

Geometria Analítica - Compasso de elipses

Ademir Alves Ribeiro

Julho / 2006



Compasso de elipses

Este trabalho tem por objetivo ilustrar um interessante exercício de geometria analítica que sugere a construção do que podemos chamar de *compasso de elipses*.

O problema

Em uma barra de comprimento l , fixe um ponto arbitrário. Deslocando a barra sobre um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, de modo que uma das extremidades permaneça sobre o eixo x e a outra sobre o eixo y , verifique que o ponto fixado descreve uma trajetória elíptica.

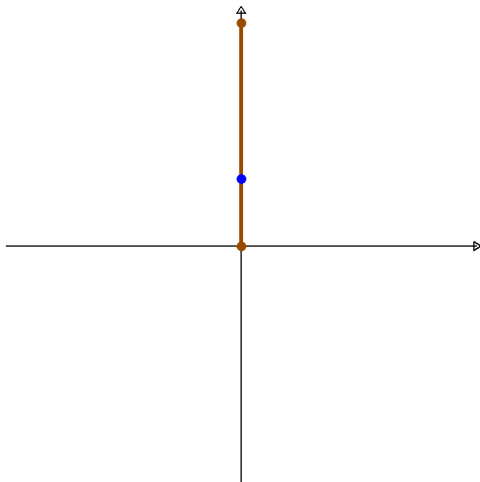
Compasso de elipses

Este trabalho tem por objetivo ilustrar um interessante exercício de geometria analítica que sugere a construção do que podemos chamar de *compasso de elipses*.

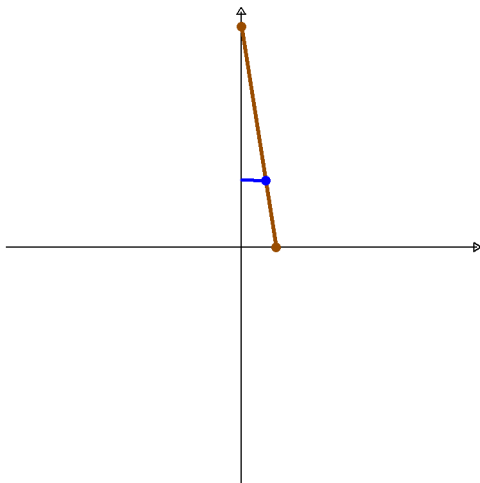
O problema

Em uma barra de comprimento l , fixe um ponto arbitrário. Deslocando a barra sobre um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, de modo que uma das extremidades permaneça sobre o eixo x e a outra sobre o eixo y , verifique que o ponto fixado descreve uma trajetória elíptica.

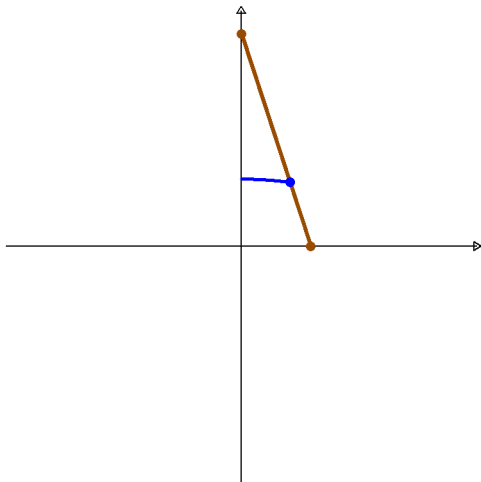
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



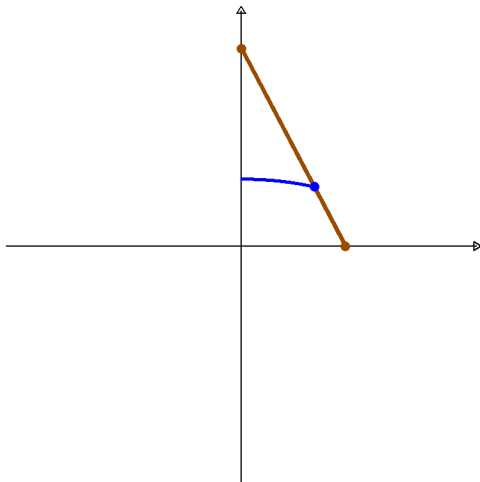
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



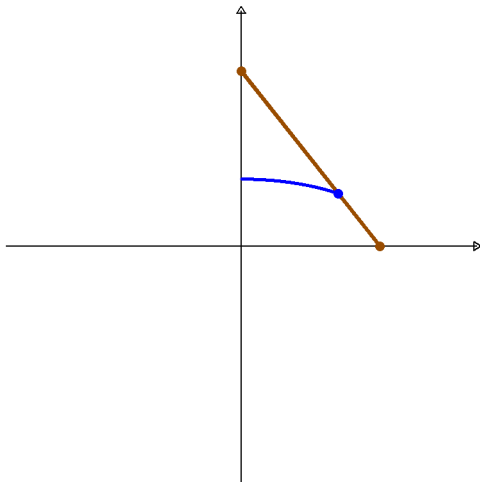
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



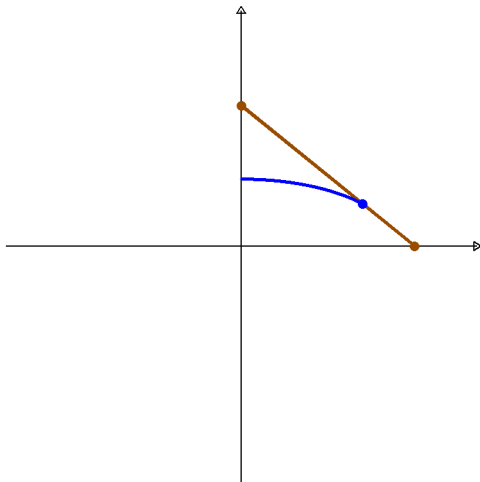
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



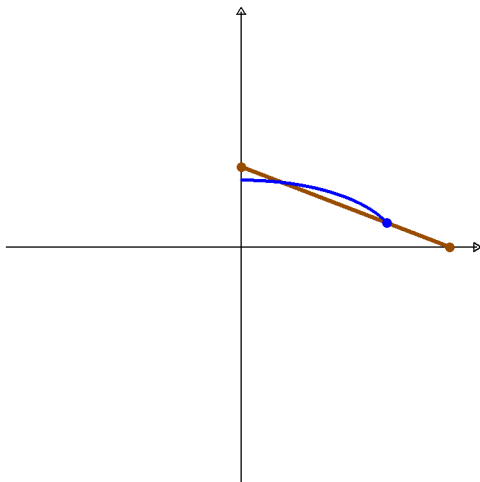
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



