
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

CURSO
PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS II
(Notas de Aula)

PROF. ADILSON DOS ANJOS

Curitiba, 13 de agosto de 2004

Sumário

1	Experimentos fatoriais	4
1.1	Introdução	4
1.2	Instalação do experimento	7
1.3	Estimativas dos efeitos	7
1.4	Modelo estatístico - 2 Fatores	10
1.4.1	Suposição de não interação	13
1.5	Teste de comparações múltiplas	13
1.6	Estimação dos efeitos dos parâmetros do modelo	13
1.7	Pressuposições sobre o modelo	14
1.8	Exemplo: Análise de variância de um experimento fatorial 2 x 3, com interação significativa	14
1.8.1	Obtenção da análise de variância	16
1.8.2	Teste de comparações múltiplas	18
1.9	Resultados do R.	21
1.10	Análise e interpretação de um experimento fatorial 2^3	24
1.11	Planejamento de um experimento:	30
1.12	Planejamento de um experimento:	31
2	Experimentos Hierárquicos	32
2.1	Introdução	32
2.2	Modelo estatístico	33
2.3	Exemplo: Fornecedores de matéria prima	34
2.4	Exercício	36
2.5	Exemplo de um experimento com fatores cruzados e aninhados.	37
2.5.1	Modelo estatístico	37

2.6	Planejamento de um experimento	41
2.7	Planejamento de um experimento:	42
3	Método de Hicks para encontrar as E(QM)	43
3.1	Algoritmo de Hicks	43
3.2	Exemplo	44
3.3	Exercício	47
4	Parcelas subdivididas (Split-plot)	49
4.1	Introdução	49
4.2	Modelo estatístico	50
4.3	Quadro da ANOVA e E(QM).	51
4.4	Exemplo: Produção de aveia.	51
4.4.1	Desdobramento dos graus de liberdade	53
4.4.2	Comparação de médias	56
4.5	Planejamento de um experimento:	58
5	Experimentos em faixas	59
5.1	Introdução	59
5.2	Modelo estatístico	60
5.3	Comparações múltiplas	63
5.4	Exemplo: Dados de produção de milho em Kg/ha.	64
6	Análise de Grupos de Experimentos	66
6.1	Introdução	66
6.2	Exemplo: Experimentos de competição de variedades de milho	68
6.2.1	Análise conjunta	70
6.3	Exercício	73

<i>Planejamento de Experimentos II - Adilson dos Anjos</i>	3
7 Análise de covariância (ANCOVA)	74
7.1 Introdução	74
7.2 Modelo estatístico	75
7.3 Exemplo:	77
8 TABELAS	81

1 Experimentos fatoriais

1.1 Introdução

Os experimentos fatoriais são aqueles que consideram as combinações entre dois ou mais **grupos de tratamentos ou fatores**. Normalmente, tem-se de 2 a 3 fatores, cada um com diferentes **níveis**. Por exemplo, um fator poderia ser temperatura de cozimento e outro fator poderia ser tipo de embalagem. Cada um destes fatores teria mais de um nível, ou seja, várias temperaturas e vários tipos de embalagem.

Quando todas as combinações possíveis estão presentes no experimento, tem-se um experimento fatorial completo, caso contrário, tem-se um experimento fatorial incompleto ou fracionário.

Em um experimento, quando os níveis de diferentes fatores são combinados, é possível determinar se existe **interação** entre os níveis de diferentes fatores. Quando ocorre a interação, pode-se então, estudar o comportamento de cada fator dentro de níveis do outro fator através da decomposição da soma de quadrados na análise de variância.

Os experimentos conduzidos num esquema fatorial permitem que se façam inferências sob vários aspectos, por exemplo, determinar qual combinação de níveis de fatores temperatura e tipo de embalagem fornece o maior tempo de conservação do alimento, citando o exemplo acima.

Um experimento fatorial pode ser conduzido tanto num delineamento completamente casualizado quanto em blocos casualizados ou em quadrado latino, entre outros. Um experimento fatorial não constitui por si só um delineamento. Ele é apenas uma forma de arranjo dos tratamentos no experimento.

O número de fatores em um experimento depende das causas que podem estar afetando a variável resposta. Quando tem-se um número muito grande de fatores ou níveis de fatores, as combinações aumentam muito, dificultando, às vezes, a instalação do experimento.

Quando utiliza-se três fatores ou mais, a interpretação da interação tripla ou ordem superior torna-se difícil de ser interpretada.

Algumas definições:

Fator: uma causa de variação conhecida e de interesse do pesquisador (um tipo de tratamento).

Nível: uma subdivisão do fator. Pode ser quantitativo ou qualitativo.

Na tabela 1, são apresentados alguns tipos de fatores e tipos de níveis.

Tabela 1: Exemplos de fatores e níveis		
Fator	Nível	
Temperatura	$\neq$ temperaturas	quantitativo
Produto	$\neq$ marcas	qualitativo
Droga	$\neq$ doses	quantitativo

Notação

Admita um experimento com dois fatores, A e B, com 4 e 3 níveis respectivamente. Teremos 12 combinações possíveis ou 12 tratamentos. A tabela 2 mostra a forma de designação de fatores e níveis de um experimento fatorial:

Tabela 2: Exemplo: Notação de um experimento fatorial

Fator	Níveis			
A	A_1	A_2	A_3	A_4
B	B_1	B_2	B_3	

Onde cada combinação de níveis de diferentes fatores constitui um tratamento:

$$\begin{array}{cccc}
 A_1B_1 & A_2B_1 & A_3B_1 & A_4B_1 \\
 A_1B_2 & A_2B_2 & A_3B_2 & A_4B_2 \\
 A_1B_3 & A_2B_3 & A_3B_3 & A_4B_3
 \end{array}$$

Quando cada nível de um fator combina (*cruza*) com cada nível de outro(s) fator(es) temos um experimento fatorial de classificação cruzada. Será apresentado no decorrer do texto, que pode ocorrer em um experimento fatorial o caso onde nem todos os níveis de um fator cruzam com outros níveis de outro fator, onde dizemos que o experimento é de classificação hierárquica.

A estrutura de classificação cruzada permite estabelecer os seguintes efeitos:

- **Efeito Principal:** pode-se estudar isoladamente o efeito de cada fator no experimento;

- **Efeito da Interação:** quando existir, pode-se estudar o comportamento de cada fator, na presença ou ausência de níveis dos demais fatores. A interação ocorre somente entre níveis de diferentes fatores.

Quando ocorre interação, não é correto interpretar ou estudar os efeitos principais isoladamente. Deve-se estudar o efeito de um fator na presença de cada um dos níveis do outro fator.

Notação de efeitos principais e efeito da interação:

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow \text{Fator } A \\ B \rightarrow \text{Fator } B \end{array} \right\} = \text{Efeitos Principais}$$

$$\left. \begin{array}{l} A * B \\ A \times B \\ AB \end{array} \right\} = \text{Interação entre o Fator } A \text{ e o Fator } B$$

$A(B_1) \rightarrow$ efeito de A dentro do nível B_1 (hierárquica)

Os experimentos fatoriais podem ser representados em função do número de fatores e em função do número de níveis, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 & \rightarrow \text{dois fatores, cada um com dois níveis} \\ 4 \times 3 & \rightarrow \text{dois fatores, um com 4 níveis e outro com 3 níveis} \\ 4 \times 3 \times 2 & \rightarrow \text{três fatores, com 4, 3 e 2 níveis, respectivamente} \end{array}$$

Quando o número de níveis é igual, para todos os fatores, pode-se usar a seguinte notação:

$$2 \times 2 = 2^2 \rightarrow \text{expoente=número de fatores} \rightarrow \text{base=número de níveis}$$

$$3 \times 3 \times 4 = 3^2 \times 4$$

Em geral, para níveis quantitativos, pode-se denotar A_0 como ausência e A_1 como presença. Exemplo: $A_0 = 0$ Kg, $A_1 = 5$ Kg e $A_2 = 10$ Kg.

1.2 Instalação do experimento

Para instalação do experimento, basta apenas considerar cada combinação de níveis de diferentes fatores como um tratamento e realizar o sorteio, implantação e condução como se estivesse realizando um experimento com apenas um fator.

É através da ANOVA que os efeitos de cada fator serão isolados e estudados.

1.3 Estimativas dos efeitos

Considere um experimento com dois fatores (A e B) cada um com dois níveis (a_1, a_2 e b_1, b_2), no seguinte arranjo (Tabela 3):

Tabela 3: Efeitos no modelo de classificação cruzada.

FATOR	A				
	nível	a_1	a_2	$\bar{x}$	$a_2 - a_1$
B	b_1	$a_1b_1 = 30$	$a_2b_1 = 32$	31	2 (efeito simples de A(B_1))
	b_2	$a_1b_2 = 36$	$a_2b_2 = 44$	40	8
	$\bar{x}$	33	38	35,5	5 (efeito principal)
	$b_2 - b_1$	6	12	9	

Aqui, os efeitos simples de cada fator, são estimados dentro de cada nível do outro fator da seguinte forma:

$$A(b_1) = (a_2b_1 - a_1b_1) \quad (1)$$

$$A(b_2) = (a_2b_2 - a_1b_2) \quad (2)$$

No exemplo

$$A(b_1) = (32 - 30) = 2 \quad \text{efeito simples de A}(b_1)$$

$$A(b_2) = (44 - 36) = 8$$

Os efeitos principais (média dos efeitos simples, de cada fator) podem ser determinados por

$$A = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_1)] \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_2b_1) + (a_1b_2 - a_1b_1)] \quad (4)$$

No exemplo,

$$A = \frac{1}{2}[(44 - 36) + (32 - 30)] = \frac{1}{2}[8 + 2] = 5$$

$$B = \frac{1}{2}[(36 - 30) + (44 - 32)] = \frac{1}{2}[6 + 12] = 9$$

Ou seja, o efeito principal de um fator é a média dos efeitos simples do mesmo fator.

Interação

Quando os efeitos simples de um mesmo fator são diferentes na presença de níveis de outro fator, diz-se que existe interação entre níveis dos fatores A e B.

A interação é definida por:

$$AB = \frac{1}{2}[(a_2b_2 - a_1b_2) - (a_2b_1 - a_1b_1)] \quad (5)$$

$$BA = \frac{1}{2}[(b_2a_2 - b_1a_2) - (b_2a_1 - b_1a_1)] \quad (6)$$

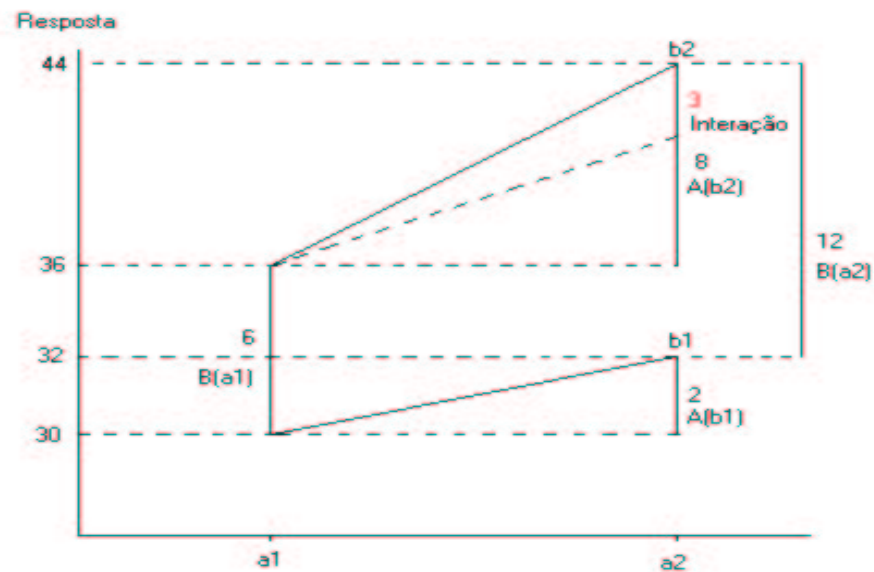
No exemplo,

$$AB = \frac{1}{2}[(44 - 36) - (32 - 30)] = \frac{1}{2}[8 - 2] = 3$$

$$BA = \frac{1}{2}[(44 - 32) - (36 - 30)] = \frac{1}{2}[12 - 6] = 3$$

Graficamente pode-se visualizar os efeitos da seguinte forma:

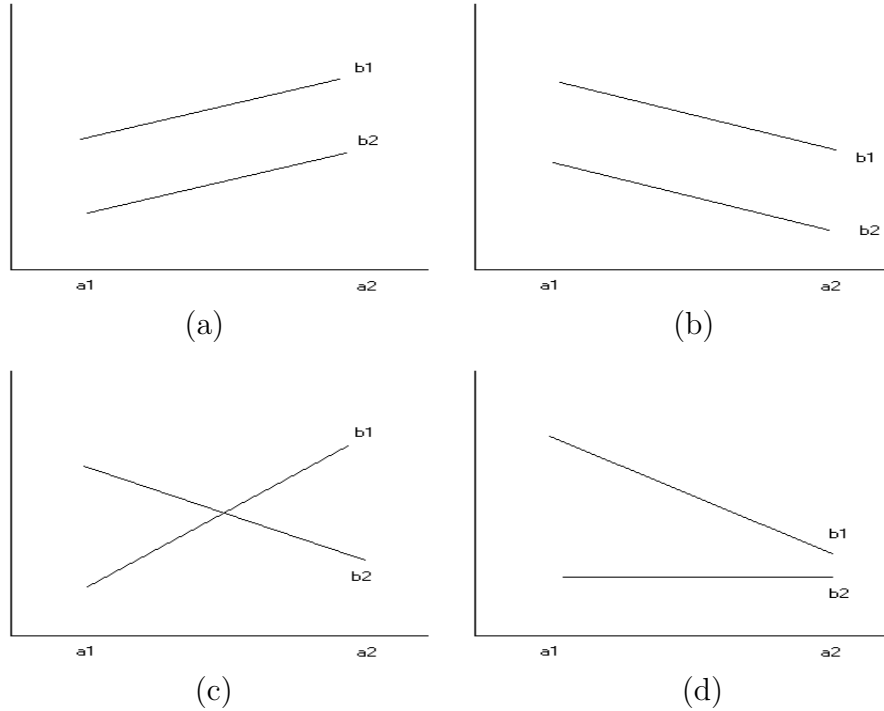
Figura 1: Exemplo de um gráfico de interação.



Os gráficos de interação podem apresentar diferentes comportamentos. Em geral, quando as retas são paralelas, é sinal de que não existe interação. Quando as retas se cruzam ou não são paralelas, pode ser que exista interação. Tudo depende da magnitude da interação e do erro experimental. Nem sempre, retas cruzadas indicam interação.

Na figura 2 são apresentados alguns exemplos de comportamento de gráficos de interação:

Figura 2: Exemplos de gráficos de interação.



1.4 Modelo estatístico - 2 Fatores

Para um experimento fatorial com 2 fatores, em um delineamento completamente casualizado, o modelo estatístico é dado da seguinte forma:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

onde

μ = constante;

α_i = efeito do i-ésimo nível do fator A; $i=1, \dots, a$

β_j = efeito do j-ésimo nível do fator B; $j=1, \dots, b$

$(\alpha\beta)$ = efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator A e j-ésimo nível do fator B;

ϵ_{ijk} = erro associado ao i-ésimo nível do fator A, j-ésimo nível do fator B e a k-ésima repetição; $k=1, \dots, r$

Para os erros, pressupõe-se que

$$\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

O Quadro da análise de variância (4) é construído da seguinte forma:

Tabela 4: Quadro da Análise de Variância para um experimento fatorial com 2 fatores de efeitos fixos.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	a-1	SQA	SQA/a-1	QMA/QMRes
B	b-1	SQB	SQB/B-1	QMB/QMRes
AB	(a-1)(b-1)	SQAB	SQAB/(a-1)(b-1)	QMAB/QMRes
Resíduo	ab(r-1)	por diferença	SQRes/ab(r-1)	
Total	abr-1	SQtotal		

Para o cálculo das Somas de Quadrados, tem-se as seguintes expressões:

$$SQ_{Total} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^r y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQA = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQB = \sum_{j=1}^b \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abr}$$

$$SQAB = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abr} - SQA - SQB$$

$$SQRes^1 = SQ_{Total} - SQA - SQB - SQAB$$

As hipóteses testadas para cada fator dependem do efeito considerado, se fixo ou aleatório.

No caso de efeitos **fixos**, as hipóteses testadas serão as seguintes:

Fator A:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Fator B:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \quad \forall j$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j'} \quad \text{para pelo menos um par } j \neq j'$$

Interação AB

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

No caso de efeitos **aleatórios**, as hipóteses testadas serão as seguintes:

Fator A:

$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0$$

Fator B:

$$H_0 : \sigma_\beta^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\beta^2 > 0$$

Interação AB

$$H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

Em resumo, as Esperanças dos Quadrados Médios estão na tabela 5. Em um modelo estatístico com dois ou mais fatores, podem existir modelos de efeitos fixos e aleatórios. Neste caso, dizemos que o modelo é de efeitos mistos.

