Matrizes ortogonais

Ademir Alves Ribeiro

UFPR - 2021
https://youtu.be/uKz0-4rbfY8

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Exemplos em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Exemplos em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Lema

Toda matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é da forma A_1 ou A_2.

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Exemplos em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Lema

Toda matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é da forma A_1 ou A_2.

- Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal;

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Exemplos em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Lema

Toda matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é da forma A_1 ou A_2.

- Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal;
- Então, $A^T A = AA^T = I$;

Matrizes ortogonais em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Definição

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal quando $A^T A = I$.

Exemplos em $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Lema

Toda matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é da forma A_1 ou A_2.

- Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal;
- Então, $A^T A = AA^T = I$;
- $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1$;
- $ab + cd = ac + bd = 0$.

Uma forma conveniente de ver Ax

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O produto Ax é a combinação linear das colunas de A, tendo como coeficientes as componentes de x.

Uma forma conveniente de ver Ax

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O produto Ax é a combinação linear das colunas de A, tendo como coeficientes as componentes de x.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Uma forma conveniente de ver Ax

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O produto Ax é a combinação linear das colunas de A, tendo como coeficientes as componentes de x.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Uma forma conveniente de ver Ax

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. O produto Ax é a combinação linear das colunas de A, tendo como coeficientes as componentes de x.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m \times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s \times r}$ tal que $AP = QB$.

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m \times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s \times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m\times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s\times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;
- Defina $B = (b_1 \cdots b_r) \in \mathbb{R}^{s\times r}$;

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m \times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s \times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;
- Defina $B = (b_1 \cdots b_r) \in \mathbb{R}^{s \times r}$;
- $AP = (Au_1 \cdots Au_r)$

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m \times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s \times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;
- Defina $B = (b_1 \cdots b_r) \in \mathbb{R}^{s \times r}$;
- $AP = (Au_1 \cdots Au_r) = (Qb_1 \cdots Qb_r)$

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m\times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s\times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;
- Defina $B = (b_1 \cdots b_r) \in \mathbb{R}^{s\times r}$;
- $AP = (Au_1 \cdots Au_r) = (Qb_1 \cdots Qb_r) = QB$.

Uma forma conveniente de ver $[v_1, \ldots, v_s]$

Lema

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^m$, $P = (u_1 \cdots u_r) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $Q = (v_1 \cdots v_s) \in \mathbb{R}^{m\times s}$ e suponha que $Au_j \in [v_1, \ldots, v_s]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então, existe $B \in \mathbb{R}^{s\times r}$ tal que $AP = QB$.

- Para $j = 1, \ldots, r$, seja $b_j \in \mathbb{R}^s$ tal que $Au_j = Qb_j$;
- Defina $B = (b_1 \cdots b_r) \in \mathbb{R}^{s\times r}$;
- $AP = (Au_1 \cdots Au_r) = (Qb_1 \cdots Qb_r) = QB$.

Corolário

Suponha que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ cumprem $Au_j \in [u_1, \ldots, u_r]$ para $j = 1, \ldots, r$. Então existe $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$ tal que $AP = PB$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T (\lambda u_1)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T (\lambda u_1) = (A u_1)^T (A u_1) = u_1^T A^T A u_1$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^T A u_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^T A^T A u_j$

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^T A u_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^T A^T A u_j = 0$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(u_1\ P_2)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \dots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \dots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(u_1\ P_2) = (\lambda u_1\ P_2B)$

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^TA^TAu_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^TAu_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^TA^TAu_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(u_1\ P_2) = (\lambda u_1\ P_2B) = (u_1\ P_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T (\lambda u_1) = (A u_1)^T (A u_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \dots, n$;
- $\lambda u_1^T A u_j = (A u_1)^T (A u_j) = u_1^T A^T A u_j = 0 \Rightarrow A u_j \in [u_2, \dots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1 \; u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $A P_2 = P_2 B$;
- $AP = A(u_1 \; P_2) = (\lambda u_1 \; P_2 B) = (u_1 \; P_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;

UFPR

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Seja $u_1 \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário de A associado a λ;
- Note que $\lambda^2 = (\lambda u_1)^T(\lambda u_1) = (Au_1)^T(Au_1) = u_1^T A^T A u_1 = 1$;
- Considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 2, \ldots, n$;
- $\lambda u_1^T A u_j = (Au_1)^T(Au_j) = u_1^T A^T A u_j = 0 \Rightarrow Au_j \in [u_2, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P = (u_1\ u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P_2 = (u_2 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $AP_2 = P_2 B$;
- $AP = A(u_1\ P_2) = (\lambda u_1\ P_2 B) = (u_1\ P_2)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $P^T P = I$ e $B^T B = I$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^TP = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^TP = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \cdots u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^T P = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I;$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^T P = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I;$
- $B^T B = (P_2 B)^T (P_2 B)$

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^T P = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I;$
- $B^T B = (P_2 B)^T (P_2 B) = (AP_2)^T (AP_2)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, isto é, $A^T A = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^T P = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I;$
- $B^T B = (P_2 B)^T (P_2 B) = (AP_2)^T (AP_2) = P_2^T A^T A P_2$

