Distâncias

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/1UkKrzL_D7c

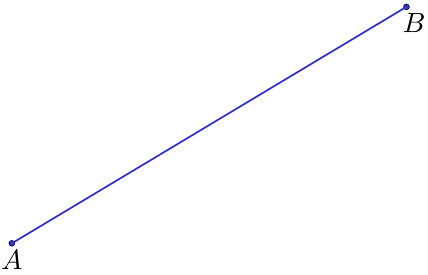
Distância entre dois pontos

Distância entre dois pontos

- Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$;

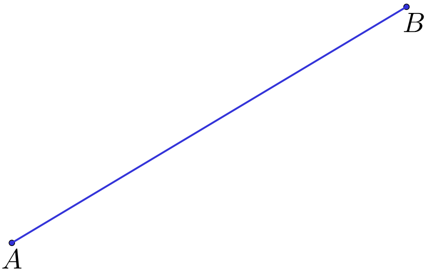
Distância entre dois pontos

- Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$;
- $\text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$



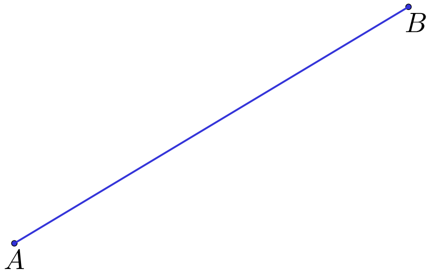
Distância entre dois pontos

- Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$;
- $\text{dist}(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$;



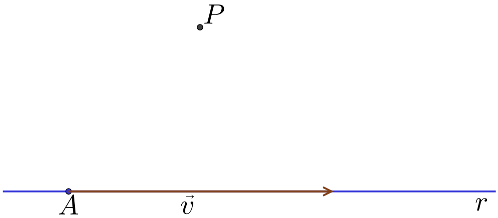
Distância entre dois pontos

- Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $B = (x_1, y_1, z_1)$;
- $\text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$;
- Note que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.



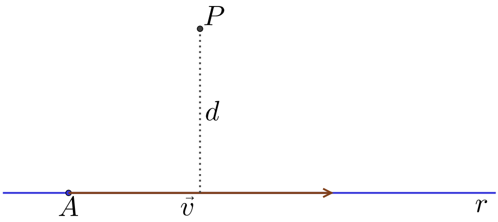
Distância entre ponto e reta

- Dados P e $r : \begin{cases} A \\ \vec{v} \end{cases}$;



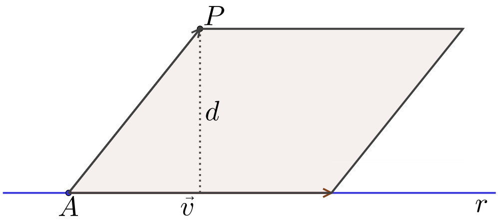
Distância entre ponto e reta

- Dados P e $r : \begin{cases} A \\ \vec{v} \end{cases}$;
- $d = \mathrm{dist}(P, r) = ?$



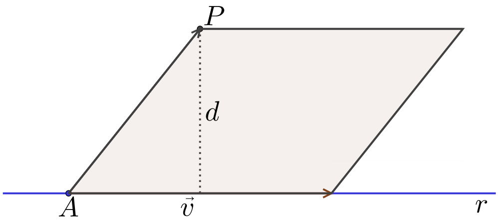
Distância entre ponto e reta

- Dados P e $r : \begin{cases} A \\ \vec{v} \end{cases}$;
- $d = \text{dist}(P, r) = ?$
- $\|\vec{v}\| d = S_p$



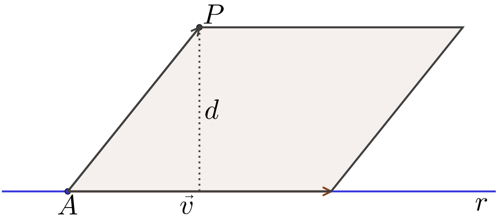
Distância entre ponto e reta

- Dados P e $r : \begin{cases} A \\ \vec{v} \end{cases}$;
- $d = \operatorname{dist}(P, r) = ?$
- $\|\vec{v}\| d = S_p = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|$;



