Conexidade de $SO(n, \mathbb{R})$ e $GL_+(n, \mathbb{R})$

Ademir Alves Ribeiro

UFPR - 2021
https://youtu.be/M-bGgFVEeR0

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

$SO(n, \mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Sejam $n = 2m$ e $A \in SO(n, \mathbb{R})$.

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Sejam $n = 2m$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$. Denote $c_j = \cos\theta_j$ e $s_j = \sin\theta_j$;

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Sejam $n = 2m$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$. Denote $c_j = \cos\theta_j$ e $s_j = \sin\theta_j$;
- Considere $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal e $R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$ tais que

$$A = P \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$$

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Sejam $n = 2m$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$. Denote $c_j = \cos\theta_j$ e $s_j = \sin\theta_j$;
- Considere $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal e $R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$ tais que

$$A = P \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$$

- Defina $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ por $f(t) = P \begin{pmatrix} R_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m(t) \end{pmatrix} P^T$,

onde $R_j(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_j) & -\sin(t\theta_j) \\ \sin(t\theta_j) & \cos(t\theta_j) \end{pmatrix}$;

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Sejam $n = 2m$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$. Denote $c_j = \cos\theta_j$ e $s_j = \sin\theta_j$;
- Considere $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal e $R_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j \\ s_j & c_j \end{pmatrix}$ tais que

$$A = P \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$$

- Defina $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ por $f(t) = P \begin{pmatrix} R_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_m(t) \end{pmatrix} P^T$,

  onde $R_j(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_j) & -\sin(t\theta_j) \\ \sin(t\theta_j) & \cos(t\theta_j) \end{pmatrix}$;
- f está bem definida, é contínua, $f(0) = I$ e $f(1) = A$.

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Considere agora $n = 2m+1$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$.

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Considere agora $n = 2m+1$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$.
- $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Considere agora $n = 2m+1$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$.
- $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$
- Defina $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ por $f(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m(t) \end{pmatrix} P^T,$

  onde $R_j(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_j) & -\sin(t\theta_j) \\ \sin(t\theta_j) & \cos(t\theta_j) \end{pmatrix};$

$SO(n,\mathbb{R})$ - Special orthogonal group

Lema 1

$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I, \det(A) = 1\}$ é conexo por caminhos.

- Considere agora $n = 2m+1$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$.
- $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m \end{pmatrix} P^T;$
- Defina $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ por $f(t) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_m(t) \end{pmatrix} P^T,$

  onde $R_j(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\theta_j) & -\sin(t\theta_j) \\ \sin(t\theta_j) & \cos(t\theta_j) \end{pmatrix};$
- f está bem definida, é contínua, $f(0) = I$ e $f(1) = A$.

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

Lema 2

O conjunto $GL_+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;
- $A^T A = VDV^T$, com $V^T V = I, \;\; D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;
- $A^T A = VDV^T$, com $V^T V = I,\ \ D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;

UFPR

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I,\ \ D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I,\ \ D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^TQ = VNV^TA^TAVNV^T = I$;

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I$, $D = \text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \text{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^TQ = VNV^TA^TAVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^TVMV^T$

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;
- $A^T A = VDV^T$, com $V^T V = I, \;\; D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ e $N = \operatorname{diag}(1/\sqrt{\lambda_1}, \ldots, 1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^T Q = VNV^T A^T AVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^T VMV^T = A$

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;
- $A^T A = VDV^T$, com $V^T V = I$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^T Q = VNV^T A^T AVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^T VMV^T = A$ e $\det(Q) = \det(A)/\det(P) > 0$;

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^TQ = VNV^TA^TAVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^TVMV^T = A$ e $\det(Q) = \det(A)/\det(P) > 0$;
- Seja $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ contínua com $f(0) = I$ e $f(1) = Q$;

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- $A^T A$ é simétrica e definida positiva;
- $A^T A = VDV^T$, com $V^T V = I,\;\; D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^T Q = VNV^T A^T AVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^T VMV^T = A$ e $\det(Q) = \det(A)/\det(P) > 0$;
- Seja $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ contínua com $f(0) = I$ e $f(1) = Q$;
- Defina $g : [0,1] \to GL_+(n,\mathbb{R})$ por $g(t) = f(t)P$;

UFPR

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I$, $\;D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^TQ = VNV^TA^TAVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^TVMV^T = A$ e $\det(Q) = \det(A)/\det(P) > 0$;
- Seja $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ contínua com $f(0) = I$ e $f(1) = Q$;
- Defina $g : [0,1] \to GL_+(n,\mathbb{R})$ por $g(t) = f(t)P$;
- Assim, g está bem definida, $g(0) = P$ e $g(1) = A$;

$GL(n,\mathbb{R})$ - General linear group

Lema 2

O conjunto $GL_+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) > 0\}$ é conexo por caminhos.

- Vamos primeiro escrever $A = QP$, com P definida positiva e Q ortogonal;
- A^TA é simétrica e definida positiva;
- $A^TA = VDV^T$, com $V^TV = I$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ e $\lambda_j > 0$;
- Defina $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ e $N = \mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_1},\ldots,1/\sqrt{\lambda_n})$;
- A matriz $P = VMV^T$ é simétrica e definida positiva;
- $Q = AVNV^T$ é ortogonal, pois $Q^TQ = VNV^TA^TAVNV^T = I$;
- Temos $QP = AVNV^TVMV^T = A$ e $\det(Q) = \det(A)/\det(P) > 0$;
- Seja $f : [0,1] \to SO(n,\mathbb{R})$ contínua com $f(0) = I$ e $f(1) = Q$;
- Defina $g : [0,1] \to GL_+(n,\mathbb{R})$ por $g(t) = f(t)P$;
- Assim, g está bem definida, $g(0) = P$ e $g(1) = A$;
- Defina $h : [0,1] \to GL_+(n,\mathbb{R})$ por $h(t) = (1-t)I + tP$.