Cônicas - Parte 3

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/f7iSSCSJl6w

Tópicos desta discussão

- Seções cônicas
- Definição geral via foco, diretriz e excentricidade
- Equações paramétricas

Seções cônicas

Para uma visualização interessante das seções de um cone, acesse

`https://www.youtube.com/watch?v=HO2zAU3Eppo`

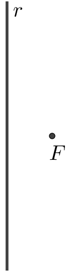
que pertence ao canal

creative Learning

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

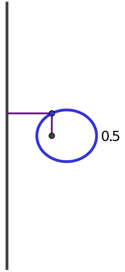
É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).



Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).

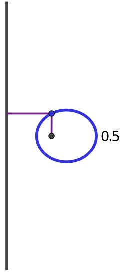


- Este fator, denotado por e, será justamente a excentricidade;

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).

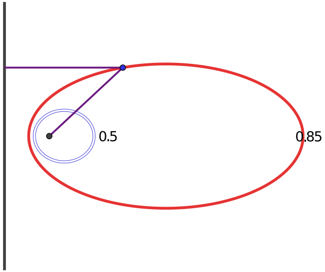


- Se $e \in (0, 1)$, a curva será uma elipse;

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).

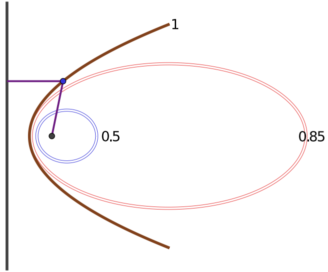


- $e \approx 0 \Rightarrow$ mais arredondada, $e \approx 1 \Rightarrow$ mais achatada;

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).

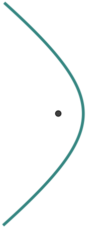


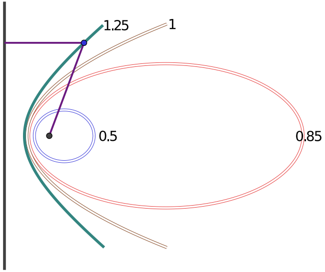
- Se $e = 1$, a curva será uma parábola;

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).



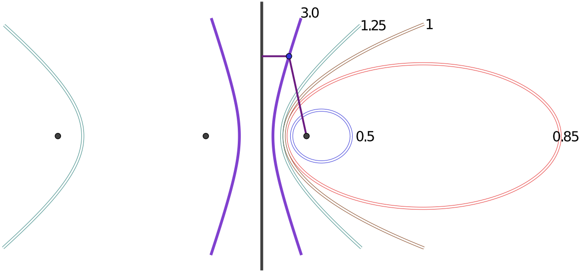


- Se $e > 1$, a curva será uma hipérbole;

Definição geral via foco, diretriz e excentricidade

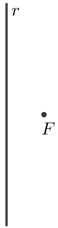
Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixado (foco) é um fator da distância à uma reta fixada (diretriz).



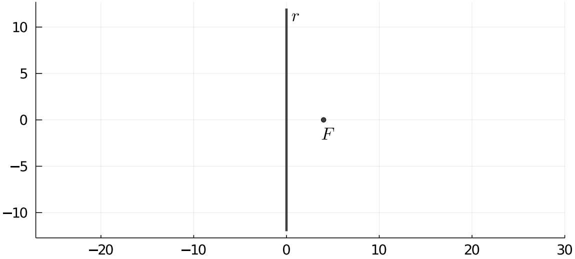
- Quanto maior, mais aberta é a hipérbole.

Fundamentação matemática: caso $e \in (0, 1)$



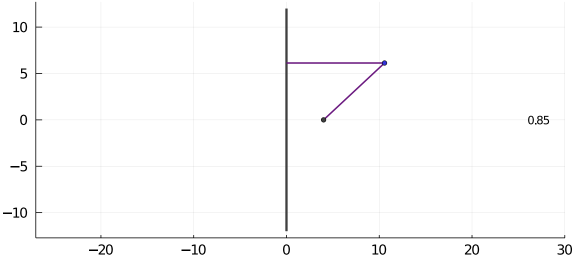
Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;