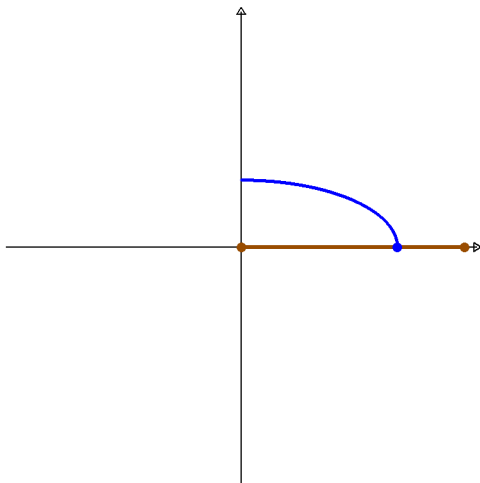
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



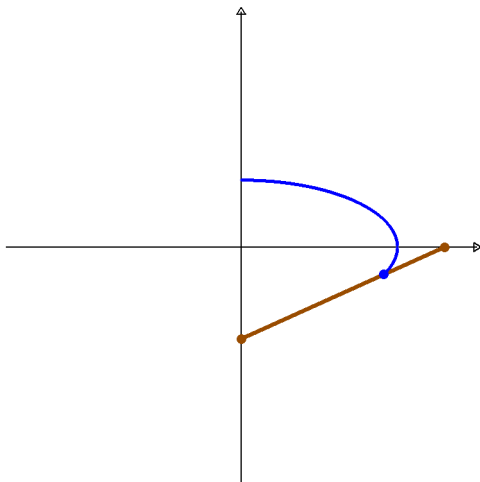
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



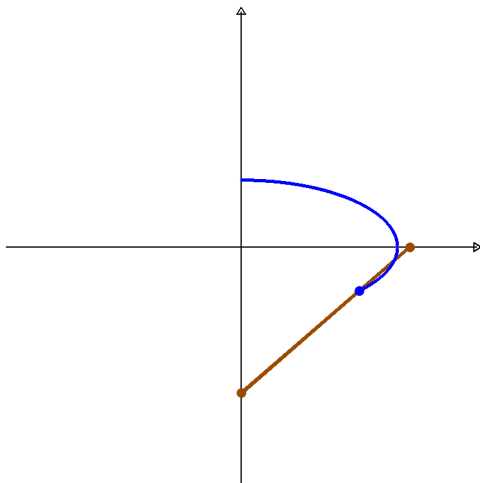
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



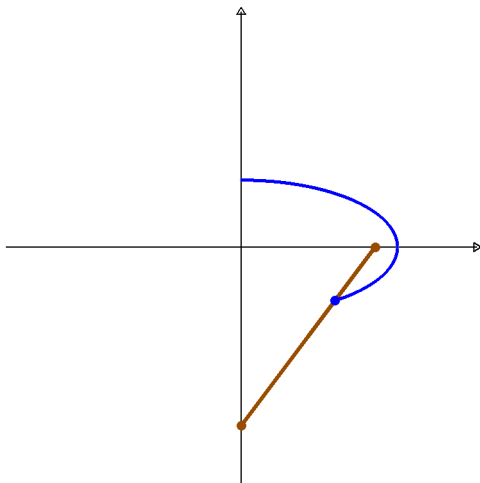
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



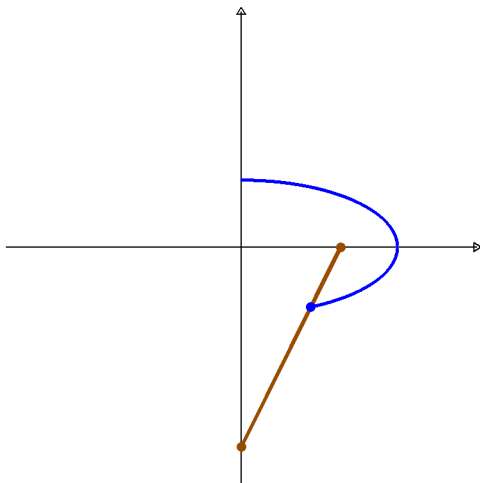
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



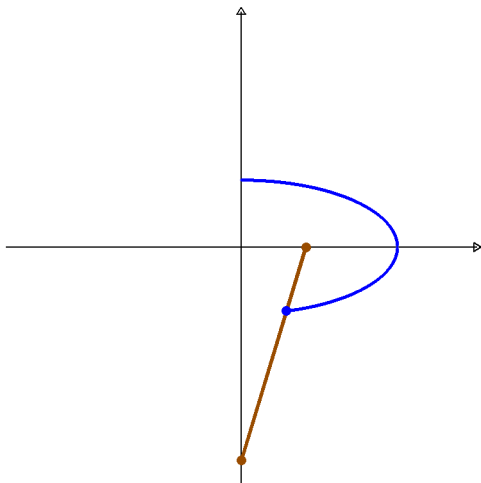
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



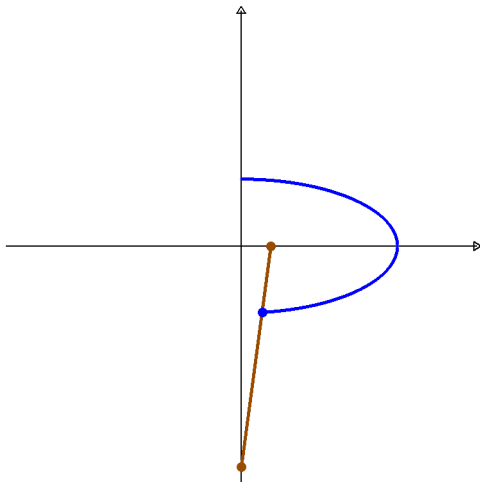
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



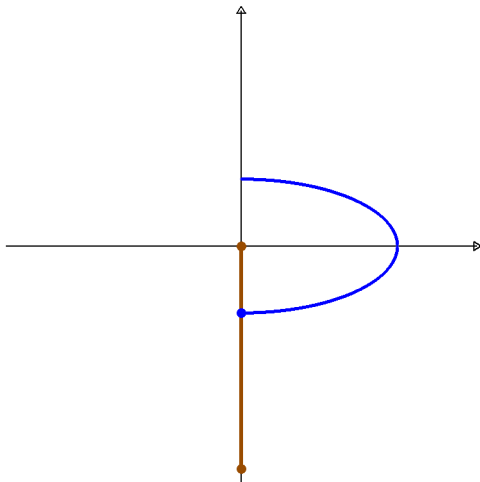
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