Distância entre ponto e reta

- Dados P e $r : \left\{ \begin{array}{c} A \\ \vec{v} \end{array} \right.$;
- $d = \mathrm{dist}(P, r) = ?$
- $\|\vec{v}\| d = S_p = \|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|$;
- $d = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

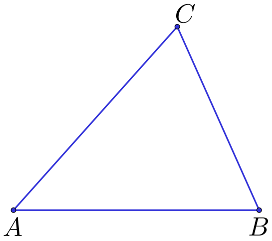


UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exercícios

Exercício 1

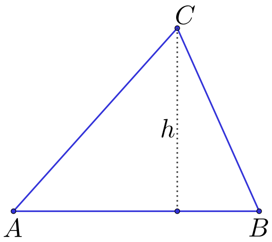
Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo.



Exercícios

Exercício 1

Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (3, 2, 1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

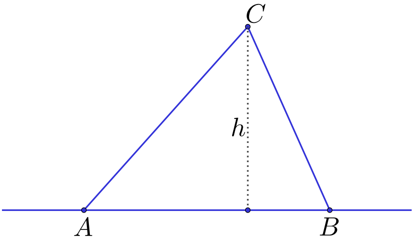


Exercícios

Exercício 1

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

- $r : \begin{cases} A \\ B \end{cases}$;

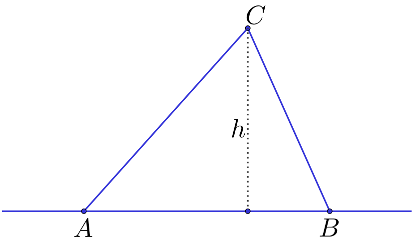


Exercícios

Exercício 1

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

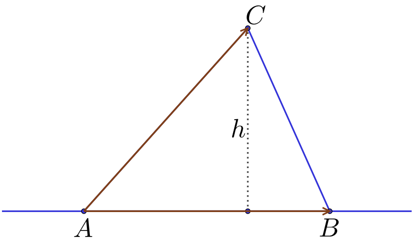
- $r : \begin{cases} A \\ B \end{cases}$;
- $h = \mathrm{dist}(C, r)$



Exercício 1

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

- $r:\begin{cases} A \\ B \end{cases}$;
- $h=\text{dist}(C,r)=\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$;

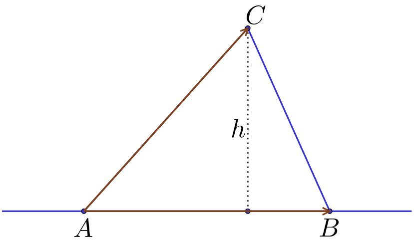


Exercícios

Exercício 1

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

- $r : \begin{cases} A \\ B \end{cases}$;
- $h = \text{dist}(C, r) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$;
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,2)$;

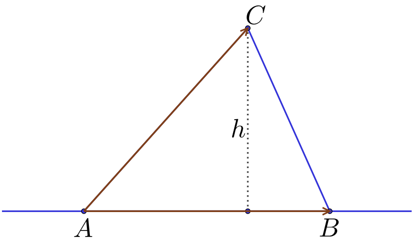


Exercícios

Exercício 1

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

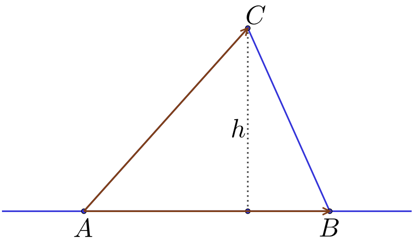
- $r : \begin{cases} A \\ B \end{cases}$;
- $h = \text{dist}(C,r) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$;
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,2)$;
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4,2,4)$;



Exercício 1

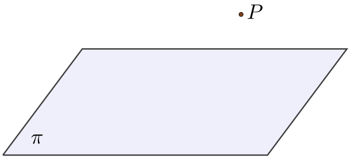
Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (3,2,1)$ vértices de um triângulo. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

- $r : \begin{cases} A \\ B \end{cases};$
- $h = \text{dist}(C,r) = \dfrac{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|};$
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,2)$;
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4,2,4)$;
- $h = 2$.