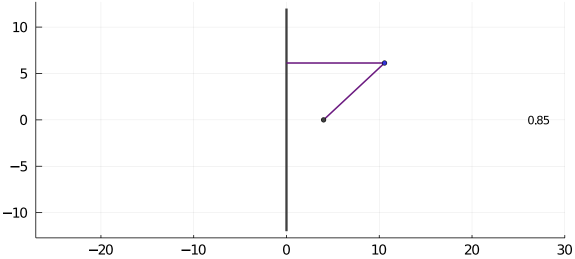
Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d)$



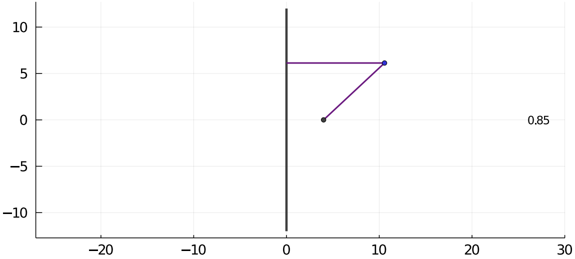
Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p,0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2+y^2} = e|x|$;



Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\alpha = 1 - e^2$, temos $\alpha x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$;

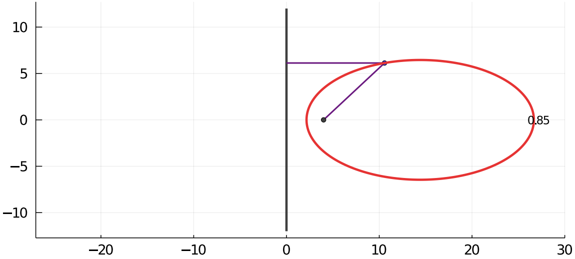


Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p,0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2+y^2} = e|x|$;
- Denotando $\alpha = 1-e^2$, temos $\alpha x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$;

Equação reduzida

$$\frac{(x-p/\alpha)^2}{(pe/\alpha)^2} + \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\alpha})^2} = 1$$

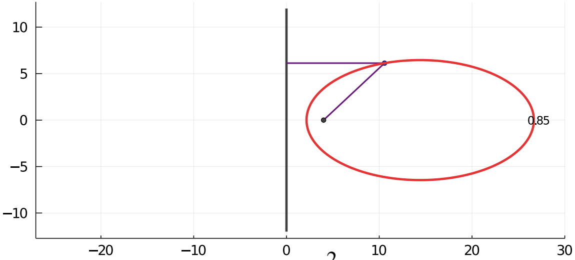


Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\alpha = 1 - e^2$, temos $\alpha x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$;

Equação reduzida

$$\frac{(x - p/\alpha)^2}{(pe/\alpha)^2} + \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\alpha})^2} = 1$$



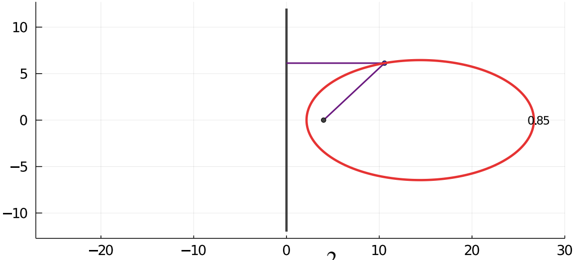
- Temos $a = \dfrac{pe}{\alpha}$, $b = \dfrac{pe}{\sqrt{\alpha}}$ e $c = \dfrac{pe^2}{\alpha}$

Fundamentação matemática: caso $e \in (0,1)$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\alpha = 1 - e^2$, temos $\alpha x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 0$;

Equação reduzida

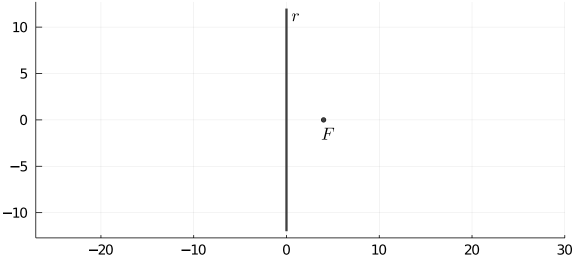
$$\frac{(x - p/\alpha)^2}{(pe/\alpha)^2} + \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\alpha})^2} = 1$$



- Temos $a = \dfrac{pe}{\alpha}$, $b = \dfrac{pe}{\sqrt{\alpha}}$ e $c = \dfrac{pe^2}{\alpha} = ea$.