Quando ocorre interação entre um fator de efeito fixo e um fator de efeito

aleatório, diz-se que o efeito da interação é aleatório.

Tabela 5: Esperança de Quadrados médios para um experimento com 2 fatores.

Causas de Variação	GL	Efeito Fixo Modelo I	Efeitos Aleatórios Modelo II
A	a-1	$\sigma^2 + br \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + br\sigma_\alpha^2$
B	b-1	$\sigma^2 + ar \frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + ar\sigma_\beta^2$
AB	(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + r \frac{\sum (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2$
Resíduo	ab(r-1)	σ^2	σ^2

1.4.1 Suposição de não interação

Em certas situações, o pesquisador pode considerar, por experiência, a não existência da interação entre os fatores na modelagem dos dados.

Se existir de fato interação significativa, as conclusões sobre o experimento podem estar equivocadas. Em geral, pode-se considerar este componente no modelo e avaliar a significância através do *valor p*.

1.5 Teste de comparações múltiplas

Os testes de comparações múltiplas anteriormente estudados (Tukey, Duncan, SNK), podem ser convenientemente aplicados também para os experimentos fatori-ais, levando em conta que:

1. Se a interação for **não significativa** :
Comparar médias entre níveis do fator(es) significativo(s);
2. Se a interação for **significativa**:
Comparar níveis de um fator dentro de um nível do outro fator (correspondente à interação significativa)

1.6 Estimação dos efeitos dos parâmetros do modelo

Dado o modelo

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

pode-se encontrar os estimadores dos efeitos dos parâmetros utilizando o método dos mínimos quadrados. A demonstração é omitida nestas notas.

1.7 Pressuposições sobre o modelo

Assim como em experimentos com um fator, o modelo de análise de variância deve seguir as pressuposições a respeito dos resíduos, que pode ser resumida por

$$\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

A normalidade dos resíduos pode ser avaliada através de testes, como o de Shapiro-Wilk ou Lilliefors ou através de um gráfico normal de probabilidade.

A homocedasticidade também deve ser verificada neste tipo de modelo. Nesse caso, deve-se avaliar a homocedasticidade dos resíduos em relação a cada um dos fatores do modelo. Faz-se a análise gráfica por meio do gráfico dos resíduos *vs* níveis do fator. Se ocorre a homocedasticidade, os resíduos devem ter a mesma amplitude de variação em todos os níveis do fator.

A independência dos resíduos pode ser avaliada através de um gráfico dos resíduos *vs* valores preditos pelo modelo. Em um gráfico, estes resíduos devem estar distribuídos de forma aleatória. A independência é garantida pela aleatorização dos tratamentos e pela forma de condução e/ou obtenção de dados do experimento.

1.8 Exemplo: Análise de variância de um experimento fatorial 2 x 3, com interação significativa

O experimento a seguir (6) refere-se a um estudo de mudas de Eucalipto onde foi estudado o crescimento (cm) de duas espécies (E1 e E2) em três tipos de recipientes (R1,R2,R3). O delineamento utilizado foi o completamente casualizado com 4 repetições.

Tabela 6: Crescimento de mudas de Eucalipto (cm): E=espécies e R=recipientes.

Tratamentos	Repetições				Total
	I	II	III	IV	
R1E1	26,2	26,0	25,0	25,4	102,6
R1E2	24,8	24,6	26,7	25,2	101,3
R2E1	25,7	26,3	25,1	26,4	103,5
R2E2	19,6	21,1	19,0	18,6	78,3
R3E1	22,8	19,4	18,8	19,2	80,2
R3E2	19,8	21,4	22,8	21,3	85,3
Total					551,2

Para este experimento, considera-se o modelo

$$y_{ijk} = \mu + R_i + E_j + (RE)_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (7)$$

com

i=1,2,3; j=1,2; k=1,2,3,4 (repetições)

e os efeitos de espécies e recipientes como sendo fixos.

As hipóteses testadas neste experimento são as seguintes:

RECIPIENTES (fator A):

$$H_0 : R_1 = R_2 = R_3$$

$$H_1 : R_i \neq R_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

ESPÉCIES (fator B):

$$H_0 : E_1 = E_2$$

$$H_1 : E_1 \neq E_2$$

Interação RE (AB):

$$H_0 : (RE)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (RE)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

1.8.1 Obtenção da análise de variância

Para calcular as somas de quadrados dos fatores, é necessário obter um quadro auxiliar (Tabela 7):

Tabela 7: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados.

	R1	R2	R3	Total
E1	102,6	103,5	80,2	286,3
E2	101,3	78,3	85,3	264,9
Total	203,9	181,8	165,5	551,2

$$C = \frac{(\sum_{i,j,k}^{3,2,4} y_{ijk})^2}{3 \times 2 \times 4} = \frac{(551,2)^2}{24} = 12.659,23$$

$$SQ_{Total} = \sum_{ijk} y_{ijk}^2 - C = (26,2^2 + \dots + 21,3^2) - C = 198,79$$

$$SQ_{Recipientes} = \frac{\sum_i y_{i..}^2}{JK} - C = \frac{(203,9^2 + 181,8^2 + 165,5^2)}{8} - C = 92,86$$

$$SQ_{Espécies} = \frac{\sum_j y_{.j.}^2}{IK} - C = \frac{(286,3^2 + 264,9^2)}{12} - C = 19,08$$

$$SQ_{R \times E} = \frac{\sum_{ij} y_{ij.}^2}{K} - SQ_{Recipientes} - SQ_{Espécies} - C = \frac{(102,6^2 + \dots + 85,3^2)}{4} - SQ_{Recipientes} - SQ_{Espécies} - C = 63,76$$

O Quadro da ANOVA fica da seguinte forma:

Tabela 8: Quadro da Análise de Variância para o experimento com mudas de Eucalipto.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Recipientes	2	92,86	46,43	36,27**
Mudas	1	19,08	19,08	14,91**
R × E	2	63,76	31,88	24,91**
Resíduo	18	23,09	1,28	
Total	23	198,79		

F tabelado:

$$F_{0,05}(2; 18) = 3,55$$

$$F_{0,01}(2; 18) = 6,01$$

$$F_{0,05}(1; 18) = 4,41$$

$$F_{0,01}(1; 18) = 8,29$$

Conclusão:

Recipientes: De acordo com o teste F existe diferença significativa, ao nível de 1% de significância entre níveis do fator Recipiente, considerando a variável altura média das mudas.

Espécies: De acordo com o teste F, existe diferença significativa, ao nível de 1% de significância, entre níveis do fator Espécie, considerando a variável altura média das mudas.

Interação R x E: De acordo com o teste F, existe interação significativa entre os níveis dos fatores Recipientes e Espécies, ao nível de significância de 1%, ou seja, a altura média das mudas de Eucalipto no recipiente i depende da espécie j (e vice-versa).

Dado que a interação foi significativa, não é possível estudar isoladamente os efeitos dos fatores Recipientes ou Espécies. O procedimento seguinte é realizar o desdobramento dos Graus de liberdade da Interação e efeitos principais para estudar o comportamento das espécies dentro de cada recipiente (E(R)) e/ou o comportamento de crescimento das mudas nos Recipientes em função da Espécie utilizada.

O procedimento consiste em uma Análise de variância dos efeitos principais mais a interação entre os fatores envolvidos na interação significativa. Para construir esta análise de variância, utiliza-se o Quadro Auxiliar (Tabela 7).

1. Desdobramento dos GL da interação $R \times E$ para estudar o comportamento de espécies dentro de cada recipiente (Tabela 9):

Obtenção das Somas de Quadrados:

$$SQ_{\text{Espécies d. R1}} = \frac{(102,6^2 + 101,3^2)}{4} - \frac{(203,9)^2}{8} = 0,21$$

$$SQ_{\text{Espécies d. R2}} = \frac{(103,5^2 + 78,3^2)}{4} - \frac{(181,8)^2}{8} = 79,38$$

$$SQ_{\text{Espécies d. R3}} = \frac{(80,2^2 + 85,3^2)}{4} - \frac{(165,5)^2}{8} = 3,25$$

2. Desdobramento dos GL da interação $R \times E$ para estudar o comportamento de Recipientes dentro de Espécies (Tabela 10):

Tabela 9: Estudo do comportamento de espécies dentro de cada recipiente.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Espécies d. R1	1	0,21	0,21	0,16 ns
Espécies d. R2	1	79,38	79,38	62,02**
Espécies d. R3	1	3,25	3,25	2,54 ns
Resíduo	18	23,09	1,28	

Tabela 10: Estudo do comportamento de Recipientes dentro de Espécies.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Recipientes d. E1	2	87,12	43,56	34,03**
Recipientes d. E2	2	69,5	34,75	27,15**
Resíduo	18	23,09	1,28	

Obtenção das Somas de Quadrados:

$$SQ_{\text{Recipientes d. E1}} = \frac{(102,6^2 + 103,5^2 + 80,2^2)}{4} - \frac{(286,3)^2}{12} = 87,12$$

$$SQ_{\text{Recipientes d. E2}} = \frac{(101,3^2 + 78,3^2 + 85,3^2)}{4} - \frac{(264,9)^2}{12} = 69,5$$

1.8.2 Teste de comparações múltiplas

Os testes de comparações múltiplas são realizados de acordo com o fator que se deseja estudar. O erro padrão da média varia conforme o número de níveis.

Assim, tem-se os seguintes erros padrões para

1. Comparar níveis do fator A

$$\sqrt{\frac{QMRes}{br}}$$

2. Comparar níveis do fator B

$$\sqrt{\frac{QMRes}{ar}}$$

3. Comparar níveis de um fator dentro de outro (interação)

$$\sqrt{\frac{QMRes}{r}}$$

O valor de q é obtido na tabela de Tukey em função do número de níveis e do número de graus de liberdade do resíduo para um determinado nível de significância α .

Para o exemplo atual, aplicando-se o teste de Tukey, por exemplo, tem-se

$$\Delta = q \sqrt{\frac{QM_{res}}{r}}$$

$$\Delta_{0,05} = 3,61 \sqrt{\frac{1,28}{4}} = 2,06cm$$

onde q é obtido com (3, 18) (3 níveis e 18 graus de liberdade do resíduo).

Como neste exemplo a interação é significativa não pode-se estudar os efeitos isoladamente. **Recipientes d. E1**

$\overline{R1E1}$	25,65	a
$\overline{R2E1}$	25,88	a
$\overline{R3E1}$	20,05	b

Interpretação: de acordo com o teste de Tukey, ao nível de significância de 5%, a altura média das mudas de Eucalipto é maior quando as mudas da espécie 1 são plantadas nos recipientes 1 e 2.

Recipientes d. E2

$\overline{R1E2}$	25,33	a
$\overline{R2E2}$	19,58	b
$\overline{R3E2}$	21,33	b

Interpretação: de acordo com o teste de Tukey, ao nível de significância de 5%, a altura média das mudas de Eucalipto é maior quando as mudas da espécie 2 são plantadas no recipiente 1.

Uma sugestão para representação dos resultados dos testes de comparações múltiplas seria na forma de uma tabela (tabela 11):

Médias seguidas por **letras minúsculas** iguais na **linha**, não diferem estatisticamente entre si, pelo teste de Tukey, ao nível de 5% de significância, para a variável altura em cm.

Tabela 11: Resultado do teste de Tukey para comparações múltiplas para o experimento de crescimento de mudas de Eucalyptus. Os valores representam as médias em cm.

	R1	R2	R3
E1	25,65aA	25,88aA	20,05bA
E2	25,33aA	19,58bB	21,33bA

Médias seguidas por **letras maiúsculas** iguais na **coluna**, não diferem estatisticamente entre si, pelo teste de Tukey, ao nível de 5% de significância, para a variável altura em cm.