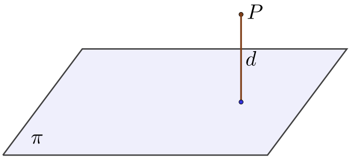
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;



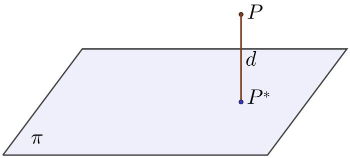
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$



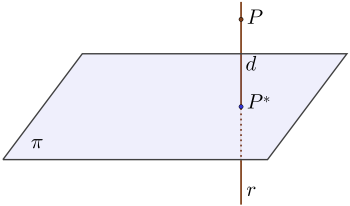
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$



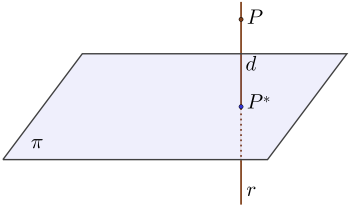
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$,



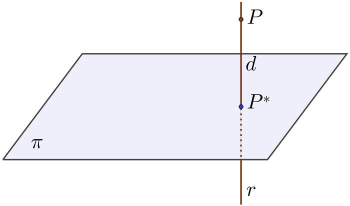
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;



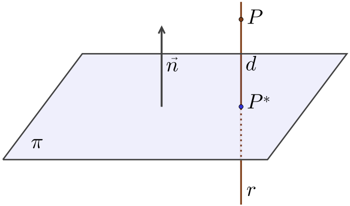
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;



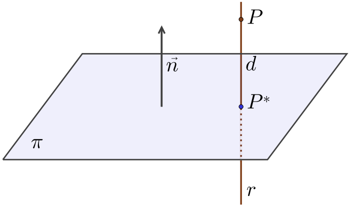
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$



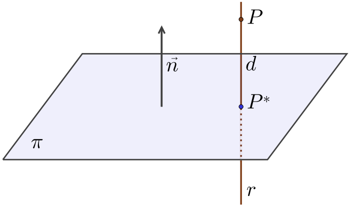
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;



Distância entre ponto e plano

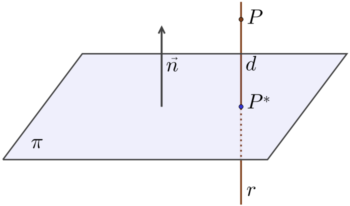
- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;
- $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*, z_0 + ct^*)$



UFPR

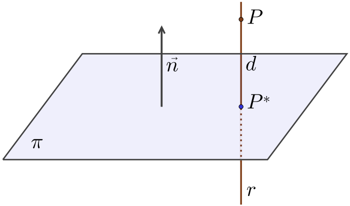
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;
- $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*, z_0 + ct^*) = P + t^*\vec{n}$;



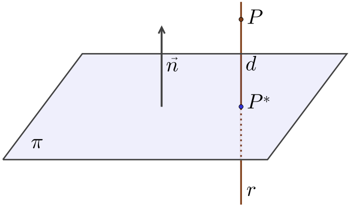
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;
- $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*, z_0 + ct^*) = P + t^*\vec{n}$;
- $d = \|\overrightarrow{PP^*}\|$



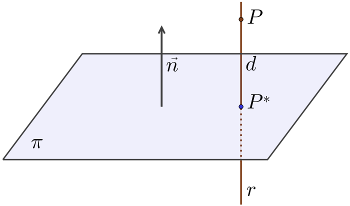
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;
- $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*, z_0 + ct^*) = P + t^*\vec{n}$;
- $d = \|\overrightarrow{PP^*}\| = |t^*| \|\vec{n}\|$



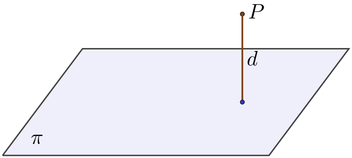
Distância entre ponto e plano

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P^*)$
- $r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, $P^* = r \cap \pi$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\|\vec{n}\|^2}$;
- $P^* = (x_0 + at^*, y_0 + bt^*, z_0 + ct^*) = P + t^* \vec{n}$;
- $d = \|\overrightarrow{PP^*}\| = |t^*| \|\vec{n}\| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|}$.