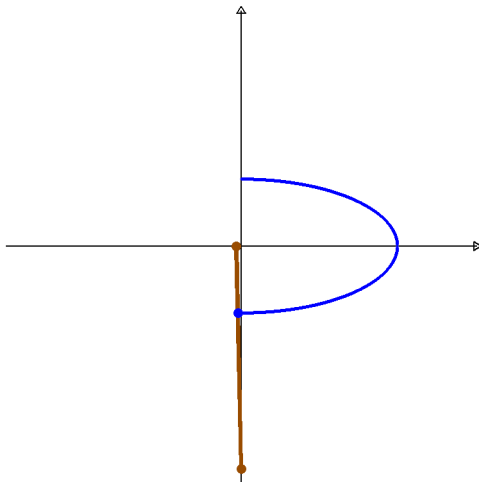
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



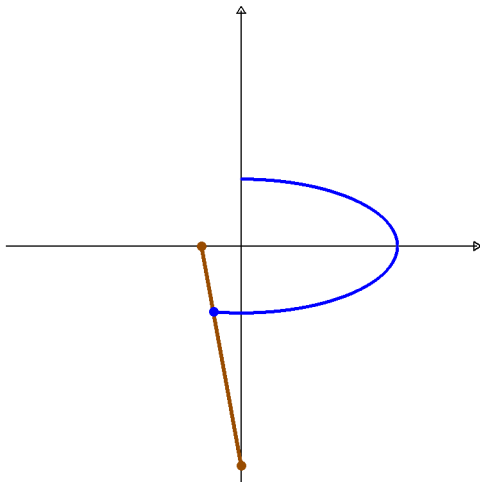
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



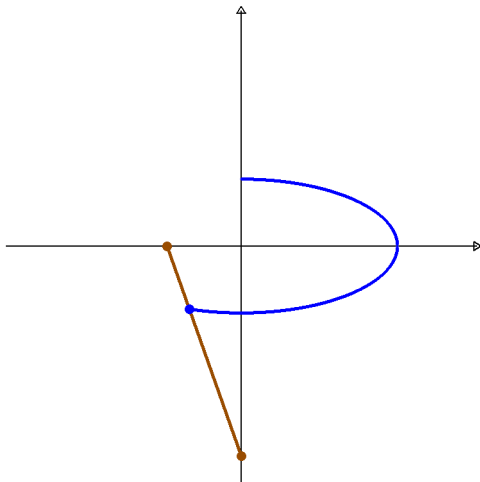
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



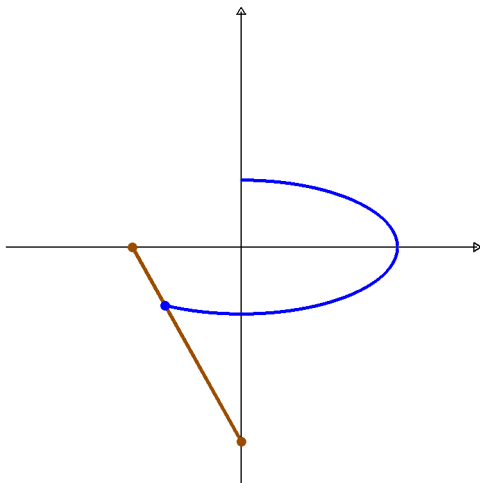
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



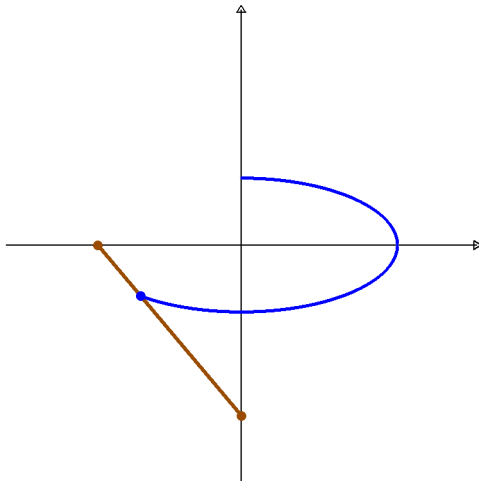
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



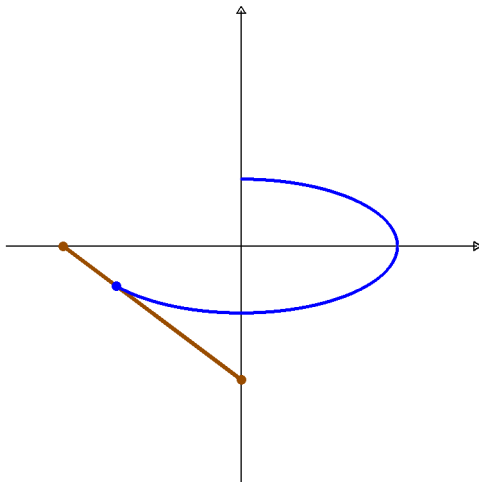
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



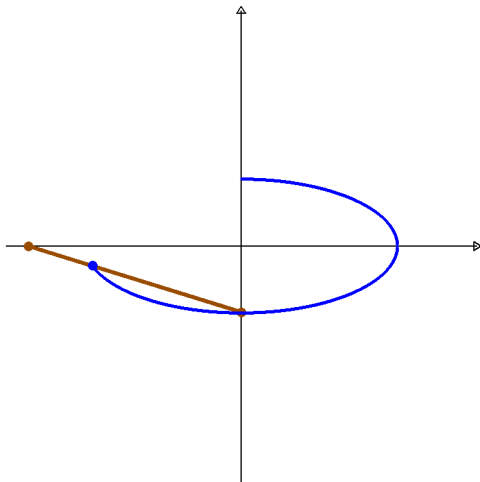
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



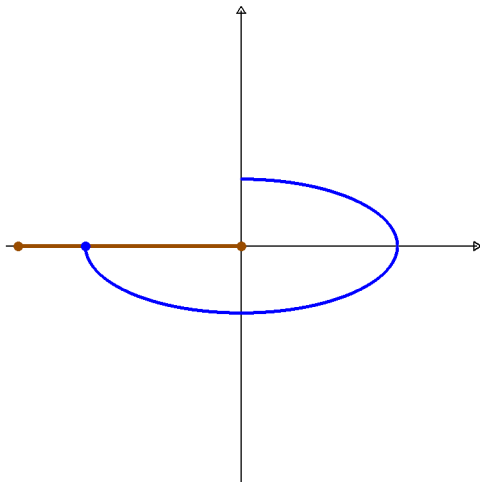
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



