6$$

$$b_3 = -0,25$$

$$b_4 = 0,30$$

$$b_5 = 0,45$$

### Método da máxima verossimilhança

Suponha que um indivíduo tenha o seguinte **PADRÃO** de respostas:

11000

Ou seja, o indivíduo acertou os dois primeiros itens e errou os 3 últimos;

A pergunta é:

Qual é o valor de  $\theta$  que possui a maior verossimilhança de produzir esse padrão de resposta?

### Método da máxima verossimilhança

Dado o modelo (Rasch):

$$P(X = x_{ij} | \theta, b_i) = \frac{1}{1 + e^{-a(\theta - b_i)}}$$

pode-se obter a probabilidade de cada resposta.



### Método da máxima verossimilhança

Considere uma habilidade  $\theta = -3.0$ .

$$P(x_1 = 1 | \theta = -3.0, b_1 = -1,9) = 0,2497$$

e

$$P(x_1 = 1 | \theta = -3.0, b_2 = -0.6) = 0,0832$$

### Método da máxima verossimilhança

Para o item 5, ou seja, deve-se obter a probabilidade de uma resposta incorreta.

$$\begin{aligned}P(x_5 = 0 | \theta = -3.0, b_5 = 0.45) &= 1 - P(x_5 = 1 | \theta = -3.0, b_5 = 0.45) \\ &= 1 - 0,0308 \\ &= 0,9692\end{aligned}$$

Observe a coerência das probabilidades estimadas para um indivíduo com proficiência  $\theta = -3.0$ .

### Método da máxima verossimilhança

Dado a independência dos itens, para um indivíduo com proficiência  $\theta = -3,0$  a verossimilhança de observar o padrão de respostas 11000 é dado por:

$$P(x_1 = 1) \times P(x_2 = 1) \times P(x_3 = 0) \times P(x_4 = 0) \times P(x_5 = 0) \\ = 0,2497 \times 0,0832 \times 0,9399 \times 0,9644 \times 0,9692 = 0,0182$$

Essa é a probabilidade para um indivíduo com  $\theta = -3,0$ .

### Método da máxima verossimilhança

- Essas probabilidades devem ser obtidas para vários valores de  $\theta$ .
- Por exemplo, pode-se obter para valores de  $\theta$  variando entre -3 e 3.
- Para esse conjunto de valores utiliza-se a *Função de verossimilhança*.
- O objetivo é encontrar o valor máximo dessa função.
- A localização desse ponto determina o valor de  $\hat{\theta}$  que seria mais provável produzir o padrão de respostas 11000 utilizando o modelo de Rasch e esses parâmetros de itens;

### Método da máxima verossimilhança

A função de verossimilhança pode ser construída da seguinte maneira:

$$L(\underline{x}_i | \boldsymbol{\theta}, b_i) = \prod_{j=1}^L p_j^{x_{ij}} (1 - p_j)^{(1-x_{ij})}$$

em que

$\underline{x}_i$  é um vetor de respostas

$$p_j = P(x_{ij} = 1 | \boldsymbol{\theta}, b_i)$$

$x_{ij}$  é a resposta do indivíduo  $i$  ao item  $j$

$L$  é o número de itens do instrumento

$b_i$  é o parâmetro de locação

## Método da máxima verossimilhança

O log da verossimilhança é

$$\log L(\underline{x}_i | \boldsymbol{\theta}, b_i) = \sum_{j=1}^L (x_{ij} \log(p_j) + (1 - x_{ij}) \ln(1 - p_j))$$

Ver exemplo no R.

### Método da máxima verossimilhança

- O máximo dessa função, para valores de *theta* variando entre -3 e 3 é aproximadamente  $\hat{\theta} = -0,85$ ;
- Observe que para qualquer outro padrão de respostas, com  $x = 2$  obtém-se o mesmo  $\hat{\theta}$  (considerando o modelo de Rasch).

### Método da máxima verossimilhança

- O que acontece para padrões de resposta onde não há acertos ou onde todos os itens foram respondidos corretamente?
- Não há *máximo*!!
- Há outros métodos de estimação.
- **Cuidado:** ver método de estimação do software utilizado.
- Importante para comparação de resultados
- Por exemplo, o INEP utiliza o BILOG-MG.