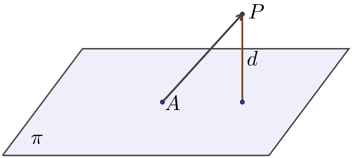
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$



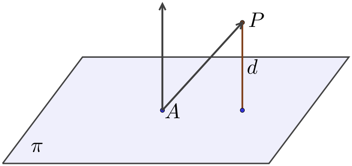
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \mathrm{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;



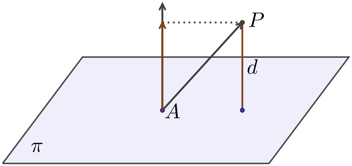
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;



Distância entre ponto e plano: outro modo

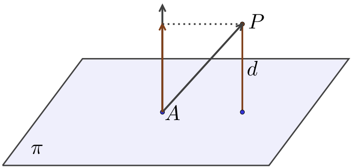
- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \mathrm{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\| \mathrm{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\|$



UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

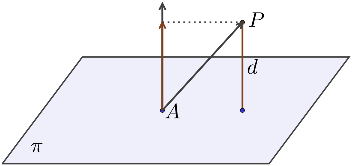
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \mathrm{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\| \mathrm{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\| = \left\| \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\|$



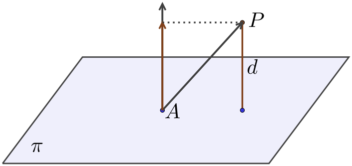
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\| \text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\| = \left\| \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$;



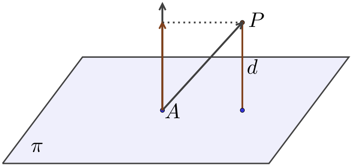
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \mathrm{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\|\mathrm{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP}\right\| = \left\| \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$;
- $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)$



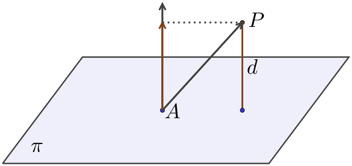
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\| \text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\| = \left\| \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$;
- $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$;



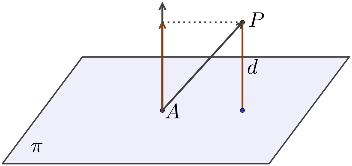
Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \operatorname{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\| \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP} \right\| = \left\| \left(\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \right) \vec{n} \right\| = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$;
- $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$;
- $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|}$



Distância entre ponto e plano: outro modo

- Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- $d = \text{dist}(P, \pi) = ?$
- Considere $A = (x, y, z) \in \pi$ arbitrário e o vetor $\overrightarrow{AP}$;
- $\vec{n} = (a, b, c)$, vetor normal ao plano π;
- $d = \left\|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\left(\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\right)\vec{n}\right\| = \dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$;
- $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$;
- $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

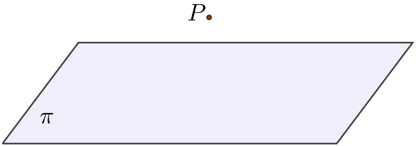


Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\operatorname{dist}(P, \pi) = d$.

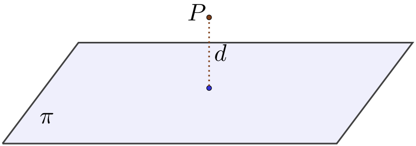
Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$.



Exercício 2

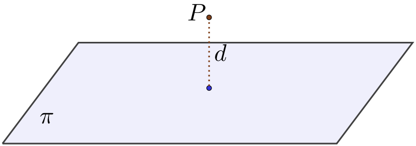
Considere um ponto P e um plano π de modo que $\operatorname{dist}(P,\pi) = d$.



