Os Teoremas do Valor Médio

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/iPTmIb4iu9s

PPGM UFPR
Programa de Pós-Graduação em Matemática

UFPR

TVM 1

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Defina $v = b - a$ e suponha que exista $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(c)$.

Os Teoremas do Valor Médio (TVM)

TVM 1

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Defina $v = b - a$ e suponha que exista $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(c)$.

TVM 2

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Os Teoremas do Valor Médio (TVM)

TVM 1

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Defina $v = b - a$ e suponha que exista $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(c)$.

TVM 2

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial v}(c) = \nabla f(c)^T v = f'(c)v$.

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$;

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$;
- $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$, $c = a + \theta(b-a) = \begin{pmatrix} 2\pi\theta \\ 2\pi\theta \end{pmatrix}$;

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$;
- $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$, $c = a + \theta(b-a) = \begin{pmatrix} 2\pi\theta \\ 2\pi\theta \end{pmatrix}$;
- $f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$;
- $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$, $c = a + \theta(b-a) = \begin{pmatrix} 2\pi\theta \\ 2\pi\theta \end{pmatrix}$;
- $f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $f'(c)(b-a) = \begin{pmatrix} -\sin c_1 & 0 \\ 0 & \cos c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \sin c_1 \\ 2\pi \cos c_2 \end{pmatrix}$;

Os Teoremas do Valor Médio (TVM)

Conjectura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável e $[a,b] \subset U$. Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$?

- Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$;
- $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$, $c = a + \theta(b-a) = \begin{pmatrix} 2\pi\theta \\ 2\pi\theta \end{pmatrix}$;
- $f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $f'(c)(b-a) = \begin{pmatrix} -\sin c_1 & 0 \\ 0 & \cos c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \sin c_1 \\ 2\pi \cos c_2 \end{pmatrix}$;
- Não existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

- $\|f(x) - f(y)\|_\infty = |\nabla f_i(c^i)^T (x-y)|$

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

- $\|f(x) - f(y)\|_\infty = |\nabla f_i(c^i)^T (x-y)| \leq \|\nabla f_i(c^i)\|_2 \|x-y\|_2$;

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1,\ldots,m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

- $\|f(x) - f(y)\|_\infty = |\nabla f_i(c^i)^T(x-y)| \leq \|\nabla f_i(c^i)\|_2 \|x-y\|_2$;
- Mas $\|\nabla f_i(c^i)\|_2 \leq \|f'(c^i)\|_F$

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1,\ldots,m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

- $\|f(x) - f(y)\|_\infty = |\nabla f_i(c^i)^T(x-y)| \leq \|\nabla f_i(c^i)\|_2 \|x-y\|_2$;
- Mas $\|\nabla f_i(c^i)\|_2 \leq \|f'(c^i)\|_F \leq M$;

Vale algo similar, do tipo $f(b) - f(a) = ???(b-a)$?

TVM 3

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $[a,b] \subset U$. Suponha que f seja diferenciável em todo ponto $x \in (a,b)$. Então existem vetores $c^i \in (a,b)$, $i = 1,\ldots,m$, tais que

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(c^1)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(c^m)^T \end{pmatrix} (b-a) = \begin{pmatrix} f_1'(c^1) \\ \vdots \\ f_m'(c^m) \end{pmatrix} (b-a).$$

TVM 4 (Corolário) - Desigualdade do Valor Médio - normas arbitrárias

Se U é convexo e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então existe $L > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ para todos $x, y \in U$.

- $\|f(x) - f(y)\|_\infty = |\nabla f_i(c^i)^T (x-y)| \leq \|\nabla f_i(c^i)\|_2 \|x-y\|_2$;
- Mas $\|\nabla f_i(c^i)\|_2 \leq \|f'(c^i)\|_F \leq M$;
- Usando a equivalência de normas, o resultado segue.