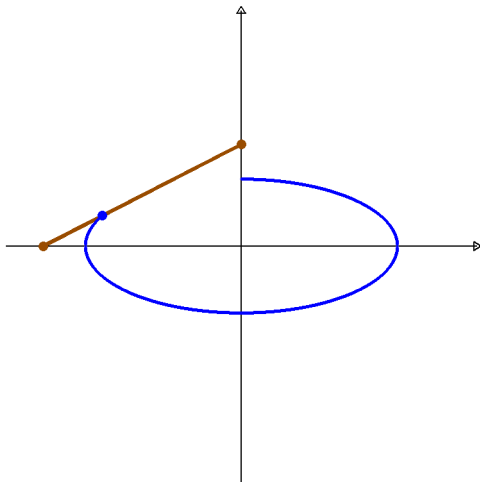
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



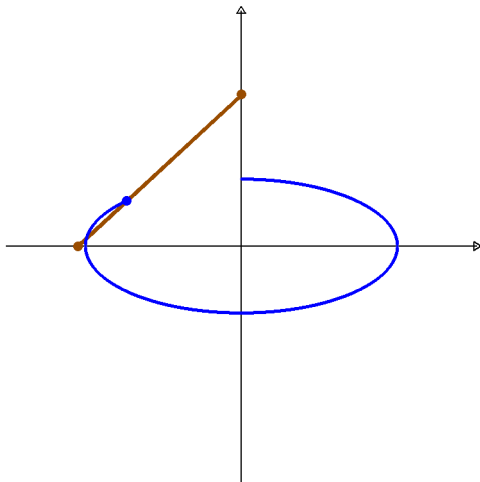
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



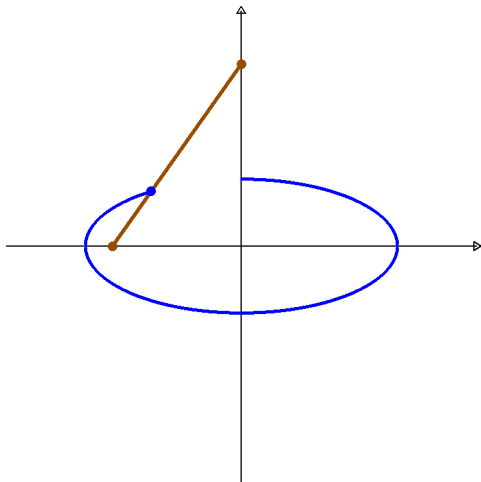
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



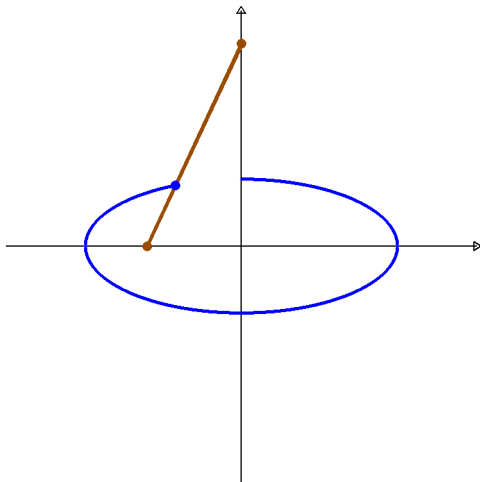
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



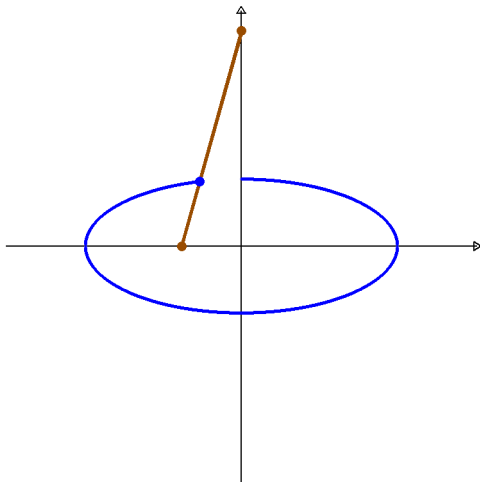
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



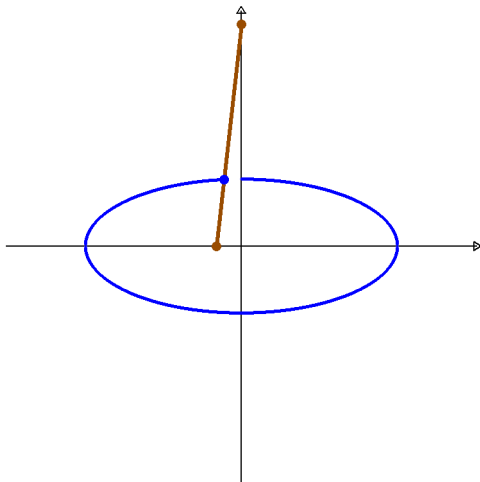
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



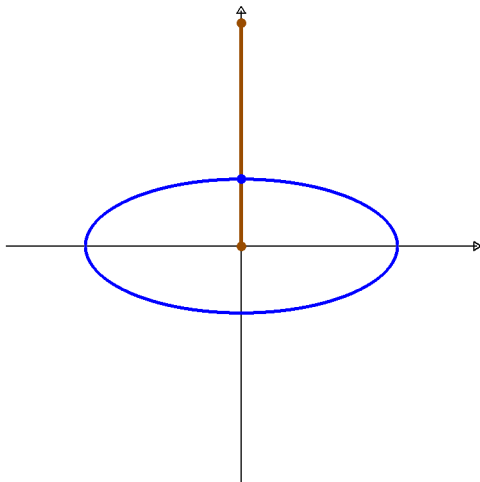
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



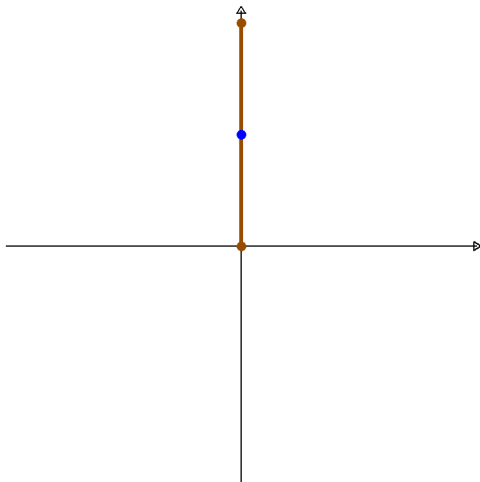
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