1.9 Resultados do R.

```

      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
rec     2  92.861   46.430   36.195 4.924e-07 ***
esp     1  19.082    19.082   14.875 0.001155 **
rec:esp   2  63.761    31.880   24.853 6.635e-06 ***
Residuals 18  23.090     1.283
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Figura 3: QQ-Plot - Experimento fatorial 3 x 2.

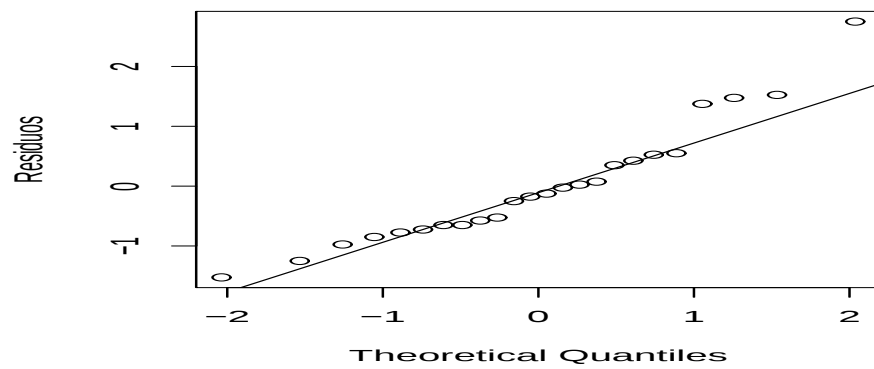


Figura 4: Resíduos x Recipientes - Experimento fatorial 3 x 2.

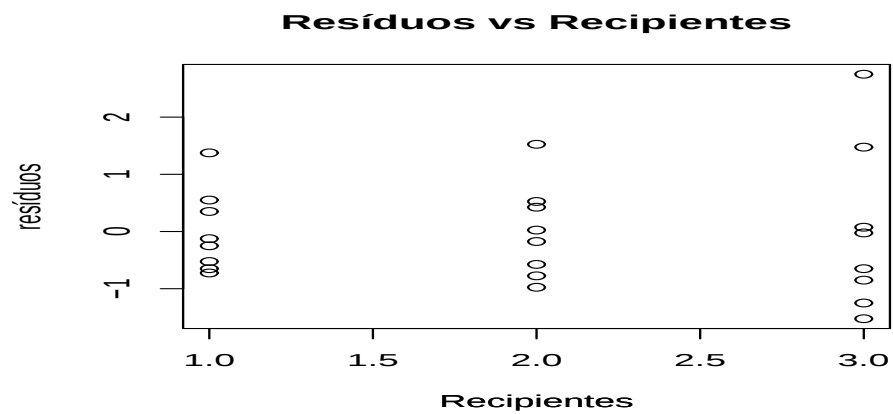


Figura 5: Resíduos x espécies - Experimento fatorial 3 x 2.

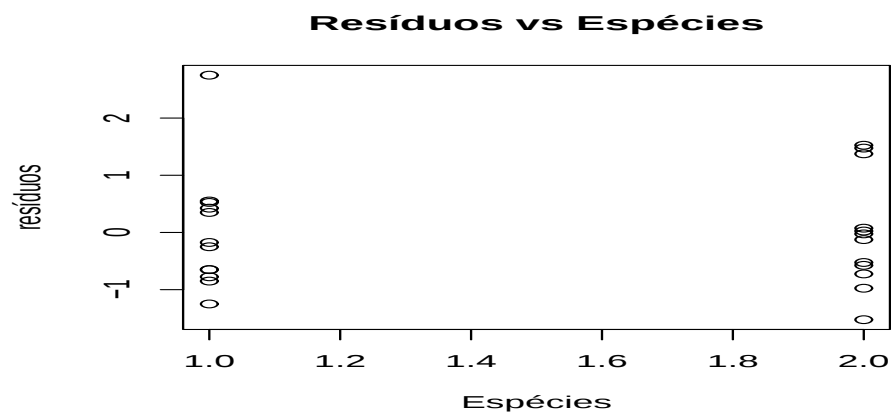


Figura 6: Dependência - Experimento fatorial 3 x 2.

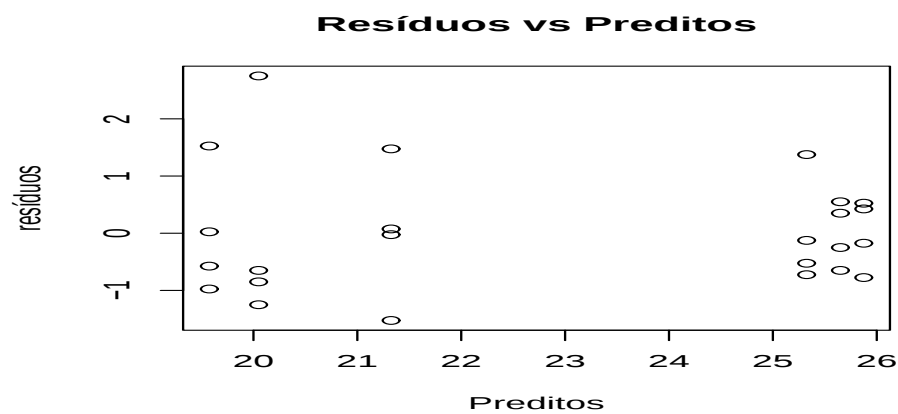


Figura 7: Interação - Experimento fatorial 3 x 2.

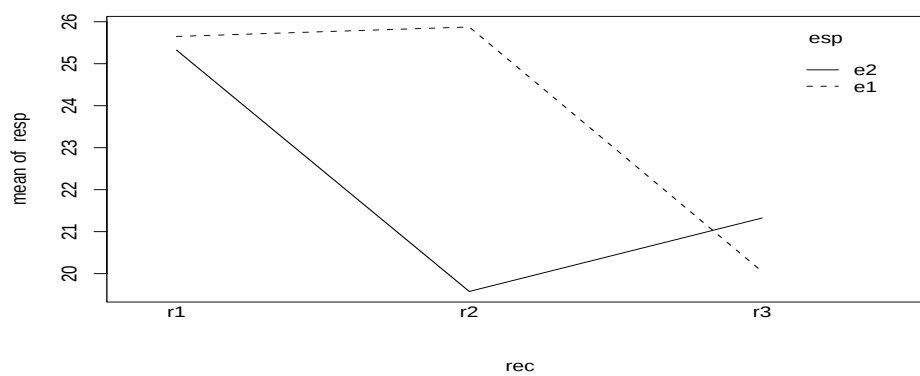
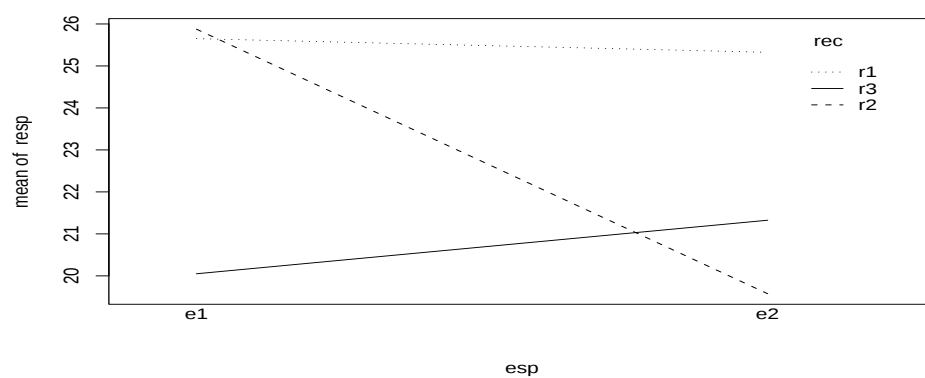


Figura 8: Interação - Experimento fatorial 3 x 2.



1.10 Análise e interpretação de um experimento fatorial ²³

Para um experimento com 3 fatores, conduzido no delineamento em blocos completos casualizados, o modelo de interação pode ser convenientemente construído da seguinte forma:

$$y_{ijkl} = \mu + \rho_l + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \quad (8)$$

com

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, a \text{ ou } I \\ j &= 1, \dots, b \text{ ou } J \\ k &= 1, \dots, c \text{ ou } K \\ l &= 1, \dots, d \text{ ou } r \end{aligned}$$

e

y_{ijkl} é a observação referente ao efeito do i -ésimo nível do fator α , j -ésimo nível do fator β , k -ésimo nível do fator γ , efeito da interação entre o i -ésimo nível do fator α e j -ésimo nível do fator β , efeito da interação entre $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ e $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$, efeito do l -ésimo bloco ρ_l , uma constante μ e ao erro ϵ_{ijkl} .

O quadro da análise de variância pode ser formado da seguinte maneira (tabela 12):

Tabela 12: Quadro da Análise de Variância para o experimento com 3 fatores em blocos completos (efeitos fixos).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	a-1	SQA	SQA/a-1	QMA/QMRes
B	b-1	SQB	SQB/b-1	QMB/QMRes
C	c-1	SQC	SQC/c-1	QMC/QMRes
AB	(a-1)(b-1)	SQAB	SQAB/(a-1)(b-1)	QMAB/QMRes
AC	(a-1)(c-1)	SQAC	SQAC/a-1)(c-1)	QMAC/QMRes
BC	(b-1)(c-1)	SQBC	SQBC/(b-1)(c-1)	QMBC/QMRes
ABC	(a-1)(b-1)(c-1)	SQABC	SQABC/(a-1)(b-1)(c-1)	QMABC/QMRes
Trat	(t-1)	SQTrat	SQTrat/(t-1)	QMTrat/QMRes
Blocos	(d-1)	SQBlocos	SQBlocos/(d-1)	QMBlocos/QMRes
Resíduo	diferença	SQRes	SQRes/	
Total	abcd-1	SQTotal		

As hipóteses testadas nesse modelo são as seguintes:

Fator A

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Fator B

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \quad \forall j$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } j \neq j'$$

Fator C

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k \quad \forall k$$

$$H_1 : \gamma_k \neq \gamma_{k'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } k \neq k'$$

Interação AB

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

Interação AC

$$H_0 : (\alpha\gamma)_{ik} = 0 \quad \forall i, k$$

$$H_1 : (\alpha\gamma)_{ik} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ik$$

Interação BC

$$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0 \quad \forall j, k$$

$$H_1 : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } jk$$

Interação ABC

$$H_0 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \quad \forall i, j, k$$

$$H_1 : (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um } trioi jk$$

Exemplo: Experimento de adubação de cafeeiro

Considere os dados de um experimento no delineamento em blocos completos casualizados com 6 repetições, no esquema fatorial $2 \times 2 \times 2$, no qual foi estudado o efeito da adubação mineral do cafeeiro, com Nitrogênio (N), Fósforo (P) e Potássio (K), cada fator em dois níveis: 0 (ausência) e 1 (presença). Cada parcela era constituída por 12 covas no espaçamento $3,5 \times 2,5\text{m}$, com uma área de 105 m^2 . Os dados obtidos para produção de café foram transformados para Kg/ha.

Tabela 13: Produção de café em kg/ha.

Tratamentos	Blocos						TOTAIS
	I	II	III	IV	V	VI	
$N_0P_0K_0$	3029	3857	2448	2448	3543	4314	19639
$N_1P_0K_0$	3362	3714	3429	3190	2686	4038	20419
$N_0P_1K_0$	3448	3600	3895	4267	3086	3657	21953
$N_0P_0K_1$	2438	3086	3771	4657	1962	3210	19124
$N_1P_1K_0$	4171	3114	4124	3981	3038	3590	22018
$N_1P_0K_1$	4905	6295	4924	4952	5381	5543	32000
$N_0P_1K_1$	3533	5048	3467	4095	1876	2895	20914
$N_1P_1K_1$	4476	4752	4848	4676	6829	3771	29352
TOTAIS	29362	33466	30906	32266	28401	31018	185419

Análise de Variância

Para o cálculo da Análise de Variância, utilizam-se os seguintes quadros auxiliares:

Tabela 14: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de N e P.

	P0	P1	Total
N0	38.763	42.867	81.630
N1	52.419	51.370	103.789
Total	91.182	94.327	185.419

Tabela 15: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de N e K.

	K0	K1	Total
N0	41.592	40.038	81.630
N1	42.437	61.352	103.789
Total	84.029	101.390	185.419

As somas de quadrados podem ser obtidas da seguinte forma:

Tabela 16: Quadro auxiliar para obtenção das Somas de Quadrados de P e K.

	K0	K1	Total
P0	40.058	51.124	91.182
P1	43.971	50.266	94.237
Total	84.029	101.390	185.419

$$C = \frac{(185.419)^2}{6 \times 8} = 716.254.283$$

$$SQ_{Total} = (3029^2 + \dots + 3771^2) - C = 49.845.226$$

$$SQ_{Trat} = \frac{(19.639^2 + \dots + 29.352^2)}{6} - C = 26.748.232$$

$$SQ_{Blocos} = \frac{(29.362^2 + \dots + 31.018^2)}{8} - C = 2.134.332$$

$$SQ_N = \frac{(81.630^2 + 103.789^2)}{24} - C = 10.229.610$$

$$SQ_P = \frac{(91182^2 + 94237^2)}{24} - C = 194.438$$

$$SQ_K = \frac{(84029^2 + 101390^2)}{24} - C = 6.279.256$$

$$SQ_{NP} = \frac{(38763^2 + \dots + 51370^2)}{12} - C - SQ_N - SQ_P = 553.196$$

$$SQ_{NK} = \frac{(41592^2 + \dots + 61352^2)}{12} - C - SQ_N - SQ_K = 8.728.749$$

$$SQ_{PK} = \frac{(40058^2 + \dots + 50266^2)}{12} - C - SQ_P - SQ_K = 474.218$$

$$SQ_{NPK} = SQ_{Trat} - SQ_N - SQ_P - SQ_K - SQ_{NP} - SQ_{NK} - SQ_{PK} = 288.765$$

O quadro da Análise de Variância resultará em:

Como a interação NK foi significativa, não pode-se estudar os efeitos principais isoladamente. Pode-se então, estudar o comportamento dos níveis de N na ausência e na presença de K (K0 e K1) e vice-versa. Neste caso, o efeito de P foi não significativo. Mas, se esse efeito fosse significativo, poderia ser estudado isoladamente, pois não ocorreu interação com nenhum outro fator do modelo.

Em geral basta apenas definir uma forma: AB ou BA. Lembre-se de que AB=BA. Mas, dependendo do modo como o *pesquisador* deseja visualizar o resultado, as vezes, a definição da ordem de apresentação pode ser importante. O estudo da interação pode ser realizado das seguintes maneiras.

1. Estudo de N na ausência e presença de K:

SQ_N na ausência de K (K0)

Tabela 17: Quadro da Análise de Variância para o experimento de adubação do cafeeiro, em um arranjo fatorial 2^3 conduzido no delineamento blocos completos casualizados (efeitos fixos).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
N	1	10.229.610	10.229.610	17,08**
P	1	194.438	194.438	0,32 NS
K	1	6.279.256	6.279.256	10,48**
NP	1	553.196	553.196	0,92 NS
NK	1	8.728.749	8.728.749	14,57**
PK	1	474.218	474.218	0,79NS
NPK	1	288.765	288.765	0,48 NS
(Trat	7	26.748.232		
Blocos	5	2.134.332		
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	
Total	47	49.845.226		

$$\text{SQN d. K0} = \frac{41592^2 + 42437^2}{12} - \frac{(84029)^2}{24} = 29.751,0416$$

SQN na presença de K (K1)

$$\text{SQN d. K1} = \frac{40038^2 + 61352^2}{12} - \frac{(101390)^2}{24} = 18.928.608,17$$

Tabela 18: Quadro da Análise de Variância para estudo de N na ausência e presença de K.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
SQN d. K0	1	29.751,0416	29.751,0416	0,05NS
SQN d. K1	1	18.928.608,17	18.928.608,17	31,60**
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	

Conclusão: de acordo com o teste F, não há diferença significativa ($p > 0,05$) entre os níveis de nitrogênio quando na ausência de potássio. Assim, quando não se usa potássio, o uso ou não de nitrogênio não afeta a produção de café em kg/ha.

Há diferença significativa ($p < 0,01$), de acordo com o teste F, entre os níveis de nitrogênio. Assim, quando se usa potássio, o uso de nitrogênio conjuntamente aumenta a produção de café em kg/ha significativamente.

2. Estudo de K na ausência e presença de N:

SQK na ausência de N (N0)

$$\text{SQK d. N0} = \frac{41592^2 + 40038^2}{12} - \frac{(81630)^2}{24} = 100622$$

SQK na presença de N (N1)

$$\text{SQK d. N1} = \frac{42437^2 + 61352^2}{12} - \frac{(103789)^2}{24} = 14907384$$

Tabela 19: Quadro da Análise de Variância para estudo de K na ausência e presença de N.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
SQK d. N0	1	100.622	100.622	0,17NS
SQK d. N1	1	4.907.384	4.907.384	24,89**
Resíduo	35	20.962.662	598.933,2	

Como a interação AB=BA, as conclusões devem ser as mesmas em relação a análise anterior.

Vale lembrar, que os pressupostos com relação aos resíduos foram satisfeitos.

1.11 Planejamento de um experimento:

O problema

Um engenheiro foi designado para realizar um experimento com um máquina de cortar plásticos recém adquirida pela empresa.

Esta máquina será utilizada para cortar dois tipos de plásticos. Ela também possui duas velocidades de corte.

O objetivo da empresa com este experimento é avaliar o consumo de energia elétrica em cada uma das combinações de níveis de plástico e níveis de velocidade de corte.

As condições

Cada tratamento demora cerca de 10 minutos para ser concretizado.

O chefe deste engenheiro permite que a máquina seja utilizada no máximo por uma hora em um dia e no máximo durante 5 dias. Ainda, o período durante o dia não é fixo, ou seja, o experimento não poderá ser realizado sempre no mesmo horário. Mas, o funcionário que irá operar a máquina será o mesmo.

Seu trabalho

Planejar o experimento, de forma que o engenheiro possa testar ao mesmo tempo os plásticos e as velocidades de corte, durante os 5 dias de uma semana.

Este engenheiro gostaria de aprender detalhadamente todo o processo de planejamento e análise do experimento.

1.12 Planejamento de um experimento:

O problema

Uma indústria que produz motores elétricos, deseja avaliar algumas combinações de fatores que afetam o desempenho dos motores, com relação a potência em HP (Horse Power). Os fatores a serem estudados são dois tipos de lubrificantes de correias, três comprimentos de correia e dois níveis de corrente elétrica.

As condições

A indústria possui três fábricas em condições adequadas para conduzir este experimento. Não se tem certeza se as condições experimentais, nas três fábricas, são semelhantes. Dentro de cada fábrica, a indústria garante que as condições de realização serão homogêneas.

Seu trabalho

Planejar o experimento de forma que se possa estudar adequadamente os efeitos dos fatores em estudo, inclusive os efeitos positivos ou negativos que possam surgir devido a combinação dos diferentes níveis de todos os fatores.

Considere que todos os efeitos são fixos.

2 Experimentos Hierárquicos

2.1 Introdução

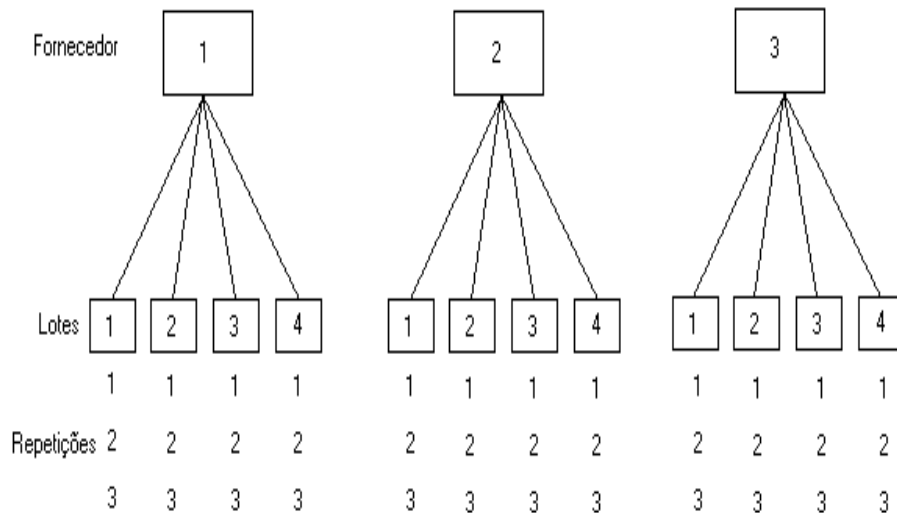
Nos experimentos anteriores, todas as combinações de níveis de fatores existiam. Acontecia o cruzamento entre todos os níveis de todos os fatores (fatoriais cruzados).

Em alguns experimentos, alguns níveis de um fator ocorrem em combinação com níveis de um ou mais fatores e outros diferentes níveis ocorrem com outros níveis de outros fatores.

Tais experimentos são chamados de hierárquicos ou aninhados (“nested”).

O exemplo a seguir refere-se a uma empresa que deseja determinar se a pureza da matéria prima entre fornecedores, é a mesma e se existe variabilidade entre os lotes de cada fornecedor. Foram obtidas amostras de 4 lotes de matéria prima para cada fornecedor. Foram avaliados 3 fornecedores e de cada lote foram tomadas 3 amostras (repetições) da seguinte forma.

Figura 9: Croqui de um experimento hierárquico.



Neste exemplo, os lotes estão aninhados sob fornecedores.

Aqui, o lote 1 do fornecedor 1 não tem relação com o lote 1 do fornecedor 2. Fornecedor e lote não estão cruzados.

Na dúvida, se o experimento é hierárquico ou não, pode-se reescrever os índices

dos níveis do fator aninhado (neste exemplo, lotes) utilizando uma sequência contínua. Se isto for possível, significa que o fator está aninhado.

2.2 Modelo estatístico

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{(ij)k} \quad (9)$$

μ =constante

α_i =efeito do i -ésimo nível fator A $i = 1, \dots, a$

$\beta_{j(i)}$ =efeito do j -ésimo nível fator B aninhado sob o i -ésimo nível do fator A $j = 1, \dots, b$

$\epsilon_{(ij)k}$ =erro associado a cada observação, aninhado sob os níveis de A e B $k = 1, \dots, r$.

O Quadro da ANOVA fica da seguinte forma:

Tabela 20: Quadro da Análise de Variância para o experimento hierárquico.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A	a-1	SQA	SQA/a-1	
B dentro A	a(b-1)	SQB(A)	SQB(A)/a(b-1)	
Resíduo	ab(r-1)	SQRes	SQRes/ab(r-1)	
Total	abr-1	SQTotal		

A obtenção do F calculado depende do tipo de efeito que se está estudando.

A esperança dos QM's para diferentes efeitos (fixos ou aleatórios) dos fatores de um experimento hierárquico é dada na tabela 21.

Tabela 21: Esperança de QM para diferentes efeitos de um experimento hierárquico.

E(QM)	A:Fixo GL B:Fixo	A:Fixo B: Aleatório	A: aleatório B: Aleatório
E(QMA)	$\sigma^2 + \frac{br \sum_{i,j} \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_\beta^2 + \frac{br \sum_{i=1}^I \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + r\sigma_\beta^2 + br\sigma_\alpha^2$
E(QMB(A))	$\sigma^2 + \frac{r \sum_{i,j} \beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$	$\sigma^2 + r\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\beta^2$