Desigualdades do Valor Médio

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

Desigualdades do Valor Médio

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$;

Desigualdades do Valor Médio

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $g(b) - g(a) = h(1) - h(0)$;

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $g(b) - g(a) = h(1) - h(0)$;
- $\|h'(t)\| = \|g'\big((1-t)a+tb\big)(b-a)\|$

Desigualdades do Valor Médio

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $g(b) - g(a) = h(1) - h(0)$;
- $\|h'(t)\| = \|g'\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\| \leq \beta(b-a)$;

Desigualdades do Valor Médio

TVM 5 - Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em (a,b). Se existe $\beta > 0$ tal que $\|g'(t)\| \leq \beta$ para todo $t \in (a,b)$, então $\|g(b) - g(a)\| \leq \beta(b-a)$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = g\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $g(b) - g(a) = h(1) - h(0)$;
- $\|h'(t)\| = \|g'\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\| \leq \beta(b-a)$;
- Portanto, basta provar o seguinte

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1 - t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;

UFPR

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \;\; \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1 - t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $$\|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s;$$

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1 - t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t)\ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s$

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1 - t)\ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \;\; \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;
- Sejam $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;
- Sejam $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$ e $\bar{s} = \sup S$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \;\; \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;
- Sejam $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$ e $\bar{s} = \sup S$;
- Afirmamos que $\bar{s} = 1 - t$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- Ideia: mostrar que $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)(1-t) \ \ \forall \varepsilon > 0, \forall t \in (0,1)$;
- Daí, basta fazer $t \to 0^+$ com ε fixo, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma + \varepsilon$;
- E depois fazer $\varepsilon \to 0^+$, obtendo $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$;
- Considere então $\varepsilon > 0$ e $t \in (0,1)$ arbitrários e fixados;
- $\left\| \dfrac{h(t+s) - h(t)}{s} - h'(t) \right\| \leq \varepsilon$ para $s > 0$ suficientemente pequeno;
- $\|h(t+s) - h(t)\| - s\|h'(t)\| \leq \|h(t+s) - h(t) - sh'(t)\| \leq \varepsilon s$;
- $\|h(t+s) - h(t)\| \leq s\|h'(t)\| + \varepsilon s \leq (\gamma + \varepsilon)s$;
- Sejam $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$ e $\bar{s} = \sup S$;
- Afirmamos que $\bar{s} = 1 - t$;
- Suponha, por absurdo, que $\bar{s} < 1 - t$;

UFPR

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma + \varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S \quad \text{e} \quad t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s + (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s + (\gamma+\varepsilon)\bar{s} = (\gamma+\varepsilon)(\bar{s}+s)$;

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s + (\gamma+\varepsilon)\bar{s} = (\gamma+\varepsilon)(\bar{s}+s)$;
- $\bar{s} + s \in S$, uma contradição;

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s + (\gamma+\varepsilon)\bar{s} = (\gamma+\varepsilon)(\bar{s}+s)$;
- $\bar{s} + s \in S$, uma contradição;
- Assim, $\bar{s} = 1 - t$

Desigualdade do Valor Médio para caminhos

Lema

Seja $h : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ contínua, derivável em $(0,1)$. Se existe $\gamma > 0$ tal que $\|h'(t)\| \leq \gamma$ para todo $t \in (0,1)$, então $\|h(1) - h(0)\| \leq \gamma$.

- $S = \{s \in [0, 1-t] \mid \|h(t+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s\}$;
- $\bar{s} = \sup S$ e $t + \bar{s} < 1$;
- Tome $s > 0$ suficientemente pequeno de modo que $t + \bar{s} + s \leq 1$ e
- $\left\| \dfrac{h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})}{s} - h'(t+\bar{s}) \right\| \leq \varepsilon$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t+\bar{s})\| \leq (\gamma+\varepsilon)s$;
- $\|h(t+\bar{s}) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)\bar{s}$;
- $\|h(t+\bar{s}+s) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)s + (\gamma+\varepsilon)\bar{s} = (\gamma+\varepsilon)(\bar{s}+s)$;
- $\bar{s} + s \in S$, uma contradição;
- Assim, $\bar{s} = 1 - t$ e portanto, $\|h(1) - h(t)\| \leq (\gamma+\varepsilon)(1-t)$.