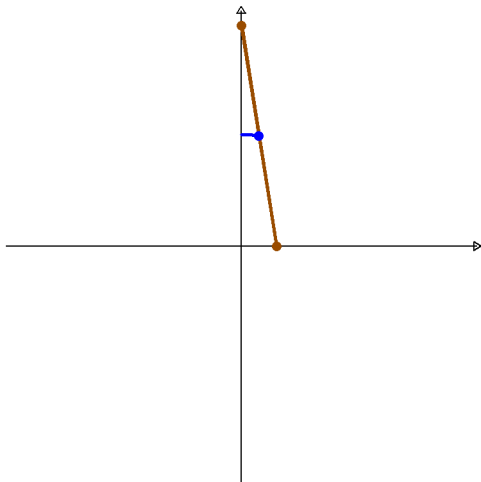
Situação 1: o ponto fixado divide a barra na razão 0,3



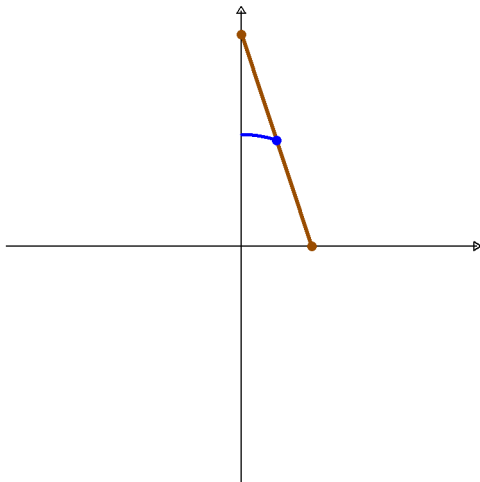
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



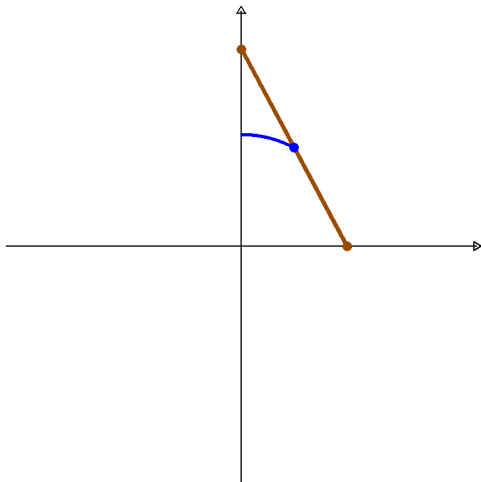
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



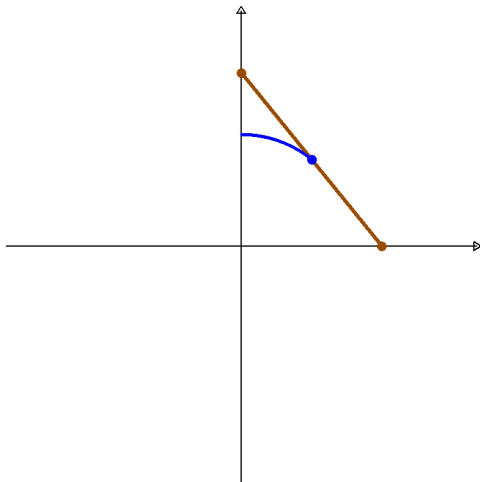
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



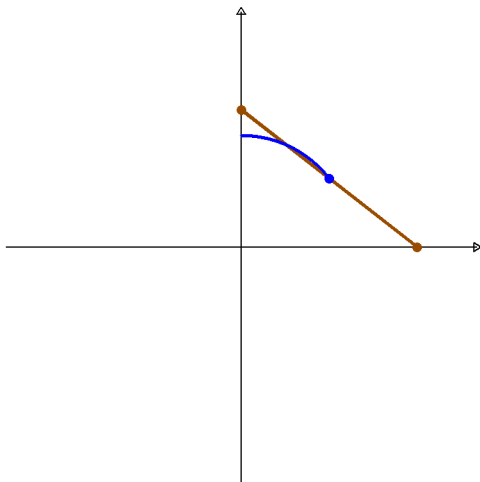
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



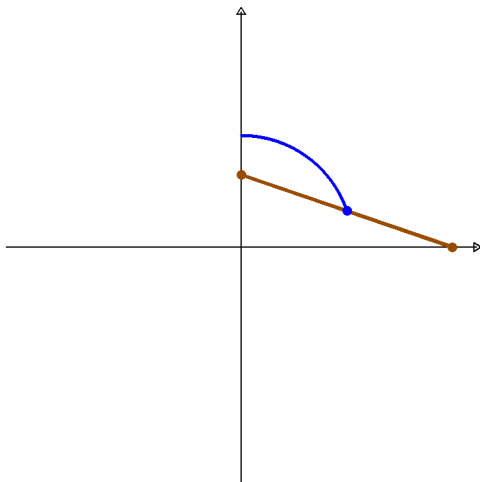
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



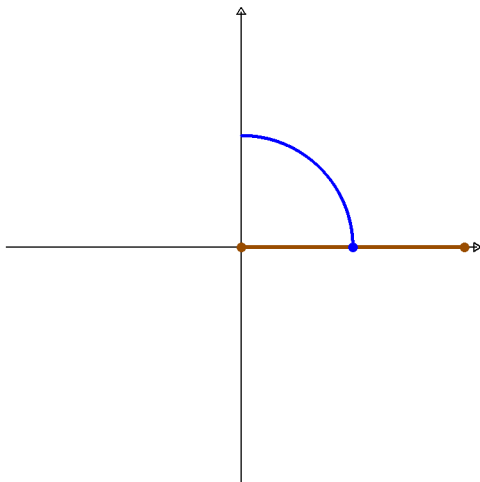
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