E(QMRes)	σ^2	σ^2	σ^2

As hipóteses testadas, vão depender do tipo de efeito considerado. No caso do exemplo de fornecedores e lotes, considerando estes como efeitos fixo e aleatório respectivamente, as hipóteses testadas serão:

- Fornecedores: se há ou não diferença significativa entre os fornecedores.

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i \\
 H_1 &: \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'
 \end{aligned}$$

- Lotes: se há variabilidade entre os lotes de cada fornecedor (dentro de cada fornecedor).

$$\begin{aligned}
 H_0 &: \sigma_{\beta(\alpha)}^2 = 0 \\
 H_1 &: \sigma_{\beta(\alpha)}^2 > 0
 \end{aligned}$$

2.3 Exemplo: Fornecedores de matéria prima

Considere os dados obtidos no exemplo do experimento de pureza da matéria prima de diferentes lotes de 3 fornecedores.

As Somas de quadrados podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$C = \frac{(\sum_{i,j,k}^{abr} y_{ijk})^2}{abr} = \frac{(13)^2}{36} = 4,69$$

$$SQ_{Total} = \sum_{i,j,k}^{abr} y_{ijk}^2 - C = (1^2 + \dots + 1^2) - C = 148,31$$

Tabela 22: Pureza da matéria prima de fornecedores. (Montgomery p. 443)

Fornecedor	Fornecedor 1				Fornecedor 2				Fornecedor 3			
Lote	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Amostra 1	1	-2	-2	1	1	0	-1	0	2	-2	1	3
Amostra 2	-1	-3	0	4	-2	4	0	3	4	0	-1	2
Amostra 3	0	-4	1	0	-3	2	-2	2	0	2	2	1
Total lotes	0	-9	-1	5	-4	6	-3	5	6	0	2	6
Total fornecedor	-5				4				14			

$$SQA = \sum_i^a y_{i..}^2 - C = \frac{(-5^2 + 4^2 + 14^2)}{12} - C = 15,06$$

$$SQB(A) = \sum_{ij}^{ab} y_{ij.}^2 - \frac{\sum_i^a (y_{i.})^2}{br} = \frac{(-0^2 + (-9)^2 + \dots + 6^2)}{3} - C = 69,92$$

$$SQRes = SQTtotal - SQA - SQB(A)$$

Assim, o quadro da ANOVA fica da seguinte forma:

Tabela 23: Análise de Variância para o experimento hierárquico (fornecedores, lotes).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado	E(QM)
Fornecedor	2	15,06	7,53	0,97NS	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2 + 6 \sum_{i=1}^I \alpha_i^2$
Lote(Forn.)	9	69,92	7,77	2,94**	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2$
Resíduo	24	63,33	2,64		σ^2
Total	35	148,31			

Para o fator Fornecedor, não rejeita-se H_0 , ou seja, não existe diferença significativa entre os fornecedores, considerando um nível de significância de 5%, para a variável pureza da matéria prima, segundo o teste F.

Para o fator Lotes, rejeita-se H_0 , considerando um nível de significância de 5%. Neste caso, existe variabilidade entre os lotes dentro de cada fornecedor, de acordo com o teste F.

Em termos práticos, é necessário reduzir a variabilidade entre os lotes dentro dos fornecedores para se ter uniformidade.

2.4 Exercício

Considere o seguinte experimento, conduzido no arranjo hierárquico, com 3 repetições.

Tabela 24: Diâmetro de peças produzidas por diferentes máquinas e operadores (mm).

	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3		Máquina 4	
Operador	1	2	1	2	1	2	1	2
Amostra 1	30,66	30,85	30,97	30,67	31,03	30,76	30,77	31,03
Amostra 2	30,78	31,00	30,97	30,75	31,01	30,69	30,69	31,09
Amostra 3	30,82	30,87	30,95	30,81	30,93	30,69	30,71	30,89

Efetue as análises destes dados, considerando o modelo hierárquico.

2.5 Exemplo de um experimento com fatores cruzados e aninhados.

Em um mesmo experimento pode-se ter fatores que são cruzados e fatores que são aninhados. Exemplo: duas empresas agrícolas foram estudadas por um fabricante de ração. Em cada empresa, 4 criadores foram selecionados para testarem 3 produtos (ingredientes da ração). Cada criador utilizou 2 lotes (repetições) de animais.

Aqui, considera-se que:

Criador = efeito aleatório

Empresa e produto = efeitos fixos.

Nesse experimento mediu-se o ganho de peso médio ao final de 5 semanas, em aves para corte, conforme a tabela 25.

Tabela 25: Experimento hierárquico e cruzado.

Empresa	Empresa 1				Empresa 2			
Criador	1	2	3	4	1	2	3	4
Produto 1	y_{1111}	y_{1211}	y_{1311}	y_{1411}	y_{2111}	y_{2211}	y_{2311}	y_{2411}
	y_{1112}	y_{1212}	y_{1312}	y_{1412}	y_{2112}	y_{2212}	y_{2312}	y_{2412}
Produto 2								
Produto 3								

2.5.1 Modelo estatístico

Para este experimento, o modelo estatístico será:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k(j)} + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik(j)} + \epsilon_{ijk(l)} \quad (10)$$

onde

μ =constante;

α_i =efeito do i-ésimo nível do fator produto;

β_j =efeito do j-ésimo nível do fator empresa;

$\gamma_{k(j)}$ =efeito do k-ésimo nível do fator criador dentro do j-ésimo nível do fator empresa;

$(\alpha\beta)_{ij}$ =efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator produto e o j-ésimo nível do fator empresa;

$(\alpha\gamma)_{ik(j)}$ =efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator produto e k-ésimo nível do fator criador dentro do j-ésimo nível do fator empresa;

$\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$ =erro associado a cada observação.

Com

$i = 1, \dots, a$

$j = 1, \dots, b$

$k = 1, \dots, c$

$l = 1, \dots, r$

Neste modelo, observa-se que não pode existir interação entre B e C porque C está aninhado sob B. Consequentemente, a interação tripla também não pode ocorrer.

Exemplo

Os dados do experimento abaixo seguem um modelo hierárquico cruzado:

Tabela 26: Peso médio final de aves após 5 semanas.

Empresa	Empresa 1					Empresa 2					
Criador	1	2	3	4		1	2	3	4		
Produto 1	22	23	28	25		26	27	28	24		
	24	24	29	23	=198	28	25	25	23	=206	404
	46	47	57	48		54	52	53	47		
Produto 2	30	29	30	27		29	30	24	28		
	27	28	32	25	=228	28	27	23	30	=219	447
	57	57	62	52		57	57	47	58		
Produto 3	25	24	27	26		27	26	24	28		
	21	22	25	23	=196	25	27	27	27	=208	401
	46	46	52	49		52	50	51	55		
	149	150	171	149		163	159	151	160		
	619					633					1252

As hipóteses testadas aqui serão:

Produto

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Empresa

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$$

Criador(Empresa)

$$H_0 : \sigma_{\gamma(\beta)}^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_{\gamma(\beta)}^2 > 0$$

Produto vs Empresa

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

Produto vs Criador(Empresa)

$$H_0 : \sigma_{\alpha\gamma(\beta)}^2 = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : \sigma_{\alpha\gamma(\beta)}^2 > 0$$

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$C = \frac{\sum_{ijkl}^{IJKL} (y_{ijkl})^2}{abcr} = \frac{(1252)^2}{48} = 32.656,33$$

$$\text{SQTotal} = \sum_{ijkl}^{IJKL} y_{ijkl}^2 - C = (22^2 + \dots + 27^2) - C = 299,67$$

$$\text{SQProd} = \frac{\sum_i^I y_{i...}^2}{bcr} - C = \frac{(404^2 + 447^2 + 401^2)}{2 \times 4 \times 2} - C = 82,80$$

$$\text{SQEmp} = \frac{\sum_j^J y_{.j..}^2}{acr} - C = \frac{(619)^2 + (633)^2}{3 \times 4 \times 2} - C = 4,08$$

$$\begin{aligned} \text{SQProd} \times \text{Emp} &= \frac{\sum_{i,j}^{I,J} y_{ij..}^2}{cr} - C - \text{SQEmp} - \text{SQProd} = \frac{(198^2 + 206^2 + \dots + 208^2)}{4 \times 2} - C - \\ \text{SQEmp} - \text{SQProd} &= 19,04 \end{aligned}$$

$$\text{SQCriador(Emp)} = \frac{\sum_{jk}^{JK} y_{.jk.}^2}{ar} - \frac{\sum_j^J y_{.j..}^2}{acr} = \frac{(149^2+150^2+\dots+160^2)}{3 \times 2} - \frac{619^2+633^2}{24} = 71,91$$

$$\text{SQProd} \times \text{Criador (Emp)} = \frac{\sum_{ijk}^{IJK} y_{ijk.}^2}{r} - \frac{\sum_{jk}^{JK} y_{.jk.}^2}{ar} - \frac{\sum_{i,j}^{I,J} y_{ij..}^2}{cr} + \frac{\sum_j^J y_{.j..}^2}{acr} = \frac{(46^2+\dots+55^2)}{2} - 32.732,33 - 32.762,25 + 32,660.42 = 65,84$$

Resíduo= por diferença

O quadro da ANOVA (tabela 27) com as esperanças de Quadrados Médios mostra como realizar o teste F.

Tabela 27: Quadro da Análise de Variância para o experimento hierárquico com produtos, empresas e criadores.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F cal.	E(QM)
Produto	2	82,80	41,40	7,54**	$\sigma^2 + 2\sigma_{\alpha\gamma}^2 + 8 \sum \alpha_i^2$
Empresa	1	4,08	4,08	0,34 NS	$\sigma^2 + 6\sigma_{\gamma}^2 + 24 \sum \beta_j^2$
Criador(Emp.)	6	71,91	11,98	5,15**	$\sigma^2 + 6\sigma_{\gamma}^2$
Prod. $\times$ Emp.	2	19,04	9,52	1,73	$\sigma^2 + 2\sigma_{\alpha\gamma}^2 + 4 \sum (\alpha\beta)_{ij}^2$
Prod. $\times$ Criador(Emp.)	12	65,84	5,48	2,36	$\sigma^2 + 2\sigma_{\alpha\gamma}^2$
Resíduo	24	56,00	2,33		σ^2
Total	47	299,67			

2.6 Planejamento de um experimento

O problema

Em uma fábrica de peças para automóveis, um técnico foi encarregado de avaliar as peças que estavam sendo produzidas para um novo modelo de veículo. Nesta fábrica, havia muita reclamação quanto as dimensões das peças que estavam sendo produzidas. Alguns supetavam dos diferentes tipos de máquinas que estavam sendo utilizados. Outros, dos diferentes operadores das máquinas.

As condições

A empresa possui duas máquinas que produzem as referidas peças. As duas serão utilizadas neste experimento. Em cada máquina, quatro funcionários revezam-se durante o dia de trabalho (os funcionários que operam a máquina A não são os mesmos que operam a máquina B). Como as peças não podem ser manuseadas fora da linha de produção, durante um dia de trabalho, apenas de três a cinco peças por funcionário poderão ser amostradas para a realização do experimento. Será feita uma medida em cada peça.

Seu trabalho

Considere que os efeitos de máquinas e funcionários são fixos.

Planejar o experimento, de forma que o técnico possa testar o efeito das máquinas e dos funcionários sobre as dimensões das peças, durante um dia de trabalho. Este técnico gostaria de aprender todo o processo de planejamento e análise do experimento.

2.7 Planejamento de um experimento:

O problema

Uma empresa recebeu 3 máquinas novas de 3 marcas diferentes, que fabricam peças através de diferentes moldes.

O proprietário deseja averiguar se as máquinas estão produzindo as peças dentro dos limites permitidos de variação do comprimento de cada peça.

As condições

Quatro funcionários devem revezar-se durante o dia (24 horas) para utilizar as máquinas (4 funcionários por máquina). Em cada máquina, podem ser utilizados até 3 diferentes moldes de peças mas, sempre um de cada vez.

Para manter a qualidade dos produtos, é necessário que os funcionários mantenham uma regularidade na manipulação das máquinas e consequentemente, da uniformidade das peças.

Para não aumentar os custos, o proprietário permite que em um experimento, sejam feitas duas repetições por tratamento. Ele também disponibilizou um dia para a realização do experimento.

Seu trabalho

Planejar o experimento para que o proprietário da empresa tenha alguma informação sobre o comportamento das máquinas, dos funcionários e dos moldes. Lembre-se, as máquinas e os moldes serão sempre os mesmos mas os funcionários.... Bom trabalho!

3 Método de Hicks para encontrar as E(QM)

A forma analítica de encontrar as esperanças dos quadrados médios de um modelo matemático é por demais dispendiosa e por vezes complicada.

Hicks (1973) desenvolveu um algoritmo para se encontrar a E(QM) que torna mais simples e menos dispendioso esta tarefa.

Alguns softwares possuem o recurso de definição do tipo de efeito do fator e automaticamente realizam o teste F de maneira correta. No caso específico do Software R, esta definição deve ser feita para todos os casos em que o denominador (ou termo de erro) não seja o Quadrado Médio do Resíduo. Deve-se tomar cuidado neste ponto, pois em geral, tanto o R como outros softwares não mencionarão qualquer fato a respeito de problemas desta natureza. Em resumo, o resultado da análise é fornecido mas, pode estar parcialmente ou totalmente incorreto.

Inicialmente, elabora-se a seguinte estrutura para representar os efeitos dos fatores do modelo matemático:

Tabela 28: Quadro para encontrar a Esperança do Quadrado Médio de um modelo Matemático com dois fatores.

Fator	F (Fixo)	A (Aleatório)	A (Aleatório)	natureza dos efeitos
	a	b	r	índices
	i	j	k	índices
α_i				E(QM)
β_j				E(QM)
$(\alpha\beta)_{ij}$				E(QM)
$\epsilon_{(ij)k}$				E(QM)

3.1 Algoritmo de Hicks

1. Todos os índices referentes aos efeitos fixos recebem o algarismo 0 e os aleatórios recebem 1 (na coluna), correspondente ao efeito;
2. Todos os índices entre parênteses recebem 1 (na coluna) - hierárquico;
3. Completa-se o quadro com os índices (a,b,r etc) correspondentes, na coluna;
4. Cobrir a(s) coluna(s) correspondente(s) ao(s) índice(s) do(s) fator(es) para encontrar a E(QM), multiplicando-se os efeitos na linha, considerando somente os fatores com o mesmo índice; DICA: iniciar multiplicando pela última linha.

5. Quando ocorrerem índices entre parênteses, todas as colunas correspondentes não devem ser cobertas;
6. Quando ocorre a interação entre um fator fixo e um aleatório, considera-se que o efeito da interação é aleatório.

3.2 Exemplo

Considere o seguinte modelo de um experimento:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{(ij)k} \quad (11)$$

com

$$\alpha = \text{efeito fixo} \longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$$

$$\beta = \text{efeito fixo} \longrightarrow \frac{\sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1}$$

$$\epsilon_{(ij)k} = \sigma^2 \longrightarrow \text{componente de variância}$$

Seguindo o algoritmo, constroi-se o seguinte quadro:

Tabela 29: Efeitos fixos recebem 0.				
Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a	b	r	
	i	j	k	
α_i	0			
β_j		0		
$\epsilon_{(ij)k}$				

Tabela 30: Efeitos aleatórios recebem 1.				
Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a	b	r	
	i	j	k	
α_i	0			
β_j		0		
$\epsilon_{(ij)k}$			1	

Tabela 31: Índices entre parênteses recebem 1.

Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a	b	r	
	i	j	k	
α_i	0			
β_j		0		
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	

Tabela 32: Completar o quadro com os índices, na coluna.

Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a	b	r	