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua.

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$.

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $f(b) - f(a) = h(1) - h(0)$;

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $f(b) - f(a) = h(1) - h(0)$;
- Para $t \in (0,1)$, $\|h'(t)\| = \|f'\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\|$

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M>0$, $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $f:U\to\mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\|\leq M$ para todo $x\in(a,b)$. Então $\|f(b)-f(a)\|\leq M\|b-a\|$.

- Defina $h:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ por $h(t)=f\big((1-t)a+tb\big)$;
- Assim, $f(b)-f(a)=h(1)-h(0)$;
- Para $t\in(0,1)$, $\|h'(t)\|=\|f'\big((1-t)a+tb\big)(b-a)\|\leq M\|b-a\|$;

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $f(b) - f(a) = h(1) - h(0)$;
- Para $t \in (0,1)$, $\|h'(t)\| = \|f'\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\| \leq M\|b-a\|$;
- Assim, $\|f(b) - f(a)\|$

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $f(b) - f(a) = h(1) - h(0)$;
- Para $t \in (0,1)$, $\|h'(t)\| = \|f'\big((1-t)a+tb\big)(b-a)\| \leq M\|b-a\|$;
- Assim, $\|f(b) - f(a)\| = \|h(1) - h(0)\|$

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Então $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$.

- Defina $h : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $h(t) = f\big((1-t)a + tb\big)$;
- Assim, $f(b) - f(a) = h(1) - h(0)$;
- Para $t \in (0,1)$, $\|h'(t)\| = \|f'\big((1-t)a + tb\big)(b-a)\| \leq M\|b-a\|$;
- Assim, $\|f(b) - f(a)\| = \|h(1) - h(0)\| \leq M\|b-a\|$.

Desigualdade do Valor Médio - caso geral

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M>0$, $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $f:U\to\mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\|\leq M$ para todo $x\in(a,b)$. Então $\|f(b)-f(a)\|\leq M\|b-a\|$.

- Defina $h:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ por $h(t)=f\big((1-t)a+tb\big)$;
- Assim, $f(b)-f(a)=h(1)-h(0)$;
- Para $t\in(0,1)$, $\|h'(t)\|=\|f'\big((1-t)a+tb\big)(b-a)\|\leq M\|b-a\|$;
- Assim, $\|f(b)-f(a)\|=\|h(1)-h(0)\|\leq M\|b-a\|$.
- Obs.: $f_{|[a,b]}$ contínua não é o mesmo que f contínua em $[a,b]$;

TVM 6 - Desigualdade do Valor Médio

Considere normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a norma do sup em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $M>0$, $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto e $f:U\to\mathbb{R}^m$ diferenciável no segmento (a,b), com $f_{|[a,b]}$ contínua. Suponha que $\|f'(x)\|\le M$ para todo $x\in(a,b)$. Então $\|f(b)-f(a)\|\le M\|b-a\|$.

- Defina $h:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ por $h(t)=f\big((1-t)a+tb\big)$;
- Assim, $f(b)-f(a)=h(1)-h(0)$;
- Para $t\in(0,1)$, $\|h'(t)\|=\|f'\big((1-t)a+tb\big)(b-a)\|\le M\|b-a\|$;
- Assim, $\|f(b)-f(a)\|=\|h(1)-h(0)\|\le M\|b-a\|$.
- Obs.: $f_{|[a,b]}$ contínua não é o mesmo que f contínua em $[a,b]$;

Corolário

Se U também for convexo, $f:U\to\mathbb{R}^m$ diferenciável e $\|f'(x)\|\le M$ para todo $x\in U$, então $\|f(y)-f(x)\|\le M\|y-x\|$.