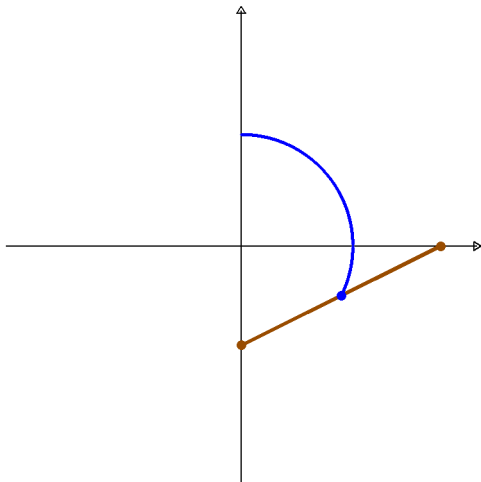
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



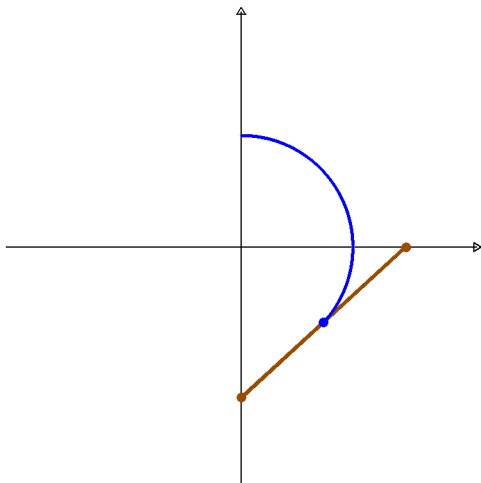
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



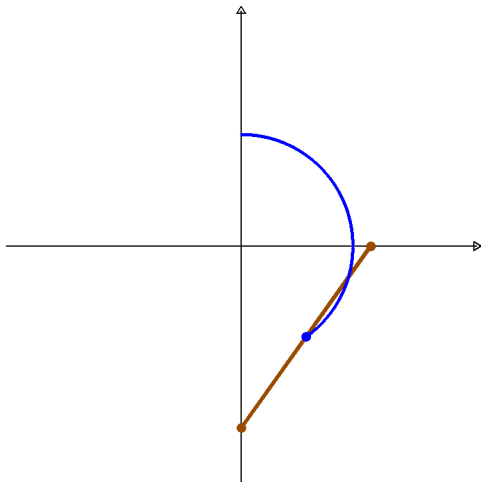
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



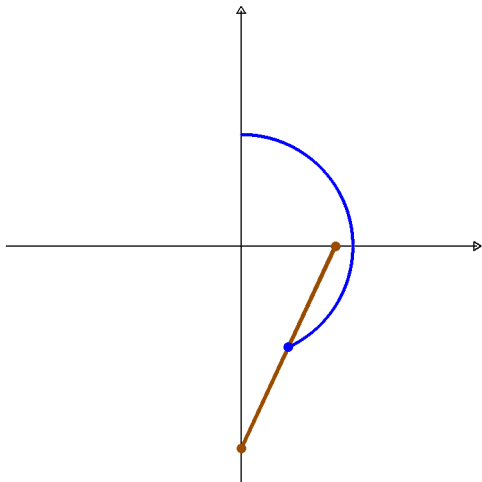
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



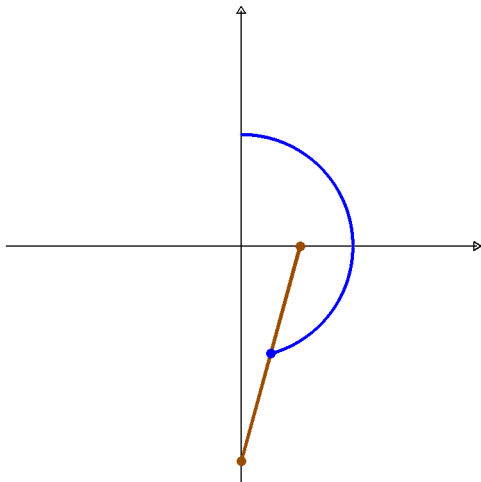
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



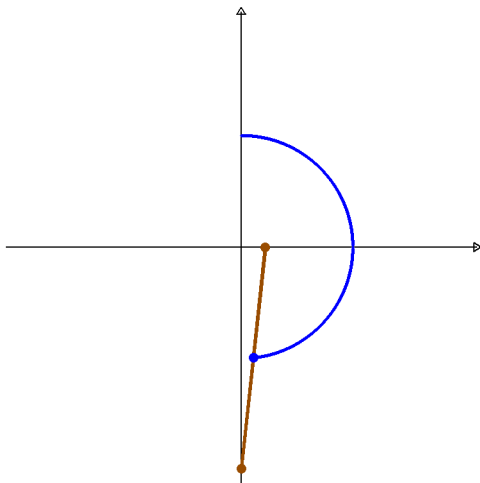
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



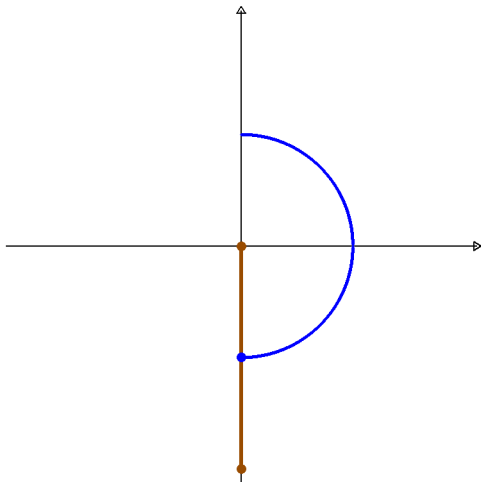
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



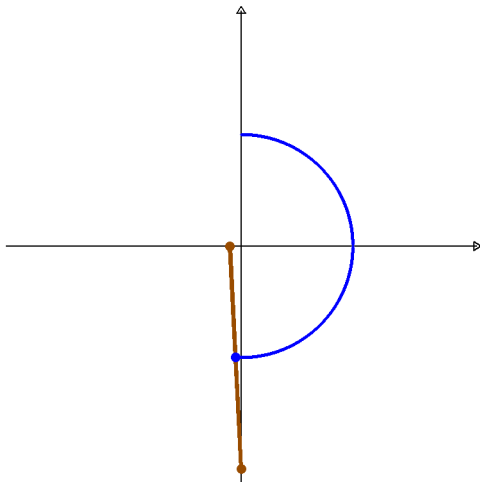
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