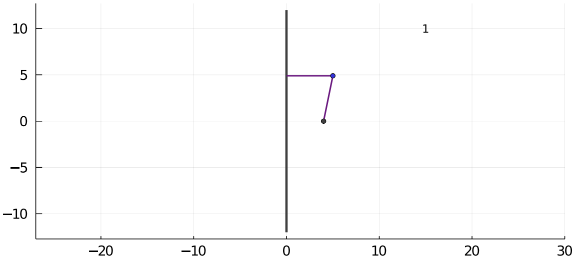
Fundamentação matemática: caso $e = 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;



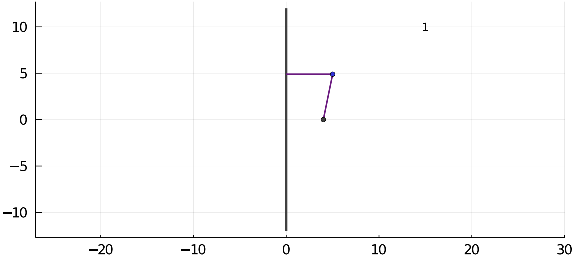
Fundamentação matemática: caso $e = 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P, F) = ed(P, d)$



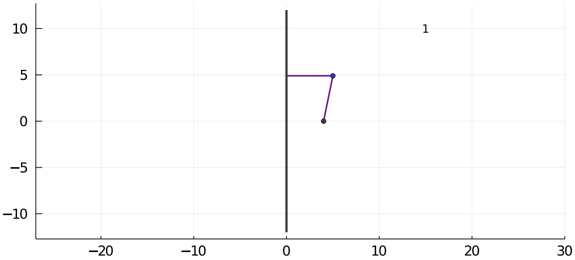
Fundamentação matemática: caso $e = 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P, F) = ed(P, d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x|$;



Fundamentação matemática: caso $e = 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x|$;
- $-2px + p^2 + y^2 = 0$;



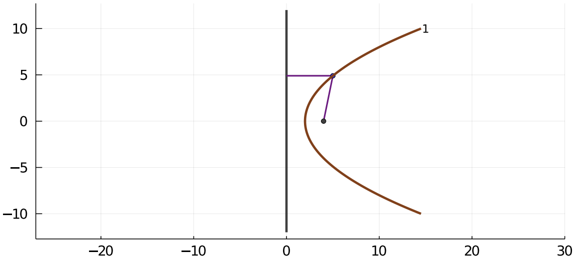
UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fundamentação matemática: caso $e = 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x|$;
- $-2px + p^2 + y^2 = 0$;

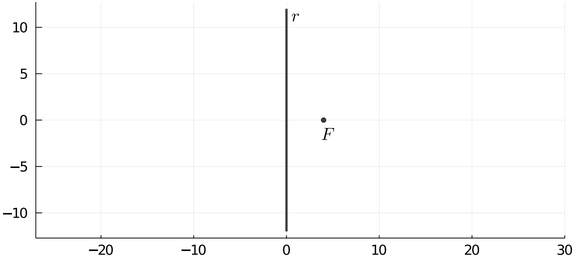
Equação reduzida

$$y^2 = 2p(x - p/2)$$



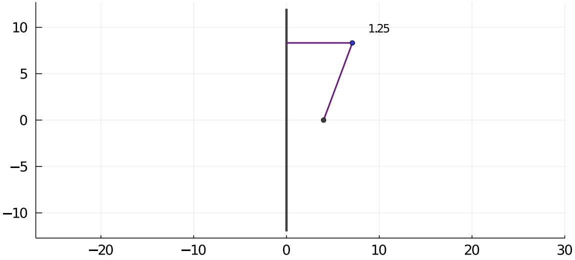
Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;



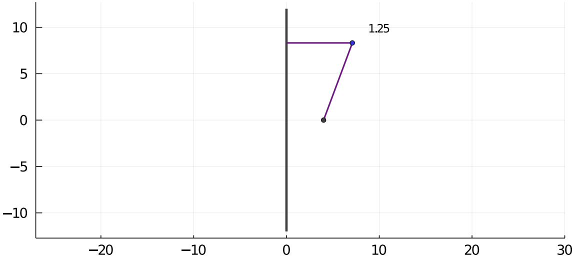
Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P, F) = ed(P, d)$