	i	j	k	
α_i	0	b	r	
β_j	a	0	r	
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	

Tabela 33: Multiplicar os efeitos, na linha, cobrindo a coluna correspondente ao índice do efeito.

Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a	b	r	
	i	j	k	
α_i	0	b	r	$\sigma^2 + \frac{br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$
β_j	a	0	r	
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	

- Cobrir a coluna correspondente ao índice i ;
- Na última linha, multiplicar os índices pela esperança do efeito. No caso, $1 \times 1 \times E(\epsilon_{(ij)k}) = \sigma^2$.
- Na penúltima linha, tem-se $0 \times r = 0$. Neste caso, este efeito não ocorrerá.
- Na primeira linha, tem-se $b \times r \times E(\alpha_i) = \frac{br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$

Procede-se da mesma forma para os outros efeitos. Assim, obtem-se o quadro final:

Tabela 34: Esperança dos quadrados médios para o modelo 11.

Fator	F (α)	F (β)	A (ϵ)	E(QM)
	a i	b j	r k	
α_i	0	b	r	$\sigma^2 + \frac{br \sum_{i=1}^a \alpha_i^2}{a-1}$
β_j	a	0	r	$\sigma^2 + \frac{ar \sum_{j=1}^b \beta_j^2}{b-1}$
$\epsilon_{(ij)k}$	1	1	1	σ^2

Lembrar que, para um modelo de efeitos aleatórios, a esperança dos efeitos é definida como

$$\alpha = \text{efeito aleatório} \longrightarrow \sigma_\alpha^2$$

$$\beta = \text{efeito aleatório} \longrightarrow \sigma_\beta^2$$

$$(\alpha\beta)_{ij} \longrightarrow \sigma_{\alpha\beta}^2$$

3.3 Exercício

Encontre as esperanças dos quadrados médios para os seguintes modelos:

1. $\alpha = \text{fixo}$ e $\beta = \text{aleatório}$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{(ij)k}$$

(12)

Fator		E(QM)

2. $\alpha = \text{aleatório}$ e $\beta = \text{fixo}$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{(ij)k}$$

(13)

Fator		E(QM)

3. $\alpha = \text{fixo}$ e $\beta = \text{aleatório}$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{(ij)k} \quad (14)$$

Fator		E(QM)

4. Encontre as esperanças para o exemplo do modelo hierárquico com fatores cruzados.

4 Parcelas subdivididas (Split-plot)

4.1 Introdução

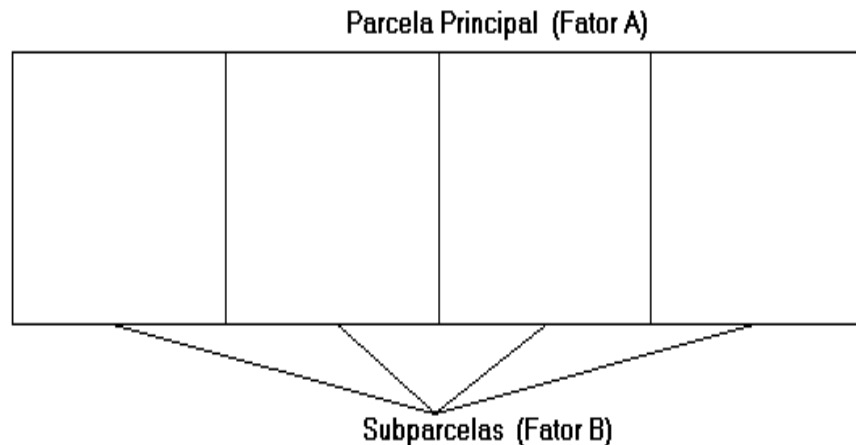
Em experimentos fatoriais com dois ou mais fatores, quando há alguma limitação para instalar o experimento, ou mesmo para facilitar a instalação, utiliza-se o experimento em parcelas subdivididas. Em alguns casos, é a única forma de aplicação dos tratamentos às unidades experimentais.

Este tipo de experimento consiste em alocar o fator A em parcelas principais (ou primária) e o fator B nas subparcelas (secundárias). Cada parcela funciona como um “bloco” para as subparcelas.

Se existirem mais de dois fatores, o experimento é chamado de parcelas subdivididas e assim por diante.

Esse experimento pode, ainda, ser instalado em qualquer delineamento.

Figura 10: Croqui de uma parcela principal de um experimento em Parcelas subdivididas.



Exemplo Considere um experimento com 2 fatores (A e B), cada um com 4 níveis, dispostos em 3 blocos:

$A = A1, A2, A3, A4$

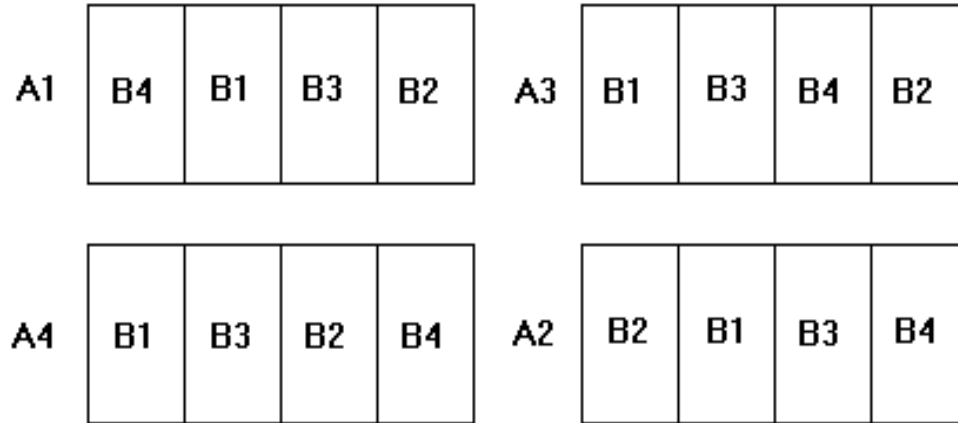
$B = B1, B2, B3, B4$

$BLOCO = I, II, IV$

O croqui de um bloco é apresentado a seguir:

Na figura 11, primeiro deve-se casualizar os níveis do Fator A (Parcela Princi-

Figura 11: Croqui de um bloco de um experimento em Parcelas subdivididas.



pal) e em segundo, deve-se casualizar os níveis do fator B (Subparcelas) dentro do bloco.

Em geral, o fator de maior interesse é colocado nas subparcelas, quando possível. Caso contrário, a aplicação dos tratamentos às parcelas principais ou subparcelas, dependerá da facilidade de instalação do experimento.

4.2 Modelo estatístico

Para um experimento em Parcelas Subdivididas, o modelo estatístico (com blocos) é dado da seguinte forma :

$$y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \gamma_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (15)$$

onde

μ = constante;

ρ_i = efeito do i-ésimo bloco $i = 1, \dots, r$;

α_j = efeito do j-ésimo nível do fator A (parcela principal) $j = 1, \dots, a$;

γ_{ij} = Resíduo a (interação entre blocos ou repetições e o fator A ou Parcela Principal)

$\gamma_{ij} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_\gamma^2)$;

β_k = efeito do k-ésimo nível do fator B (Parcela Secundária) $k = 1, \dots, b$;

$(\alpha\beta)_{jk}$ = efeito da interação entre o j-ésimo nível do fator A e k-ésimo nível do fator B;

ϵ_{ijk} = resíduo b, associado às subparcelas;

Aqui $\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

4.3 Quadro da ANOVA e E(QM).

Para um experimento em parcelas subdivididas em blocos, o quadro da ANOVA e a E(QM) são dados na tabela 35.

Tabela 35: Quadro da Análise de Variância e E(QM) (efeitos fixos) para um experimento em Parcelas subdivididas.

Causas de Variação	GL	E(QM)
Blocos	r-1	$\sigma^2 + b\sigma_\gamma^2 + ab\sigma_\rho^2$
A	a-1	$\sigma^2 + b\sigma_\gamma^2 + rb\frac{\sum_j \alpha_j^2}{a-1}$
Resíduo a	(r-1)(a-1)	$\sigma^2 + b\sigma_\gamma^2$
B	b-1	$\sigma^2 + ra\frac{\sum_k \beta_k^2}{b-1}$
AB	(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + r\frac{\sum_{j,k} (\alpha\beta)_{jk}^2}{(a-1)(b-1)}$
Resíduo b	a(b-1)(r-1)	σ^2
Total	abr-1	

4.4 Exemplo: Produção de aveia.

Os dados apresentados a seguir, foram obtidos através de um experimento conduzido no delineamento em blocos completos casualizados no arranjo de parcelas subdivididas. Neste experimento estudou-se o efeito de diferentes variedades de aveia (A) e diferentes tratamentos de sementes (B) sobre o rendimento em kg/parcela.

Tabela 36: Dados de produção de aveia.

Variedades	Tratamentos de Sementes	Blocos				Total
		1	2	3	4	
A1	B1	42,9	41,6	28,9	30,8	144,2
A1	B2	53,8	58,5	43,9	46,3	202,5
A1	B3	49,5	53,8	40,7	39,4	183,4
A1	B4	44,4	41,8	28,3	34,7	149,2
A2	B1	53,3	69,6	45,4	35,1	203,4
A2	B2	57,6	69,6	42,4	51,9	221,5
A2	B3	59,8	65,8	41,4	45,4	212,4
A2	B4	64,1	57,4	44,1	51,6	217,2
A3	B1	62,3	58,5	44,6	50,3	215,7
A3	B2	63,4	50,4	45,0	46,7	205,5
A3	B3	64,5	46,1	62,6	50,3	223,5
A3	B4	63,6	56,1	52,7	51,8	224,2
A4	B1	75,4	65,6	54,0	52,7	247,7
A4	B2	70,3	67,3	57,6	58,5	253,7
A4	B3	68,8	65,3	45,6	51,0	230,7
A4	B4	71,6	69,4	56,6	47,4	245,0
Total		965,3	936,8	733,8	743,9	3.379,8

As Somas de Quadrados podem ser obtidas por

$$C = \frac{(3379,8)^2}{64} = 178.485,13$$

$$SQ_{Total} = (42,9^2 + \dots + 47,4^2) - C = 7.797,39$$

Para obtenção das Somas de Quadrados dos fatores, inicialmente constrói-se o quadro auxiliar I (tabela 37):

Tabela 37: Quadro auxiliar I para obtenção das Somas de Quadrados de Blocos.

A	BI	BII	BIII	BIV	TOTAL
A1	190,6	195,7	141,8	151,2	679,3
A2	234,8	262,4	173,3	184,0	854,5
A3	253,8	211,1	204,9	199,1	868,9
A4	286,1	267,6	213,8	209,6	977,1
Total	965,3	936,8	733,8	743,9	3379,8

$$SQ_{\text{Blocos}} = \frac{965,3^2 + \dots + 743,9^2}{16} - C = 2.842,87$$

$$SQA = \frac{(679,3^2 + \dots + 977,1^2)}{16} - C = 2.848,02$$

$$SQ_{\text{Parcelas}} \text{ ou } SQA \times \text{Blocos} = \frac{190,6^2 + \dots + 209,6^2}{4} - C = 6.309,19$$

$$SQ_{\text{Res a}} = SQ_{\text{Parcelas}} - SQA - SQ_{\text{Blocos}} = 618,3$$

e o quadro auxiliar II (tabela 38):

Tabela 38: Quadro auxiliar II para obtenção das Somas de Quadrados dos Fatores

A	B1	B2	B3	B4	TOTAL
A1	144,2	202,5	183,4	149,2	679,3
A2	203,4	221,5	212,4	217,2	854,5
A3	215,7	205,5	223,5	224,2	868,9
A4	247,7	253,7	230,7	245,0	977,1
Total	811,0	883,2	850,0	835,6	3379,8

$$SQ_B = \frac{(811,0^2 + \dots + 835,5^2)}{16} - C = 170,53$$

$$SQ_{AB} = \frac{(144,2^2 + \dots + 245,0^2)}{4} - C - SQA - SQ_B = 586,47$$

$$SQ_{\text{Res b}} = SQ_{\text{Total}} - SQ_{\text{parcelas}} - SQ_{BSQAB} = 731,2$$

Assim, o quadro da análise de variância fica:

4.4.1 Desdobramento dos graus de liberdade

Dado que houve interação significativa entre os fatores A e B, deve-se decompor os graus de liberdade e estudar o comportamento dos níveis de A dentro de

Tabela 39: Quadro da Análise de Variância para o experimento com 3 fatores em blocos completos (efeitos fixos).

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Blocos	3	2842,87	947,62	13,79**
Variedade (A)	3	2848,02	949,34	13,82**
Erro a	9	618,30	68,7	
Parcelas	15	6309,19		
Trat. Sementes (B)	3	170,53	56,84	2,8NS
AB	9	586,47	65,16	3,21**
Erro b	36	731,2	20,31	
Total	63	7797,39		

níveis de B e vice-versa.

1. Estudo dos Níveis de B dentro de A

$$\text{SQB d. A1} = \frac{(144,2^2 + \dots + 149,2^2)}{4} - \frac{(679,3)^2}{16} = 583,49$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{SQB d. A4} = \frac{(247,7^2 + \dots + 245,0^2)}{4} - \frac{(977,1)^2}{16} = 71,34$$

Verificação: SQB d. A1 + SQB d. A2 + SQB d. A3 + SQB d. A4 = SQB + SQAB

O quadro da ANOVA fica:

Tabela 40: Quadro da Análise de Variância para estudar os níveis de B dentro de A.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
B d. A1	3	583,44	194,5	9,58**
B d. A2	3	45,21	15,07	0,74 NS
B d. A3	3	56,96	18,99	0,94 NS
B d. A4	3	71,34	23,78	1,17NS
Erro b	36	731,2	20,31	
Total	63	7797,39		

2. Estudo dos Níveis de A dentro de B

$$\text{SQA d. B1} = \frac{(144,2^2 + \dots + 247,7^2)}{4} - \frac{(811)^2}{16} = 1404,18$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\text{SQA d. B4} = \frac{(149,2^2 + \dots + 245,0^2)}{4} - \frac{(835,6)^2}{16} = 1292,57$$

Verificação: SQA d. B1 + SQA d. B2 + SQA d. B3 + SQA d. B4 = SQA + SQAB

Neste caso, como considera-se o efeito de diferentes parcelas principais no mesmo nível das parcelas secundárias, envolvem-se os dois resíduos simultaneamente, diferentemente da análise anterior. Dessa forma, é necessário considerar um resíduo médio, assim como os graus de liberdade (médios) correspondentes a este resíduo.

Para o cálculo do resíduo médio, utiliza-se a seguinte expressão:

$$\text{Resíduo Médio} = \frac{\text{QMRes a} + (b-1)\text{QMRes b}}{b}$$

e para o cálculo dos graus de liberdade, utiliza-se a expressão de Satterthwaite, dado por,

$$n' = \frac{[\text{QMRes a} + (b-1)\text{QMRes b}]^2}{\frac{[\text{QMRes a}]^2}{\text{GL Res a}} + \frac{[(b-1)\text{QMRes b}]^2}{\text{GL Res b}}}$$

Nota: Sempre ocorre que:

$$\text{GL Res a} \leq n' \leq [\text{GL Res a} + \text{GL Res b}]$$

Assim, para o experimento em análise tem-se que

$$n' = \frac{[68,7 + 3(20,31)]^2}{\frac{(68,7)^2}{9} + \frac{3(20,31)^2}{36}} = 26,78 \sim 27$$

Observe que:

$$9 \leq 27 \leq 45$$

O quadro da ANOVA fica:

Tabela 41: Quadro da Análise de Variância para estudar os níveis de A dentro de B.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A d. B1	3	1404,18	468,06	14,44**
A d. B2	3	412,91	137,66	4,25*
A d. B3	3	324,91	108,26	3,34*
A d. B4	3	1292,57	430,86	13,29**
Resíduo Médio	n'=27		32,41	
Total	63	7797,39		

4.4.2 Comparação de médias

1. Estudar o comportamento do fator secundário dentro de cada parcela principal (B d. A).

Método de Tukey:

$$\Delta = q \frac{Sb}{\sqrt{r}} = \frac{3,81 \times 4,51}{\sqrt{4}} = 8,6$$

onde

$$q_{(0,05)} (4 \text{ (níveis do fator secundário)}, 36 \text{ (GL Res b)}) = 3,81$$

$$Sb = \sqrt{QM_{Res \ b}}$$

No experimento, pode-se estar interessado em comparar níveis de B d. A1:

$$\overline{A1B1} = \frac{144,2}{4} = 36,1$$

$$\overline{A1B2} = \frac{202,5}{4} = 50,6$$

Assim, o contraste

$$\hat{Y} = \overline{A1B2} - \overline{A1B1} \quad (16)$$

$$\hat{Y} = 50,6 - 36,1 = 14,5* \quad (17)$$

é significativo, ou seja, as médias dos tratamentos diferem.

2. Estudar o comportamento do fator principal dentro do fator secundário (A d. B).

Método de Tukey

$$\Delta = q \frac{Sa}{\sqrt{r}} = \frac{3,88 \times 5,69}{\sqrt{4}} = 11,0$$

onde

$q_{(0,05)} (4 \text{ (níveis da parcela principal)}, 27 \text{ (GL Res médio)}) = 3,88$

$Sa = \sqrt{\text{Resíduo Médio}}$

No experimento, pode-se estar interessado em comparar níveis de A d. B1:

$$\overline{A1B1} = \frac{144,2}{4} = 36,1$$

$$\overline{A2B1} = \frac{203,4}{4} = 50,9$$

Assim, o contraste

$$\hat{Y} = \overline{A1B2} - \overline{A1B1} \quad (18)$$

$$\hat{Y} = 50,9 - 36,1 = 14,8* \quad (19)$$

é significativo, ou seja, as médias dos tratamentos diferem.

4.5 Planejamento de um experimento:

O problema

Uma nutricionista, responsável pela matéria prima de uma cozinha industrial, precisa avaliar seus fornecedores de ervilhas e o processo de congelamento dessas ervilhas (rápido ou lento), através de um experimento. Ela está especialmente interessada em estudar quatro fornecedores desse alimento.

A variável de interesse, da nutricionista, é a quantidade, em mg, de produção de uma enzima, encontrada nas ervilhas, após 15 dias de armazenamento.

As condições

Neste experimento, dois fatores portanto, são de interesse: o primeiro, é a metodologia de congelamento do alimento (rápido ou lento). Os congeladores disponíveis realizam os dois tipos de congelamento. O segundo fator de interesse, e mais importante, são os fornecedores. Para realizar este estudo, seis congeladores estão disponíveis (3 marcas, com 2 congeladores cada).

Seu trabalho

Planejar o experimento para esta nutricionista, de forma que ela possa estudar o comportamento da resposta em função dos fatores que farão parte do experimento. Não é do conhecimento da nutricionista se as diferentes marcas afetam ou não a produção da enzima.

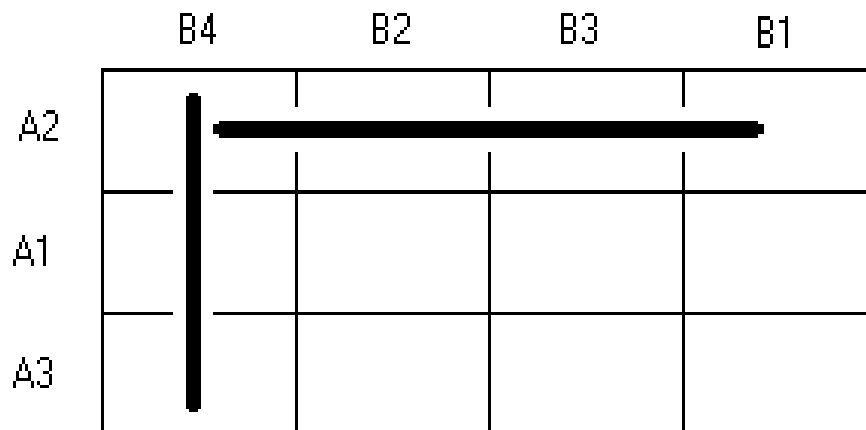
Não esqueça, os cursos de graduação em nutrição tem apenas uma disciplina de estatística básica e esta nutricionista, em especial, nunca realizou um experimento planejado.

5 Experimentos em faixas

5.1 Introdução

Os experimentos em faixas são uma variação dos experimentos em parcelas subdivididas. Neste tipo de experimento os fatores A e B, p. ex. são dispostos em faixas, como se fossem parcelas principais (Figura 12).

Figura 12: Croqui de um “bloco” de um experimento em faixas.



Neste experimento, não há uma aleatorização independente dos níveis dos fatores. Os dois fatores são alocados em parcelas principais.

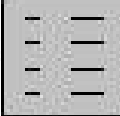