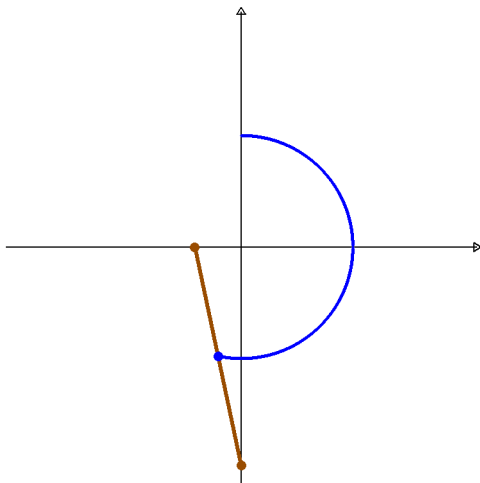
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



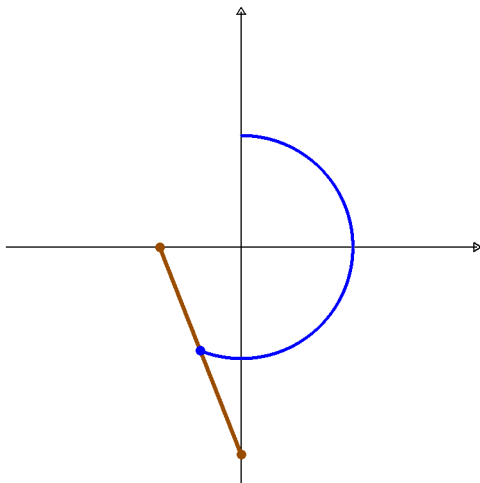
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



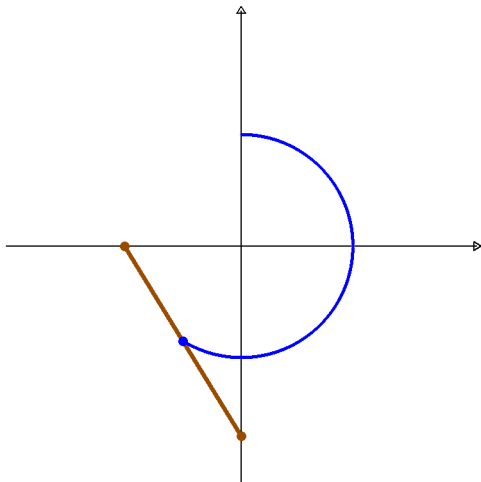
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



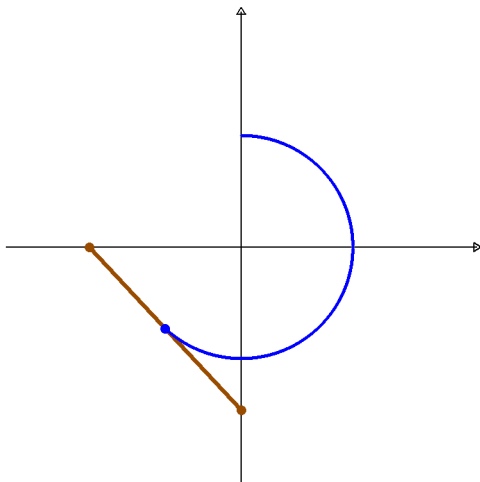
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



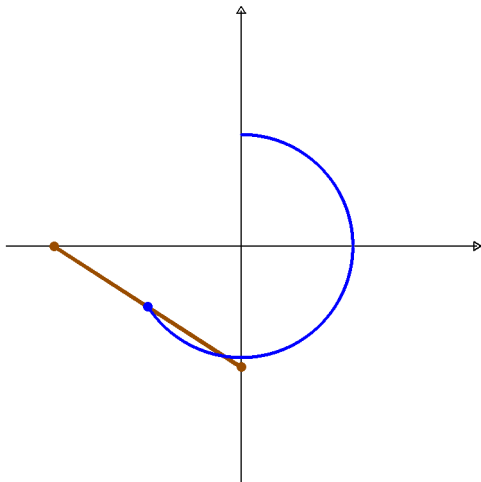
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



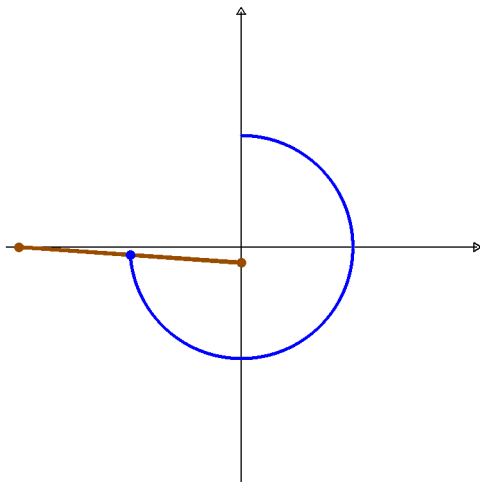
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



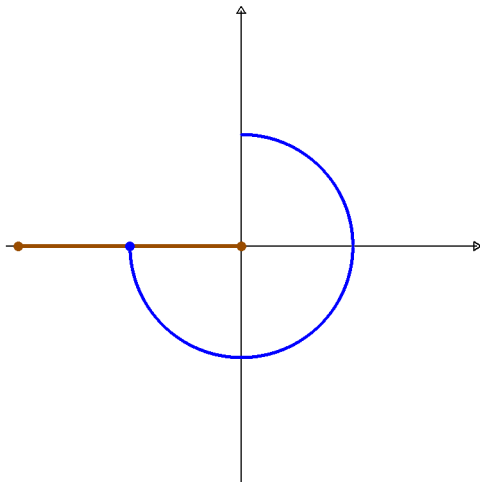
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



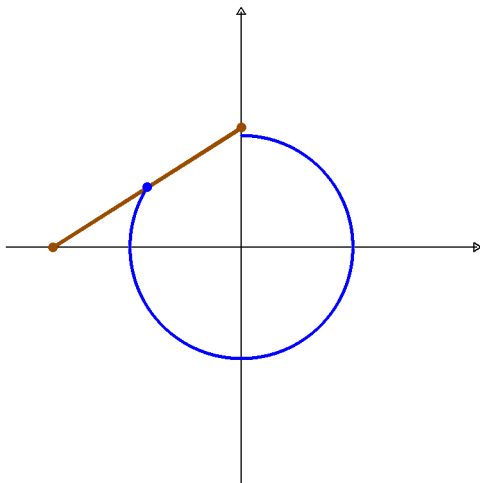
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