Lema 1

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, isto é, $A^TA = I$. Suponha que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Então existem matrizes ortogonais $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- $P^TP = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} (u_1 \ \cdots u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I;$
- $B^TB = (P_2B)^T(P_2B) = (AP_2)^T(AP_2) = P_2^TA^TAP_2 = I.$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\quad B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\big(p_j(A)\big) = 0$ para algum j;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2 v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2 v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\;B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\big(p_j(A)\big) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?
- Sejam $P_1 = (u_1\ u_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que $AP_1 = P_1R$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?
- Sejam $P_1 = (u_1\ u_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que $AP_1 = P_1R$;
- Note que $R^T R = (P_1R)^T (P_1R)$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?
- Sejam $P_1 = (u_1\ u_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que $AP_1 = P_1R$;
- Note que $R^T R = (P_1R)^T (P_1R) = (AP_1)^T (AP_1)$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?
- Sejam $P_1 = (u_1 \ u_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que $AP_1 = P_1R$;
- Note que $R^T R = (P_1R)^T (P_1R) = (AP_1)^T (AP_1) = P_1^T A^T AP_1$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Polinômio característico de A: $p(t) = \prod_{j=1}^{n/2} p_j(t)$, p_j irredutível, $\partial p_j = 2$;
- Cayley-Hamilton: $p(A) = 0 \Rightarrow \det\left(p_j(A)\right) = 0$ para algum j;
- Existe $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $A^2 v + bAv + cv = p_j(A)v = 0$;
- $A(Av) = -bAv - cv \Rightarrow [v, Av]$ é invariante;
- Seja $\{u_1, u_2\}$ uma base ortonormal de $[v, Av]$. Por que $\dim([v, Av]) = 2$?
- Sejam $P_1 = (u_1 \ u_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ e $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que $AP_1 = P_1 R$;
- Note que $R^T R = (P_1 R)^T (P_1 R) = (AP_1)^T (AP_1) = P_1^T A^T AP_1 = I$;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal $(n > 2)$ e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T A u_j = R(P_1 R)^T A u_j$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \dots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal $(n > 2)$ e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1 R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^TAP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^TAu_j = R(P_1R)^TAu_j = R(AP_1)^TAu_j = RP_1^TA^TAu_j = RP_1^Tu_j$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T A u_j = R(P_1 R)^T A u_j = R(AP_1)^T A u_j = R P_1^T A^T A u_j = R P_1^T u_j = 0$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^{\perp} = [u_3, \ldots, u_n]$;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \dots, n$;
- $P_1^T A u_j = R(P_1 R)^T A u_j = R(A P_1)^T A u_j = R P_1^T A^T A u_j = R P_1^T u_j = 0$;
- $A u_j \in [u_1, u_2]^{\perp} = [u_3, \dots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T A P = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T A u_j = R(P_1 R)^T A u_j = R(AP_1)^T A u_j = R P_1^T A^T A u_j = R P_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2 B$;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1 R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^{\perp} = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2 B$;
- $AP = A(P_1\ P_2)$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1 R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2 B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1 R\ \ P_2 B)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \dots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \dots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $B^T B = I$;

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1 R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2 B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1 R\ \ P_2 B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $B^T B = I$;
- $B^T B = (P_2 B)^T (P_2 B)$

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^\perp = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $B^T B = I$;
- $B^T B = (P_2B)^T(P_2B) = (AP_2)^T(AP_2)$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^{\perp} = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $B^T B = I$;
- $B^T B = (P_2B)^T (P_2B) = (AP_2)^T (AP_2) = P_2^T A^T AP_2$

Decomposição de matrizes ortogonais

Lema 2

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal ($n > 2$) e suponha que A não possui autovalores reais. Então existem matrizes ortogonais $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Sejam $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $j = 3, \ldots, n$;
- $P_1^T Au_j = R(P_1R)^T Au_j = R(AP_1)^T Au_j = RP_1^T A^T Au_j = RP_1^T u_j = 0$;
- $Au_j \in [u_1, u_2]^{\perp} = [u_3, \ldots, u_n]$;
- Sejam $P_2 = (u_3 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ e $P = (P_1\ P_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
- Seja $B \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ tal que $AP_2 = P_2B$;
- $AP = A(P_1\ P_2) = (P_1R\ \ P_2B) = (P_1\ P_2)\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$;
- Resta ver que $B^T B = I$;
- $B^T B = (P_2B)^T(P_2B) = (AP_2)^T(AP_2) = P_2^T A^T AP_2 = I$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Ideia da indução

Se $P^T A P = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ e $Q^T B_1 Q = \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, fazendo $U = P \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, temos $U^T A U = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Teorema 1

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, com $n = 2m$, existem $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $j = 1, \ldots, m$, e uma matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $P^T AP = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix}$, sendo

- $R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, m$, se $\det(A) = 1$;
- $R_1 = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 & -c_1 \end{pmatrix}$ e $R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$, $j = 2, \ldots, m$, se $\det(A) = -1$.

Obs.: por simplicidade, denotamos $c_j = \cos\theta_j$ e $s_j = \sin\theta_j$.

Decomposição de matrizes ortogonais

Teorema 2

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, com $n = 2m+1$, existem $\theta_j \in [0, 2\pi)$, $j = 1, \ldots, m$, e uma matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix}$, onde

$R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, m$ e

- $\lambda = 1$, se $\det(A) = 1$;
- $\lambda = -1$, se $\det(A) = -1$.