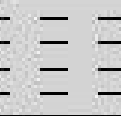
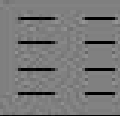
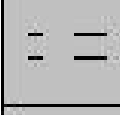
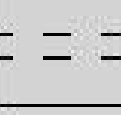
O uso deste tipo de experimento está relacionado principalmente a forma de instalação e/ou condução do experimento. Em geral, são limitações físicas que requerem este tipo de disposição dos fatores.

Exemplo; Considere o experimento onde é necessário testar os efeitos de diferentes espaçamentos (E) de plantio e diferentes quantidades de irrigação (I) (níveis de água) (Figura 13).

Neste tipo de experimento há uma redução dos GL do res a e b. Isso ocorre porque os níveis não estão sendo casualizados dentro das parcelas como no experimento em parcelas subdivididas.

Por isso, esse tipo de experimento deve ser evitado, a menos que a interação seja o efeito de maior interesse ou que as condições do experimento não permitam outro arranjo ou disposição dos fatores.

Figura 13: Croqui de um “bloco” de um experimento em faixas com aleatorização dos níveis de Irrigação (I) e Espaçamento (E).

	I3	I2	I1	I4
E3				
E1				
E2				

5.2 Modelo estatístico

Para o experimento em faixas o modelo estatístico pode ser escrito da seguinte forma:

$$y_{ijk} = \mu + \rho_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\rho)_{ik} + (\beta\rho)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad (20)$$

onde

μ = constante;

$(\alpha)_i$ = efeito do i-ésimo nível do fator A;

$(\beta)_j$ = efeito do j-ésimo nível do fator B;

$(\alpha\beta)_{ij}$ = efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator A e o j-ésimo nível do fator B;

$(\alpha\rho)_{ik}$ = efeito da interação entre o i-ésimo nível do fator A e k-ésimo nível do bloco ou repetição (erro experimental associado ao fator A com $(\alpha\rho)_{ik} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_{\alpha\rho}^2)$);

$(\beta\rho)_{jk}$ = efeito da interação entre o j-ésimo nível do fator B e k-ésimo nível do bloco ou repetição (erro experimental associado ao fator B com $(\beta\rho)_{jk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_{\beta\rho}^2)$);

ϵ_{ijk} erro experimental associado à cada observação. $\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$

O quadro da análise de variância fica

As hipóteses testadas neste modelo são as seguintes (A e B fixos):

Tabela 42: Quadro da Análise de Variância e E(QM) (efeitos fixos) para um experimento em Faixas.

Causas de Variação	GL	E(QM)
Blocos	r-1	
A	a-1	$\sigma^2 + b\sigma_{\alpha\gamma}^2 + rb \frac{\sum_i \alpha_i^2}{a-1}$
Resíduo a	(r-1)(a-1)	$\sigma^2 + b\sigma_{\alpha\gamma}^2$
B	b-1	$\sigma^2 + a\sigma_{\beta\gamma}^2 + ra \frac{\sum_j \beta_j^2}{b-1}$
Resíduo b	(r-1)(b-1)	$\sigma^2 + a\sigma_{\beta\gamma}^2$
AB	(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + r \frac{\sum_{i,j} (\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
Resíduo c	(a-1)(b-1)(r-1)	σ^2
Total	abr-1	

Fator A

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i \quad \forall i$$

$$H_1 : \alpha_i \neq \alpha_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

Fator B

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_j \quad \forall j$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_{j'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } j \neq j'$$

Interação AB

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_1 : (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad \text{para pelo menos um par } ij$$

No caso de a interação ser significativa, deve-se estudar o comportamento dos níveis de A d. B e/ou B d. A.

Assim, o desdobramento dos graus de liberdade pode ser realizado das seguintes maneiras:

1. A d. B

A tabela 43 apresenta o quadro da análise de variância para estudar os níveis de A dentro de B para um experimento conduzido em um arranjo de faixas.

Tabela 43: Quadro da Análise de Variância para estudar os níveis de A dentro de B.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
A d. B1	a-1	SQA d. B1	$\frac{SQAd.B1}{a-1}$	$\frac{QMA d.B1}{QMRes1}$
A d. B2	a-1	SQA d. B2	$\frac{SQAd.B2}{a-1}$	$\frac{QMA d.B2}{QMRes1}$
A d. B3	a-1	SQA d. B3	$\frac{SQAd.B3}{a-1}$	$\frac{QMA d.B3}{QMRes1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A d. B _b	a-1	SQA d. B _b	$\frac{SQAd.B_b}{a-1}$	$\frac{QMA d.B_b}{QMRes1}$
Resíduo Médio1	n1	—	QMRes1	

Onde

$$n1 = \frac{[QMRes a + (b-1)QMRes c]^2}{\frac{[QMRes a]^2}{GL Res a} + \frac{[(b-1)QMRes c]^2}{GL res c}}$$

e

$$QMRes1 = \frac{[QMRes a + (b-1)QMRes c]}{b}$$

2. B d. A

A tabela 44 apresenta o quadro da análise de variância para estudar os níveis de B dentro de A para um experimento conduzido em um arranjo de faixas.

Onde

$$n2 = \frac{[QMRes b + (a-1)QMRes c]^2}{\frac{[QMRes b]^2}{GL Res b} + \frac{[(a-1)QMRes c]^2}{GL res c}}$$

e

$$QMRes2 = \frac{[QMRes b + (a-1)QMRes c]}{a}$$

Tabela 44: Quadro da Análise de Variância para estudar os níveis de B dentro de A.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
B d. A1	b-1	SQB d. A1	$\frac{SQBd.A1}{b-1}$	$\frac{QMBd.A1}{QMRes2}$
B d. A2	b-1	SQB d. A2	$\frac{SQBd.A2}{b-1}$	$\frac{QMBd.A2}{QMRes2}$
B d. A3	b-1	SQB d. A3	$\frac{SQBd.A3}{b-1}$	$\frac{QMBd.A3}{QMRes2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B d. A _a	b-1	SQB d. A _a	$\frac{SQBd.Aa}{b-1}$	$\frac{QMBd.Aa}{QMRes2}$
Resíduo Médio2	n2	—	QMRes2	

5.3 Comparações múltiplas

Para realizar as comparações múltiplas, utilizam-se os seguintes erros padrões para os efeitos:

$$S_a = \sqrt{Q_{mres} a}$$

$$S_b = \sqrt{Q_{mres} b}$$

Exemplo: Teste de Tukey:

1. Para comparar os níveis do fator A

$$\Delta = q \frac{S_a}{\sqrt{br}}$$

$$q_\alpha(a, GL \text{ Res } a)$$

2. Para comparar os níveis do fator B

$$\Delta = q \frac{S_b}{\sqrt{ar}}$$

$$q_\alpha(b, GL \text{ Res } b)$$

3. Para comparar os níveis do fator A em cada nível de B

$$\Delta = q \frac{\sqrt{QMRes \ 1}}{\sqrt{r}}$$

$$q_{\alpha}(a, n1)$$

4. Para comparar os níveis do fator B em cada nível de A

$$\Delta = q \frac{\sqrt{QMRes 2}}{\sqrt{r}}$$

$$q_{\alpha}(b, n2)$$

5.4 Exemplo: Dados de produção de milho em Kg/ha.

A tabela 45 apresenta os dados referentes a um experimento conduzido no arranjo de faixas 4×3 .

Tabela 45: Produção de milho em kg/parcela em diferentes espaçamentos e diferentes densidades.

Espaçamento	Densidade	Blocos				Total
		1	2	3	4	
A1	B1	17,67	17,23	17,43	17,61	69,94
A1	B2	17,31	17,60	17,05	16,91	68,87
A1	B3	17,49	17,30	17,68	18,27	70,74
		52,47	52,13	52,16	52,79	209,55
A2	B1	17,19	17,85	17,44	17,56	70,04
A2	B2	17,21	17,26	16,71	17,52	68,70
A2	B3	18,04	16,38	17,23	17,14	68,79
		52,44	51,49	51,38	52,22	207,53
A3	B1	17,39	17,54	16,61	17,51	69,05
A3	B2	17,39	17,67	16,77	17,61	69,44
A3	B3	17,69	17,02	17,34	18,02	70,07
		52,47	52,23	50,72	53,14	208,56
A4	B1	17,19	17,57	17,72	17,73	70,21
A4	B2	16,78	17,57	17,79	18,27	70,41
A4	B3	17,86	16,85	18,12	17,94	70,77
		51,83	51,99	53,63	53,94	211,39
Total		209,21	207,84	207,89	212,09	837,03

Da tabela 46 pode-se obter as somas de quadrados para o fator A e para Blocos.

Da tabela 47 pode-se obter as somas de quadrados para o fator B e para Blocos.

Da tabela 48 pode-se obter as somas de quadrados para o efeito da interação AB.

Tabela 46: Quadro auxiliar I para obtenção das Somas de Quadrados dos Fatores.

A	Bloco1	Bloco2	Bloco3	Bloco4	TOTAL
A1	52,47	52,13	52,16	52,79	209,55
A2	52,44	51,49	51,38	52,22	207,53
A3	52,47	52,23	50,72	53,14	208,56
A4	51,83	51,99	53,63	53,94	211,39
Total	209,21	207,84	207,89	212,09	837,03

Tabela 47: Quadro auxiliar II para obtenção das Somas de Quadrados dos Fatores.

B	Bloco1	Bloco2	Bloco3	Bloco4	TOTAL
B1	69,44	70,19	69,20	70,11	279,24
B2	68,69	70,10	68,32	70,31	277,42
B3	71,08	67,55	70,37	71,37	280,37
Total	209,21	207,84	207,89	212,09	837,03

Obtenção das Somas de Quadrados:

Da tabela 46, pode-se obter

$$C = \frac{(837,03)^2}{48} = 14.596,23$$

$$SQ_{\text{Blocos}} = \frac{(209,21^2 + \dots + 212,09^2)}{12} - C = 0,9921$$

$$SQA = \frac{(209,55^2 + \dots + 211,39^2)}{12} - C = 0,6753$$

$$SQ_{\text{Parc A}} = \frac{(52,47^2 + \dots + 53,94^2)}{3} - C = 3,2847$$

$$SQA \times \text{Blocos} = SQ_{\text{Parc A}} - SQA - SQ_{\text{Blocos}} = 1,6173 \text{ (erro a)}$$

Da tabela 47, pode-se obter

$$SQ_B = \frac{(279,24^2 + 277,42^2 + 280,37^2)}{16} - C = 0,2768$$

$$SQ_{\text{Parc B}} = \frac{(69,44^2 + \dots + 71,37^2)}{4} - C = 3,566$$

$$SQ_B \times \text{Blocos} = SQ_{\text{Parc B}} - SQ_B - SQ_{\text{Blocos}} = 2,2936 \text{ (erro a b)}$$

Da tabela 48, pode-se obter

$$SQA \times B = \frac{(69,94^2 + \dots + 70,77^2)}{4} - C - SQA - SQ_B = 0,6166$$

$$SQ_{\text{Resíduo}} = \text{por diferença} = 1,9530$$

O Quadro da ANOVA fica

Tabela 48: Quadro auxiliar III para obtenção das Somas de Quadrados dos Fatores.

A	B1	B2	B3	TOTAL
A1	69,94	68,87	70,74	207,55
A2	70,04	68,70	68,79	207,53
A3	69,05	69,44	70,07	208,56
A4	70,21	70,41	70,77	211,39
Total	279,24	277,42	280,37	837,03

Tabela 49: Quadro da Análise de Variância para o experimento com produção de milho.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Blocos	3	0,9921		
A	3	0,6753	0,2251	1,25 ^{NS}
Erro a	9	1,6173	0,1797	
B	2	0,2768	0,1384	0,36 ^{NS}
Erro b	6	2,2936	0,3821	
AB	6	0,6166	0,1027	0,9465 ^{NS}
Erro c	18	1,9530	0,1085	
Total	47	8,3969		

6 Análise de Grupos de Experimentos

6.1 Introdução

A análise de grupos de experimentos é útil quando tem-se experimentos semelhantes e deseja-se agrupar todos os resultados do experimento em uma única análise.

Com este tipo de análise é possível avaliar diferentes experimentos em vários locais (ou tempo) simultaneamente.

Preferencialmente, deve-se buscar planejar experimentos idênticos, para facilitar a análise e manter o nível de precisão.

Na análise conjunta de experimentos, pode-se estimar, além dos efeitos dos fatores utilizados nos experimentos, os efeitos, por exemplo, do ambiente (local) onde foram realizados os experimentos e ainda estimar o efeito da interação entre fatores e locais.

Em geral, os efeitos de locais são considerados como sendo aleatórios.

Uma vantagem deste tipo de análise é que o número de observações pode aumentar bastante para cada tratamento.

A principal exigência da análise conjunta de experimentos é que exista *homocedasticidade* entre os resíduos dos diferentes experimentos. Para fazer esta avaliação, pode-se utilizar o teste de Hartley.

$$F_{\max} = \frac{QMR_{\max}}{QMR_{\min}} \sim F(n(\text{num. de exp.}), GLRes(\text{de cada experimento}))$$

A hipótese testada é

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 \forall i \quad (21)$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2 \quad \text{para pelo menos um par e } i \neq i' \quad (22)$$

Quando H_0 for rejeitada, pode-se proceder de duas maneiras distintas:

1. agrupar os experimentos em subgrupos com homogeneidade de variâncias e fazer a análise conjunta;
2. Realizar a análise conjunta mas, utilizar a metodologia proposta por Cochran para ajuste dos graus de liberdade do resíduo médio e os graus de liberdade da interação entre tratamentos e experimentos em função da heterocedasticidade.

Ajuste dos Graus de liberdade do resíduo médio:

$$n = \frac{[QMR(1) + \dots + QMR(K)]^2}{\frac{[QMR(1)]^2}{GLRES_1} + \dots + \frac{[QMR(k)]^2}{GLRES_k}}$$

$$\text{com } GLRES(K) < n < \sum_{k=1}^K GLRES(K),$$

e

$$n' = \frac{(I-1)(K-1)^2 V_1}{(K-2)V_2 + V_1^2},$$

Onde I=número de tratamentos e K é o número de experimentos.

$$V_1 = \frac{\sum_{k=1}^K QMR(K)}{k} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{\sum_{k=1}^K [QMR(k)]^2}{k}$$

QMR(k) é o quadrado médio residual referente a k-ésimo experimento.

6.2 Exemplo: Experimentos de competição de variedades de milho

Os dados a seguir são de 4 experimentos de competição de variedades de milho, instalados em quatro municípios, instalados e conduzidos no delineamento em blocos casualizados. Os valores estão em toneladas/ha.

Tabela 50: Experimentos de competição de variedades de milho (t/ha)- Local 1.

Variedades	Blocos			
	I	II	III	IV
Agrocere	3,4	3,0	3,1	3,2
Azteca	2,7	2,9	2,8	3,0
Armour	2,6	2,5	2,1	2,4
IAC-75	3,1	3,3	3,4	3,0
IAC-115	2,0	1,9	2,2	2,2

Tabela 51: Experimentos de competição de variedades de milho (t/ha)- Local 2.

Variedades	Blocos			
	I	II	III	IV
Agrocere	2,9	3,5	3,2	3,3
Azteca	2,6	2,8	3,0	3,1
Armour	2,3	2,6	2,2	2,3
IAC-75	3,2	3,4	3,3	3,1
IAC-115	2,1	1,8	2,0	1,9

Tabela 52: Experimentos de competição de variedades de milho (t/ha)- Local 3.

Variedades	Blocos			
	I	II	III	IV
Agrocere	3,3	3,1	3,2	3,4
Azteca	2,7	2,8	3,0	2,9
Armour	2,4	2,5	2,3	2,3
IAC-75	3,1	3,3	3,4	3,3
IAC-115	2,0	1,7	1,9	2,1

Tabela 53: Experimentos de competição de variedades de milho (t/ha)- Local 4.

Variedades	Blocos			
	I	II	III	IV
Agrocere	3,0	3,0	3,1	3,2
Azteca	2,8	2,9	3,0	2,9
Armour	2,1	2,3	2,0	2,4
IAC-75	3,2	3,4	3,1	3,3
IAC-115	2,1	1,8	2,2	1,9

Para cada experimento adota-se o modelo

$$y_{ij(k)} = \mu + v_i + b_j + \epsilon_{ij(k)}$$

com $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3, 4$

As hipóteses testadas para cada experimento são as seguintes, considerando o efeito de variedades como fixos:

$$H_0 : v_1 = v_2 = \dots = v_i \quad \forall i$$

$$H_1 : v_i \neq v_{i'} \quad \text{para pelo menos um par} \quad \text{com } i \neq i'$$

O resumo dos resultados das ANOVAS para variedades é

<i>Local</i>	<i>QMRES</i>	<i>F</i>
1	0,0364	26,67 **
2	0,0353	36,52 **
3	0,0181	74,91 **
4	0,0227	53,83 **

Em todos os locais ou experimentos analisados, rejeita-se H_0 ao nível de 1% de significância, pois,

$$\frac{QMVariedades}{QMResíduo} \geq F_{0,01}(4, 12)$$

6.2.1 Análise conjunta

Para realizar a análise conjunta, envolvendo todos os experimentos, é necessário que ocorra homocedasticidade entre os experimentos.

Assim, aplicando-se o teste de Hartley aos quadrados médios dos resíduos dos experimentos tem-se que

$$F_{max} = \frac{0,0364}{0,0181} = 2,0 \text{ NS}$$