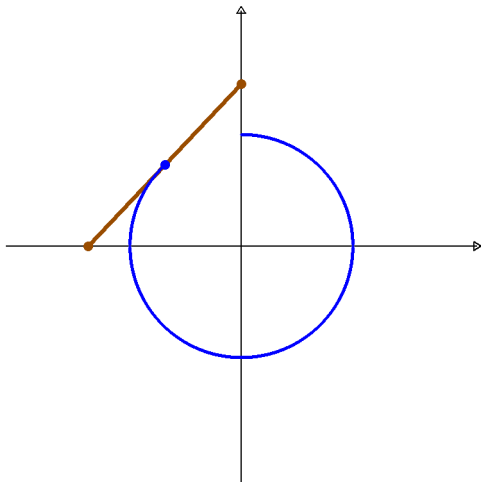
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



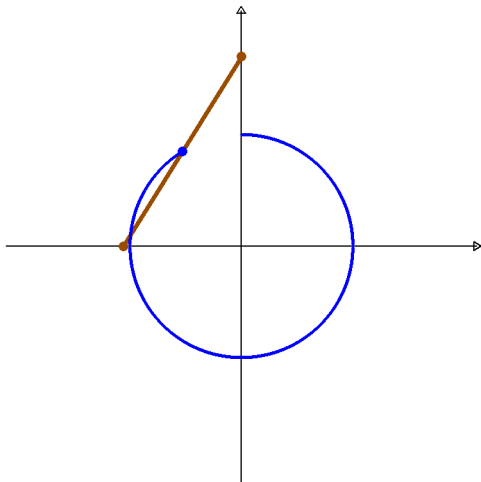
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



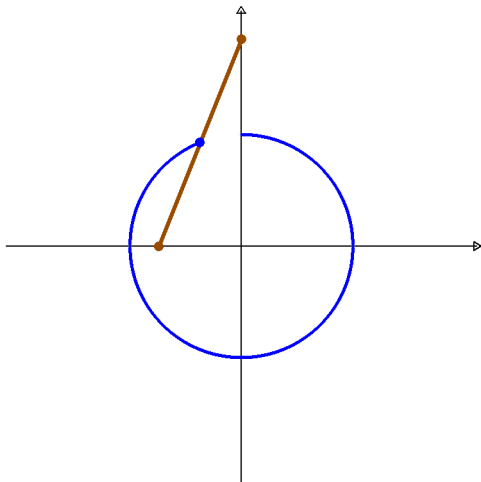
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



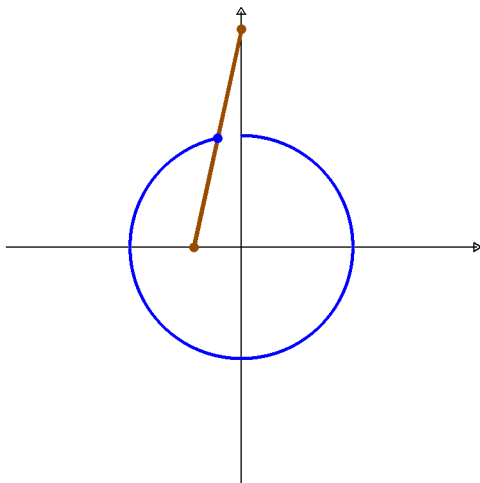
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



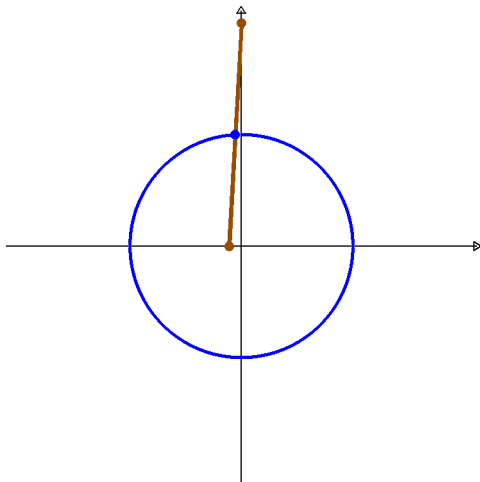
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



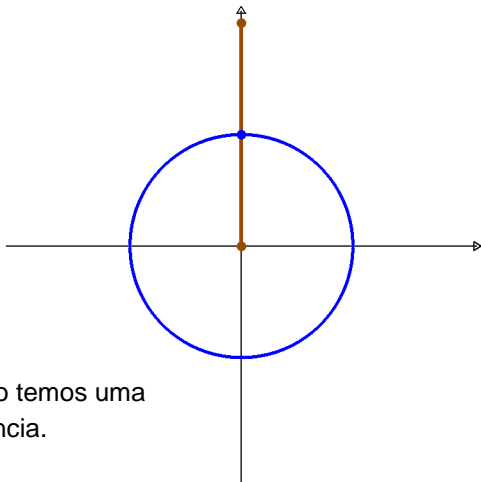
Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5

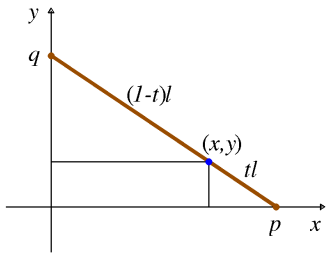


Situação 2: o ponto fixado divide a barra na razão 0,5



- Neste caso temos uma circunferência.

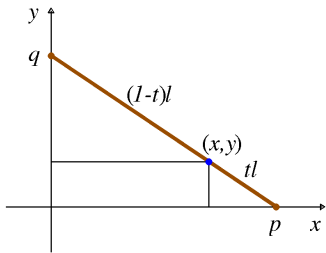
Formulação matemática



- $l > 0$: comprimento da barra
- $t \in (0, 1)$: razão de divisão da barra
- p e q : variáveis no domínio $[-l, l]$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = l^2 \\ \frac{p}{x} = \frac{l}{(1-t)l} = \frac{1}{1-t} \\ \frac{q}{y} = \frac{l}{tl} = \frac{1}{t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{((1-t)l)^2} + \frac{y^2}{(tl)^2} = 1 \\ \text{elipse : } a = (1-t)l, b = tl \end{array} \right.$$

Formulação matemática



- $l > 0$: comprimento da barra
- $t \in (0, 1)$: razão de divisão da barra
- p e q : variáveis no domínio $[-l, l]$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = l^2 \\ \frac{p}{x} = \frac{l}{(1-t)l} = \frac{1}{1-t} \\ \frac{q}{y} = \frac{l}{tl} = \frac{1}{t} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{((1-t)l)^2} + \frac{y^2}{(tl)^2} = 1 \\ \text{elipse : } a = (1-t)l, b = tl \end{array} \right.$$