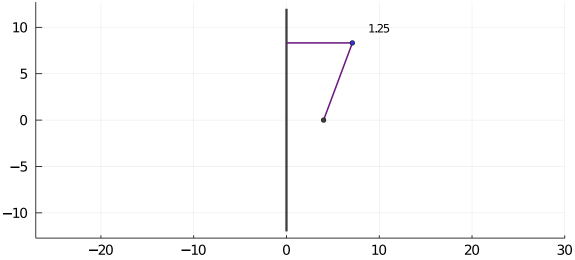
Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;



Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\beta = e^2 - 1$, temos $\beta x^2 + 2px - p^2 - y^2 = 0$;

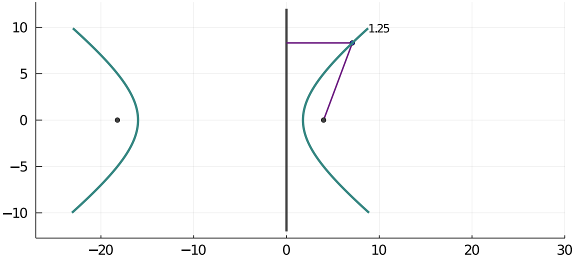


Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\beta = e^2 - 1$, temos $\beta x^2 + 2px - p^2 - y^2 = 0$;

Equação reduzida

$$\frac{(x + p/\beta)^2}{(pe/\beta)^2} - \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\beta})^2} = 1$$

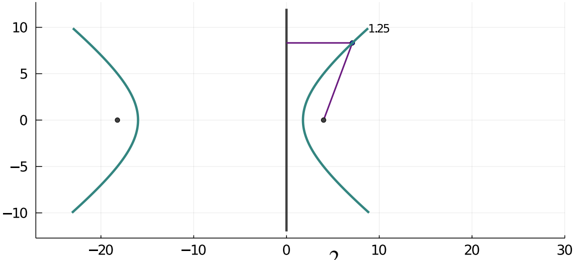


Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\beta = e^2 - 1$, temos $\beta x^2 + 2px - p^2 - y^2 = 0$;

Equação reduzida

$$\frac{(x+p/\beta)^2}{(pe/\beta)^2} - \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\beta})^2} = 1$$



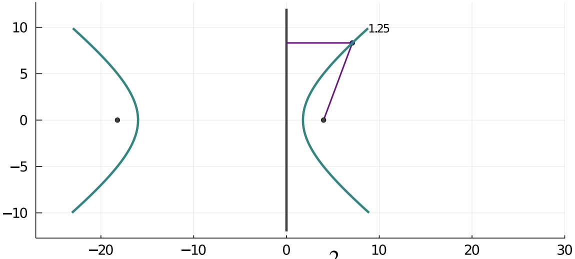
- Temos $a = \dfrac{pe}{\beta}$, $b = \dfrac{pe}{\sqrt{\beta}}$ e $c = \dfrac{pe^2}{\beta}$

Fundamentação matemática: caso $e > 1$

- Foco: $F = (p, 0)$ Diretriz $d : x = 0$;
- $d(P,F) = ed(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x|$;
- Denotando $\beta = e^2 - 1$, temos $\beta x^2 + 2px - p^2 - y^2 = 0$;

Equação reduzida

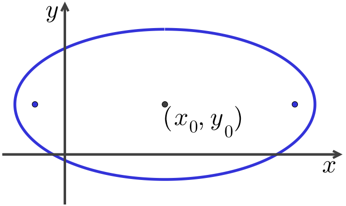
$$\frac{(x + p/\beta)^2}{(pe/\beta)^2} - \frac{y^2}{(pe/\sqrt{\beta})^2} = 1$$



- Temos $a = \dfrac{pe}{\beta}$, $b = \dfrac{pe}{\sqrt{\beta}}$ e $c = \dfrac{pe^2}{\beta} = ea$.