Pela tabela de hartley tem-se que $H_{0,05}(4, 12) = 4,79$, logo, não se rejeita a hipótese de homocedasticidade entre as variâncias dos experimentos realizados em diferentes locais. Pode-se então, considerar todos os experimentos em uma única análise conjunta.

O modelo estatístico adotado para esta análise é

$$y_{ijk} = \mu + v_i + b_{j(k)} + l_k + (vl)_{ik} + \epsilon_{ijk}$$

com

$i = 1, \dots, I$ (variedades)

$j = 1, \dots, J$ (Blocos)

$k = 1, \dots, K$ (Experimentos ou locais)

μ = um constante;

v_i =efeito da i-ésima variedade;

$b_{j(k)}$ = efeito do j-ésimo bloco no k-ésimo local com $b_j \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_b^2)$

l_k = efeito do k-ésimo local com $l_k \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_l^2)$

$(vl)_{ik}$ = é o efeito da interação entre a i-ésima variedade e o k-ésimo local com $(vl)_{ik} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma_{vl}^2)$

ϵ_{ijk} = é o erro experimental associado a observação y_{ijk} com $\epsilon_{ijk} \stackrel{IID}{\sim} N(0, \sigma^2)$

Dessa maneira, o esquema da análise de variância fica da seguinte forma:

Tabela 54: Esquema da análise de variância para a análise de grupos de experimentos. Modelo com blocos.

Causas de Variação	GL	E(QM)
Blocos d. Locais	K(J-1)	$\sigma^2 + I\sigma_b^2$
Locais	J-1	$\sigma^2 + J\sigma_{vl}^2 + I\sigma_b^2 + IJ\sigma_l^2$
Variedades	I-1	$\sigma^2 + J\sigma_{vl}^2 + KJ \sum_{i=1}^I \frac{v_i^2}{I-1}$
LV	(J-1)(I-1)	$\sigma^2 + J\sigma_{vl}^2$
Resíduo	K(I-1)(J-1)	σ^2
Total	IJK-1	

Observe que neste caso é necessário uma composição dos Quadrados Médios para encontrar o valor de F para estudar os efeitos do modelo.

$$\text{Blocos d. Locais} = QM(\text{Blocos d. Locais})/QM(\text{Res})$$

$$\text{Locais} = QM(\text{Locais}) + QM(\text{Res})/QM(\text{Blocos d. Locais}) + QM(LV)$$

$$\text{Variedades} = QM(\text{Variedades})/QM(LV)$$

$$LV = QM(LV)/QM(\text{Res})$$

O resultado da análise conjunta é a seguinte:

Tabela 55: Análise de Variância para a análise de grupos de experimentos.

Causas de Variação	GL	Soma de Quadrados	Quadrados Médios	F calculado
Blocos d. locais	12	0,1810	0,0151	
Locais	3	0,0385	0,0128	1,28 NS
Variedades	4	19,1495	4,7874	284,96**
VL	12	0,2015	0,0168	0,60NS
Resíduo médio	48	1,3490	0,0281	
Total	79	20,9195		

Neste caso, rejeita-se apenas a hipótese nula pra Variedades, ou seja, existe pelo menos um contraste significativo entre médias de variedades ao nível de 1% de significância.

6.3 Exercício

Considere os seguintes experimentos, conduzidos no delineamento em blocos completos casualizados, onde foi avaliada a maciez de diferentes marcas de giz por diferentes grupos de pessoas (Notas de 0 a 10). Fazer a análise conjunta destes experimentos.

Tabela 56: Experimento 1.

Marca do Giz	Blocos (Pessoas)						
	1	2	3	4	5	6	7
Piratininga	5,3	3,4	2,0	4,6	4,0	6,2	5,8
Maracanã	8,7	9,4	1,0	8,9	7,9	4,4	8,7
Delta	3,7	6,7	8,0	3,2	4,9	4,7	2,9
Big Giz	3,7	2,1	4,9	7,5	5,9	6,1	3,8

Tabela 57: Experimento 2.

Marca do Giz	Blocos (Pessoas)						
	1	2	3	4	5	6	7
Piratininga	7,9	7,0	1,4	4,8	6,0	8,8	5,8
Maracanã	8,9	7,6	9,4	7,5	6,6	6,4	9,3
Delta	6,9	3,1	8,3	3,3	5,2	7,5	3,9
Big Giz	2,3	6,2	6,0	3,3	3,5	2,9	8,3

Tabela 58: Experimento 3.

Marca do Giz	Blocos (Pessoas)						
	1	2	3	4	5	6	7
Piratininga	1,5	1,9	2,4	5,1	7,9	6,0	2,5
Maracanã	6,2	6,5	8,6	8,5	5,9	7,6	8,5
Delta	4,0	5,1	5,4	3,3	4,1	3,0	3,9
Big Giz	8,5	8,1	9,3	2,3	6,8	4,5	7,1

7 Análise de covariância (ANCOVA)

7.1 Introdução

Em alguns experimentos, pode ser muito difícil e até impossível obter unidades experimentais semelhantes. Por exemplo, pode-se não ter cobaias de mesmo peso, motores com o mesmo tempo de funcionamento, corpos de prova com mesmo tamanho etc. Mas, em todos estes casos, quando a condição inicial da unidade experimental for conhecida e puder ser medida, e ainda, que seja conhecido que esta condição inicial (uma variável) tenha influência sobre a variável resposta, pode-se utilizar esta informação para corrigir a variável resposta. Tal, procedimento pode ser feito utilizando-se da técnica de análise de covariância.

A variável medida na condição inicial da unidade experimental é chamada de *covariável* (ou ainda, variável auxiliar, variável concomitante). Em um mesmo experimento, pode haver mais de uma covariável.

A covariável complementa o controle local e na grande maioria das situações simplesmente o substitui.

Obviamente, a covariável necessita estar correlacionada com a variável resposta para que se possa fazer uso de tal análise.

Quando a Análise de Variância é realizada com uma ou mais covariáveis, usa-se chamar a análise de ANCOVA². A ANCOVA permite que se faça um “ajuste” do efeito de uma variável resposta que sofreu influência de uma variável ou uma causa de variação não controlada.

A ANCOVA, permite, portanto, um controle do erro experimental, aumentando a precisão do experimento. é possível também fazer o ajuste das médias dos tratamentos em função da(s) covariável(eis) e, em alguns casos, estimar observações perdidas durante o experimento.

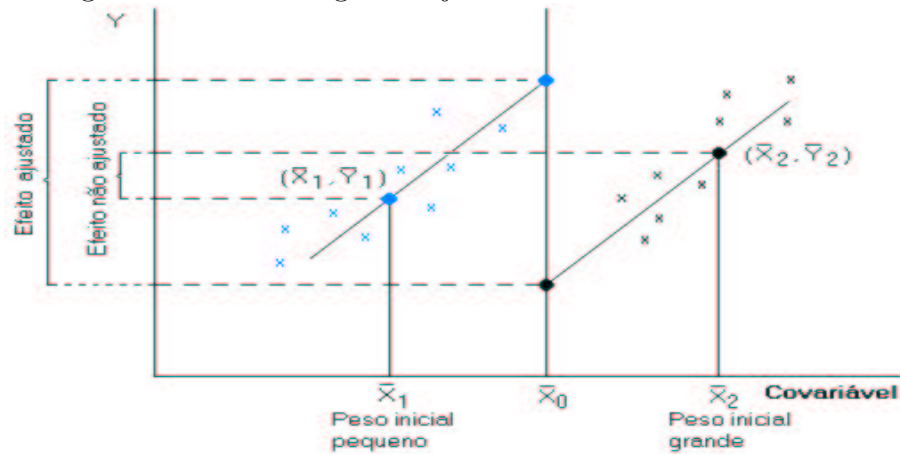
Para que uma covariável possa ser assim considerada, deve-se garantir que ela não seja afetada pelo tratamento. Por exemplo: ao utiliza-se como covariável o número de animais sobreviventes em uma gaiola, deve-se garantir que a causa da morte ou da perda dos animais durante o experimento não seja causada pelo efeito do tratamento. Neste caso, o uso da covariável é incorreto, pois será eliminado da análise uma possível fonte de variação conhecida: o próprio efeito do tratamento.

²**A**nalysis of **c**ovariance

Um situação bastante comum é quando existem animais de pesos diferentes e a variável resposta de interesse é o peso final dos animais. Neste caso, antes do início do experimento, o peso inicial dos animais é obtido e utilizado como covariável no experimento.

Graficamente, a forma de correção da variável resposta através da ANCOVA pode ser vista na figura 14.

Figura 14: Metodologia de ajuste da análise de covariância.



7.2 Modelo estatístico

Considere um experimento com um fator e uma covariável. O modelo estatístico pode ser escrito da seguinte maneira:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \epsilon_{ij} \quad (23)$$

onde

μ = constante;

α_i = efeito do i -ésimo tratamento;

X_{ij} = valor observado da covariável;

$\bar{X}$ = média da covariável;

β = coeficiente de regressão linear entre a covariável (X) e a variável resposta (Y), com $\beta \neq 0$. Neste caso, a relação deve ser linear.

Neste modelo, assume-se que a variável resposta e a covariável estão relacionadas linearmente.

Análise de Variância

Tabela 59: Análise de covariância.

	GL	SQ e Prod. Cruzados			Ajuste pela Regressão		
CV	GL	xx	xy	yy	y	GL	QM
Trat	a-1	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
Erro	a(n-1)	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$SQE = E_{yy} - \frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}$	a(n-1)-1	$\frac{SQE}{a(n-1)-1}$
Total	an -1	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$SQE' = S_{yy} - \frac{(S_{xy})^2}{S_{xx}}$	an-2	
Trat. aj.					$SQE - SQE'$	a-1	$\frac{SQE' - SQE}{a-1}$

Onde

$$S_{yy} = \sum_{ij}^{an} y_{ij} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$S_{xx} = \sum_{ij}^{an} x_{ij} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$S_{xy} = \sum_{ij}^{an} x_{ij}y_{ij} - \frac{(y_{..})(x_{..})}{an}$$

$$T_{xx} = \sum_i^a \frac{x_{i.}}{n} - \frac{(x_{..})^2}{an}$$

$$T_{xy} = \sum_i^a \frac{(x_{i.})(y_{i.})}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$T_{yy} = \sum_i^a \frac{y_{i.}}{n} - \frac{(y_{..})^2}{an}$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy}$$

$$E_{xx} = S_{xx} - T_{xx}$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$$

e

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} \quad (24)$$

O valor de F para tratamentos é obtido por:

$$F = \frac{\frac{SQE' - SQE}{A-1}}{\frac{SQE}{a(n-1)-1}} \quad (25)$$

E a hipótese $H_0 : \beta = 0$ pode ser testada por

$$F = \frac{\frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}}{\frac{E_{yy} - \frac{(E_{xy})^2}{E_{xx}}}{a(n-1)-1}} \sim F_{\alpha}(1, a(n-1)-1) \quad (26)$$

O ajuste da variável observada Y , pode ser entendido como

$$y_{ij} - \beta(X_{ij} - \bar{X}) = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad (27)$$

O ajuste de médias de tratamentos, pode ser feito da seguinte maneira

$$\bar{y}'_i = \bar{y}_i - \hat{\beta}(\bar{x}_i - \bar{x}_{..}) \quad (28)$$

7.3 Exemplo:

Considere o seguinte conjunto de dados onde foi medido a resistência de fios de algodão. A resposta avaliada foi o comprimento (cm) que o fio atingiu antes de se romper. Como cada fio possui um diâmetro diferente, e isso afeta a resistência, utilizou-se essa informação como covariável. Os dados estão na tabela 60. Três tipos de máquinas foram comparadas neste experimento.

O primeiro passo da análise é verificar se existe relação linear entre a variável e a covariável. Esta relação deve ser pelo menos aproximada.

O passo seguinte é calcular as somas de quadrados e produtos cruzados.

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 y_{ij}^2 - \frac{(y_{..})^2}{an} = (36^2 + \dots + 32^2) - \frac{(603)^2}{3 \times 5} = 346,40$$

Tabela 60: Comprimento (Y) e diâmetro (X) de fios de algodão.

Observação	Máquina 1		Máquina 2		Máquina 3	
	Y	X	Y	X	Y	X
1	36	20	40	22	35	21
2	41	25	48	28	37	23
3	39	24	39	22	42	26
4	42	25	45	30	34	21
5	49	32	44	28	32	15
Total	207	126	216	130	180	106

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 x_{ij}^2 - \frac{(x_{..})^2}{an} = (20^2 + \dots + 15^2) - \frac{(362)^2}{3 \times 5} = 261,73$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 (x_{ij})(y_{ij}) - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = (20 \times 36 + \dots + 15 \times 32) - \frac{(362)(603)}{3 \times 5} = 282,60$$

$$T_{yy} = \sum_{i=1}^3 \frac{(y_{i.})^2}{n} - \frac{(y_{..})^2}{an} = \frac{(207^2 + 216^2 + 180^2)}{5} - \frac{(603)^2}{15} = 140,4$$

$$T_{xx} = \sum_{i=1}^3 \frac{(x_{i.})^2}{n} - \frac{(x_{..})^2}{an} = \frac{(126^2 + 130^2 + 106^2)}{5} - \frac{(362)^2}{15} = 66,13$$

$$T_{xy} = \sum_{i=1}^3 \frac{(x_{i.})(y_{i.})}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an} = \frac{(126 \times 207 + 130 \times 216 + 106 \times 180)}{5} - \frac{(362)(603)}{15} = 96$$

$$E_{yy} = 346,4 - 140,4 = 206,0$$

$$E_{xx} = 261,73 - 66,13 = 195,6$$

$$E_{xy} = 282,6 - 96 = 186,6$$

$$SQE' = 346,4 - \frac{(282,6)^2}{261,73} = 41,27$$

$$SQE = 206 - \frac{(186,6)^2}{195,6} = 27,99$$

$SQE' - SQE = 41,27 - 27,99 = 13,28$ que é a soma de quadrados de tratamentos ajustada para a covariável.

O Coeficiente de regressão $\hat{\beta}$ pode ser obtido por

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = \frac{186,6}{195,6} = 0,954$$

Pode-se testar a hipótese $H_0 : \beta = 0$ por

$$F_{\beta} = \frac{(186,6)^2/195,6}{2,54} = 70,08$$

$$F_{0,01}(1, 11) = 9,65$$

Conclusão: rejeita-se a hipótese $H_0 : \beta = 0$ a um nível de significância de 1%, ou seja, a covariável realmente corrige a variável resposta. Dado que a covariável é significativa, pode-se fazer o ajuste de médias.

O valor de F para tratamentos é

$$F_{cal} = \frac{13,28/2}{27,99/11} = 2,61$$

$$F_{0,10}(2, 11) = 2,86$$

Conclusão: não rejeita-se a hipótese $H_0 : \alpha_i = 0 \quad \forall i$ a um nível de significância de 5%. Ou seja, não há diferença entre as máquinas, com relação ao comprimento dos fios de algodão (corrigido em função da covariável).

O ajuste de médias de tratamentos, por exemplo, para a máquina 1, pode ser feito da seguinte maneira:

$$\bar{y}'_{1.} = \bar{y}_{1.} - \hat{\beta}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{..}) \quad (29)$$

$$\bar{y}'_{1.} = 41,40 - 0,9540(25,20 - 24,13) = 40,34 \quad (30)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANZATTO D. A.; KRONKA, S. do N. **Experimentação agrícola**. Jaboticabal: UNESP, 1989.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistics for experiments: an introduction to design, data analysis and model building**, John Wiley & Sons, 1978.
- COCHRAN, W. G.; COX, G. M. **Experimental designs**. 2ED. New York: John Wiley & Sons, 1957.
- COX, D. R. **Planning of experiments**. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- FEDERER, W. T. **Statistical design and analysis for intercropping experiments, v.1: two crops**, New York: Springer-Verlag, 1993.
- HINKELMANN, K.; KEMPTHORNE, O. **Design and analysis of experiments. Volume I: introduction to experimental design**. John Wiley & Sons, 1994.
- MEAD, R. **The design the experiments: statistical principles for practical applications**. Cambridge University Press, 1988.
- MILLIKEN, G. A.; JOHNSON, D. E. **Analysis of messy data. Volume I: designed experiments**. New York: Chapman & Hall, 1992.
- MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 3ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- PEARCE, S. C. **The agricultural field experiments: a statistical examination of theory and practice**. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. 13ed. Piracicaba: ESALQ-USP, 1990.
- STEEL, R. G. D.; TORRIE, J. H. **Principles and procedures of statistics: a biometrical approach**. 2 ed. New York: McGraw-hill, 1980.
- VIEIRA, S. **Estatística experimental**. 2 ed. São Paulo:Atlas, 1999.
- WERKEMA, Maria Cristina Catarino; AGUIAR, Sílvio. **Planejamento e análise de experimentos: como identificar as principais variáveis influentes em um processo**. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, 1996.

8 TABELAS

Tabela 1: Limites unilaterais de F ao nível de 5% de probabilidade
 n1=número de graus de liberdade do numerador, n2= número de graus de liberdade do denominador