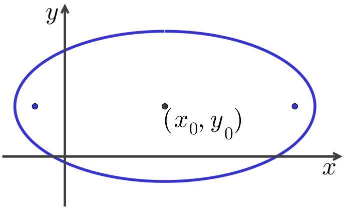
Equações paramétricas

Equações paramétricas - elipse



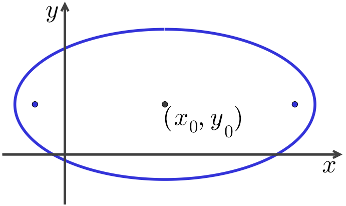
Equações paramétricas - elipse

- $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$



Equações paramétricas - elipse

- $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$
- $$\frac{x-x_0}{a}=\cos t,\quad \frac{y-y_0}{b}=\sin t;$$

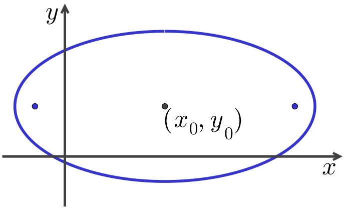


Equações paramétricas - elipse

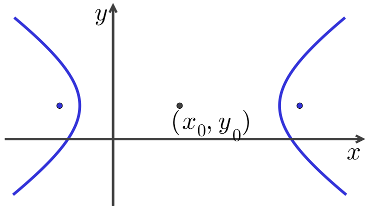
- $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$
- $$\frac{x-x_0}{a}=\cos t,\quad \frac{y-y_0}{b}=\sin t;$$

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}$$

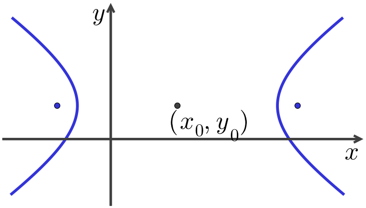


Equações paramétricas - hipérbole



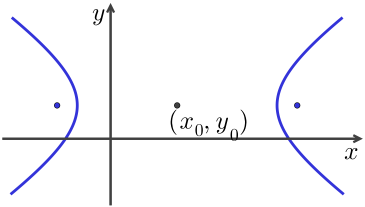
Equações paramétricas - hipérbole

- $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$$



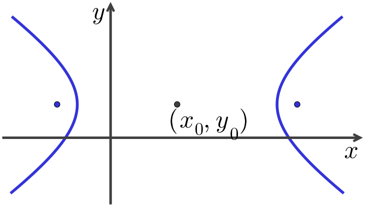
Equações paramétricas - hipérbole

- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- $x = ? \quad y = ?$



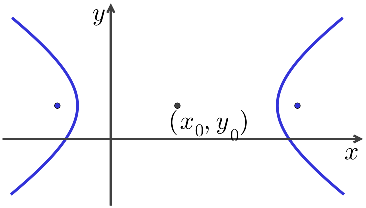
Equações paramétricas - hipérbole

- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- $x = ? \quad y = ?$
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2};$



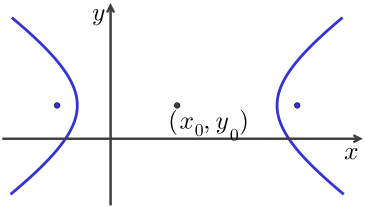
Equações paramétricas - hipérbole

- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- $x = ? \quad y = ?$
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2};$
- $\cosh^2 t = \dfrac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}, \quad \sinh^2 t = \dfrac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4};$



Equações paramétricas - hipérbole

- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- $x = ? \quad y = ?$
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2};$
- $\cosh^2 t = \dfrac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}, \quad \sinh^2 t = \dfrac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4};$
- $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1;$

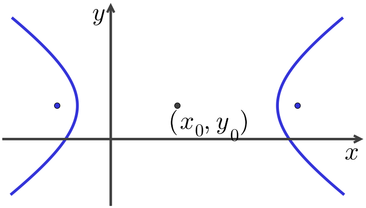


Equações paramétricas - hipérbole

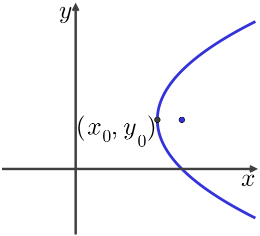
- $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$
- $x = ? \quad y = ?$
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2};$
- $\cosh^2 t = \dfrac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}, \quad \sinh^2 t = \dfrac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4};$
- $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1;$

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cosh t \\ y = y_0 + b\sinh t \end{cases}$$

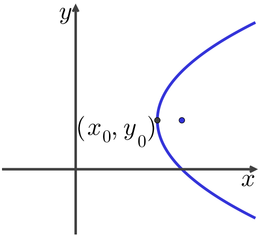


Equações paramétricas - parábola



Equações paramétricas - parábola

- $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$



Equações paramétricas - parábola

- $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{(t - y_0)^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$$