n2\ n1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83	1,80	1,78	1,75	1,73	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72	1,69	1,67	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,01

Tabela 2: Limites unilaterais de F ao nível de 1% de probabilidade

n1\n2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9	6083,4	6106,7	6125,8	6143,0	6157,0	6170,0	6208,7	6234,3	6260,4	6286,4	6313,0	6339,5	6365,6
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42	99,43	99,43	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92	26,87	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25	14,20	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,82	9,77	9,72	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,56	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,31	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,52	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01	4,96	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,56	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29	4,25	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05	4,01	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86	3,82	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70	3,66	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61	3,56	3,52	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,49	3,45	3,41	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40	3,35	3,31	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27	3,23	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24	3,19	3,15	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,09	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17	3,12	3,07	3,03	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12	3,07	3,02	2,98	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07	3,02	2,97	2,93	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03	2,98	2,93	2,89	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94	2,89	2,85	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96	2,90	2,86	2,81	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93	2,87	2,82	2,78	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90	2,84	2,79	2,75	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,74	2,70	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61	2,56	2,52	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,44	2,39	2,35	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60	1,48
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34	2,28	2,23	2,19	2,15	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	2,13	2,08	2,04	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,01

Tabela 3: Valores de t em níveis de 10% a 0,1% de probabilidade.

GLRES	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,30

Tabela 4: Valores da amplitude total estudentizada (q), para uso no teste de Tukey, ao nível de 5% de probabilidade.
I=número de tratamentos, GLRES= número de graus de liberdade do residuo.

GLRES\I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17,97	26,98	32,82	37,08	40,41	43,40	45,40	47,36	49,07	50,59	51,96	53,20	54,33	55,36	56,32	57,22	58,04	58,83	59,56
2	6,09	8,33	9,80	10,88	11,74	12,44	13,03	13,54	13,99	14,39	14,75	15,08	15,33	15,65	15,91	16,14	16,37	16,57	16,77
3	4,50	5,91	6,83	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,72	9,95	10,15	10,35	10,53	10,69	10,84	10,98	11,11	11,24
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83	8,03	8,21	8,37	8,53	8,66	8,79	8,91	9,03	9,13	9,23
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	7,00	7,17	7,32	7,47	7,60	7,72	7,83	7,93	8,03	8,12	8,21
6	3,46	4,34	4,90	5,31	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14	7,24	7,34	7,43	7,51	7,59
7	3,34	4,17	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,30	6,43	6,55	6,66	6,76	6,85	6,94	7,02	7,10	7,17
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48	6,57	6,65	6,73	6,80	6,87
9	3,20	3,95	4,42	4,76	5,02	5,24	5,43	5,60	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28	6,36	6,44	6,51	6,58	6,64
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,31	5,46	5,60	5,72	5,83	5,94	6,03	6,11	6,19	6,27	6,34	6,41	6,47
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,33
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,40	5,51	5,62	5,71	5,80	5,88	5,95	6,02	6,09	6,15	6,21
13	3,06	3,74	4,15	4,45	4,69	4,89	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79	5,86	5,93	6,00	6,06	6,11
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71	5,79	5,85	5,92	5,97	6,03
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,60	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31	5,40	5,49	5,57	5,65	5,72	5,79	5,85	5,90	5,96
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59	5,66	5,73	5,79	5,84	5,90
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,71	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54	5,61	5,68	5,73	5,79	5,84
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,50	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,50	5,57	5,63	5,69	5,74	5,79
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,32	5,39	5,46	5,53	5,59	5,65	5,70	5,75
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,11	5,20	5,28	5,36	5,43	5,49	5,55	5,61	5,66	5,71
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,10	5,18	5,25	5,32	5,38	5,44	5,49	5,55	5,59
30	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82	4,92	5,00	5,08	5,15	5,21	5,27	5,33	5,38	5,43	5,48
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,64	4,74	4,82	4,90	4,98	5,04	5,11	5,16	5,22	5,27	5,31	5,36
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,00	5,06	5,11	5,15	5,20	5,24
120	2,80	3,36	3,69	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,90	4,95	5,00	5,04	5,09	5,13
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,69	4,74	4,80	4,85	4,89	4,93	4,97	5,01

Tabela 5: Valores da amplitude total estudentizada (z), para uso no teste de Duncan, ao nível de 5% de probabilidade.
 I =número de médias abrangidas pelo contraste, $GLRES$ = número de graus de liberdade do resíduo.

$n \setminus I$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	50	100
1	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00	18,00
2	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09	6,09
3	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
4	3,93	4,01	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02
5	3,64	3,74	3,79	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83	3,83
6	3,46	3,58	3,64	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68	3,68
7	3,35	3,47	3,54	3,58	3,60	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61	3,61
8	3,26	3,39	3,47	3,52	3,55	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56	3,56
9	3,20	3,34	3,41	3,47	3,50	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52	3,52
10	3,15	3,30	3,37	3,43	3,46	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47	3,47
11	3,11	3,27	3,35	3,39	3,43	3,44	3,45	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46
12	3,08	3,23	3,33	3,36	3,40	3,42	3,44	3,44	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46
13	3,06	3,21	3,30	3,35	3,38	3,41	3,42	3,44	3,45	3,45	3,46	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
14	3,03	3,18	3,27	3,33	3,37	3,39	3,41	3,42	3,44	3,45	3,46	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
15	3,01	3,16	3,25	3,31	3,36	3,38	3,40	3,42	3,43	3,44	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
16	3,00	3,15	3,23	3,30	3,34	3,37	3,39	3,41	3,43	3,44	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
17	2,98	3,13	3,22	3,28	3,33	3,36	3,38	3,40	3,42	3,44	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
18	2,97	3,12	3,21	3,27	3,32	3,35	3,37	3,39	3,41	3,43	3,45	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
19	2,96	3,11	3,19	3,26	3,31	3,35	3,37	3,39	3,41	3,43	3,44	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
20	2,95	3,10	3,18	3,25	3,30	3,34	3,36	3,38	3,40	3,43	3,44	3,46	3,46	3,47	3,47	3,47
22	2,93	3,08	3,17	3,24	3,29	3,32	3,35	3,37	3,39	3,42	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
24	2,92	3,07	3,15	3,22	3,28	3,31	3,34	3,37	3,38	3,41	3,44	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
26	2,91	3,06	3,14	3,21	3,27	3,30	3,34	3,36	3,38	3,41	3,43	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
28	2,90	3,04	3,13	3,20	3,26	3,30	3,33	3,35	3,37	3,40	3,43	3,45	3,46	3,47	3,47	3,47
30	2,89	3,04	3,12	3,20	3,25	3,29	3,32	3,35	3,37	3,40	3,43	3,44	3,46	3,47	3,47	3,47
40	2,86	3,01	3,10	3,17	3,22	3,27	3,30	3,33	3,35	3,39	3,42	3,44	3,46	3,47	3,47	3,47
60	2,83	2,98	3,08	3,14	3,20	3,24	3,28	3,31	3,33	3,37	3,40	3,43	3,45	3,47	3,48	3,48
100	2,80	2,95	3,05	3,12	3,18	3,22	3,26	3,29	3,32	3,36	3,40	3,42	3,45	3,47	3,53	3,53
∞	2,77	2,92	3,02	3,09	3,15	3,19	3,23	3,26	3,29	3,34	3,38	3,41	3,44	3,47	3,61	3,67

Tabela 6: Valores de t_{α} , para uso no teste de Dunnett, ao nível de 5% de probabilidade.
I=número de tratamentos, GLRES= número de graus de liberdade do resíduo.

GLRES\I-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20
5	2,57	3,03	3,29	3,48	3,62	3,73	3,82	3,90	3,97	4,03	4,09	4,14	4,26	4,42
6	2,45	2,86	3,10	3,26	3,39	3,49	3,57	3,64	3,71	3,76	3,81	3,86	3,97	4,11
7	2,36	2,75	2,97	3,12	3,24	3,33	3,41	3,47	3,53	3,58	3,63	3,67	3,78	3,91
8	2,31	2,67	2,88	3,02	3,13	3,22	3,29	3,35	3,41	3,46	3,50	3,54	3,64	3,76
9	2,26	2,61	2,81	2,95	3,05	3,14	3,20	3,26	3,32	3,36	3,40	3,44	3,53	3,65
10	2,23	2,57	2,76	2,89	2,99	3,07	3,14	3,19	3,24	3,29	3,33	3,36	3,45	3,57
11	2,20	2,53	2,72	2,84	2,94	3,02	3,08	3,14	3,19	3,23	3,27	3,30	3,39	3,50
12	2,18	2,50	2,68	2,81	2,90	2,98	3,04	3,09	3,14	3,18	3,22	3,25	3,34	3,45
13	2,16	2,48	2,65	2,78	2,87	2,94	3,00	3,06	3,10	3,14	3,18	3,21	3,29	3,40
14	2,14	2,46	2,63	2,75	2,84	2,91	2,97	3,02	3,07	3,11	3,14	3,18	3,26	3,36
15	2,13	2,44	2,61	2,73	2,82	2,89	2,95	3,00	3,04	3,08	3,12	3,15	3,23	3,33
16	2,12	2,42	2,59	2,71	2,80	2,87	2,92	2,97	3,02	3,06	3,09	3,12	3,20	3,30
17	2,11	2,41	2,58	2,69	2,78	2,85	2,90	2,95	3,00	3,03	3,07	3,10	3,18	3,27
18	2,10	2,40	2,56	2,68	2,76	2,83	2,89	2,94	2,98	3,01	3,05	3,08	3,16	3,25
19	2,09	2,39	2,55	2,66	2,75	2,81	2,87	2,92	2,96	3,00	3,03	3,06	3,14	3,23
20	2,09	2,38	2,54	2,65	2,73	2,80	2,86	2,90	2,95	2,98	3,02	3,05	3,12	3,22
24	2,06	2,35	2,51	2,61	2,70	2,76	2,81	2,86	2,90	2,94	2,97	3,00	3,07	3,16
30	2,04	2,32	2,47	2,58	2,66	2,72	2,77	2,81	2,86	2,89	2,92	2,95	3,02	3,11
40	2,02	2,29	2,44	2,54	2,62	2,68	2,73	2,77	2,81	2,85	2,87	2,90	2,97	3,06
60	2,00	2,27	2,41	2,51	2,58	2,64	2,69	2,73	2,77	2,80	2,83	2,86	2,92	3,00
120	1,98	2,24	2,38	2,47	2,55	2,60	2,65	2,69	2,73	2,76	2,79	2,81	2,87	2,95
∞	1,96	2,21	2,35	2,44	2,51	2,57	2,61	2,65	2,69	2,72	2,74	2,77	2,83	2,91

Tabela 7: Distribuição de Qui-quadrado.

Valor crítico de χ^2 tal que $P(\chi_k^2 > \chi_0^2) = \alpha$.

GL	0,995	0,975	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00	0,00	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,05	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,22	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,48	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,83	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	1,24	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,69	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	2,18	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,73	2,70	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	3,25	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,82	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	4,40	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	5,01	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	5,63	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	6,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	6,91	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	7,56	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	8,23	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	8,91	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	9,59	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	10,28	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	10,98	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	11,69	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	12,40	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	13,12	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	13,84	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	14,57	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,46	15,31	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	16,05	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	16,79	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	24,43	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	32,36	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	40,48	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	48,76	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,17	57,15	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	65,65	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	74,22	124,34	129,56	135,81	140,17

Tabela 10: Limites superiores para o teste de Lilliefors.

n	0,2	0,15	0,1	0,05	0,01
4	0,3	0,319	0,352	0,381	0,417
5	0,285	0,299	0,315	0,337	0,405
6	0,265	0,277	0,319	0,319	0,364
7	0,247	0,258	0,276	0,3	0,348
8	0,233	0,244	0,261	0,285	0,331
9	0,223	0,233	0,249	0,271	0,311
10	0,215	0,224	0,239	0,258	0,294
11	0,206	0,217	0,23	0,249	0,284
12	0,199	0,212	0,223	0,242	0,275
13	0,19	0,202	0,214	0,234	0,268
14	0,183	0,194	0,207	0,227	0,261
15	0,177	0,187	0,201	0,22	0,257
16	0,173	0,182	0,195	0,213	0,25
17	0,169	0,177	0,189	0,206	0,245
18	0,166	0,173	0,184	0,2	0,239
19	0,163	0,169	0,179	0,195	0,235
20	0,16	0,166	0,174	0,19	0,231
25	0,142	0,147	0,158	0,173	0,2
30	0,131	0,136	0,144	0,161	0,187
> 30	$\frac{0,736}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,768}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,805}{\sqrt{n}}$	$\frac{0,886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,031}{\sqrt{n}}$