Exercícios

Exercício 2

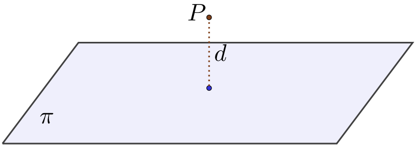
Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

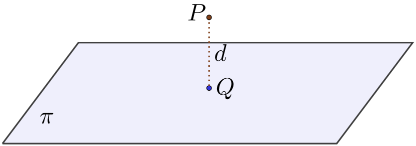
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\text{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $C = \{Q \in \pi \mid \text{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

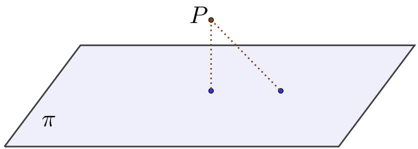
- Para $\delta < d$, temos $C = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow C = \{Q\}$;



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

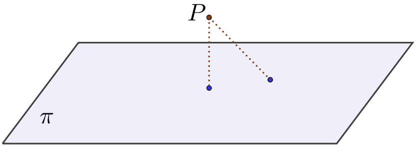
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\text{dist}(P, \pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \text{dist}(P, Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

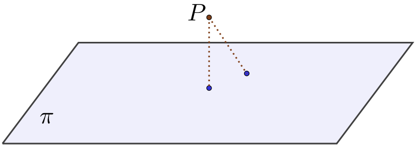
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

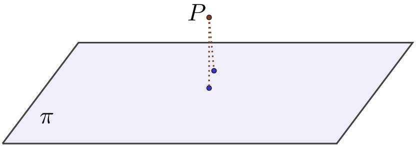
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P, \pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P, Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$

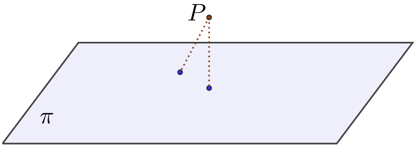


Exercícios

Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

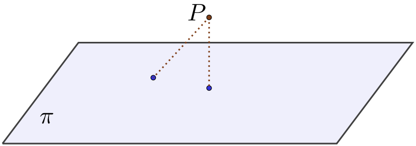
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

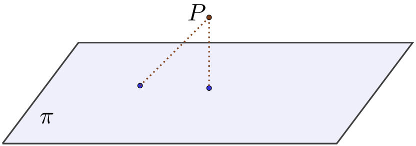
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$

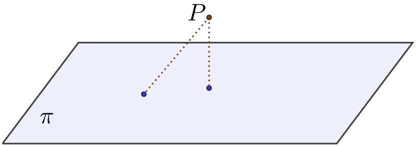


Exercícios

Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$

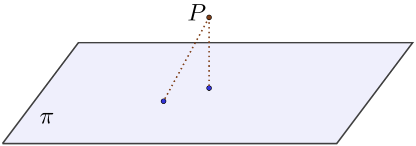


Exercícios

Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$

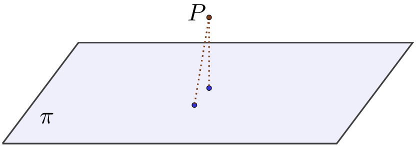


Exercícios

Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P, \pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P, Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$

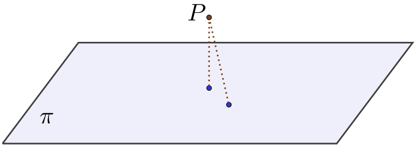


Exercícios

Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

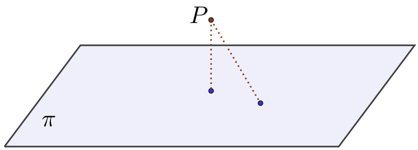
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

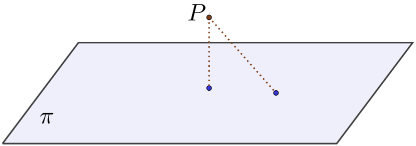
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

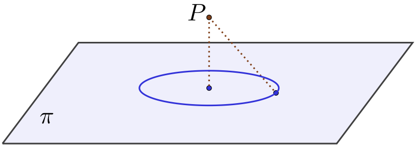
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow$



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\operatorname{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \operatorname{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

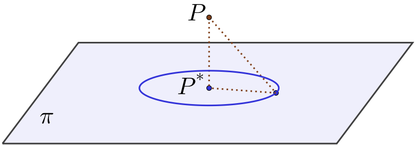
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow \mathcal{C}$ é uma circunferência:



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\operatorname{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \operatorname{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

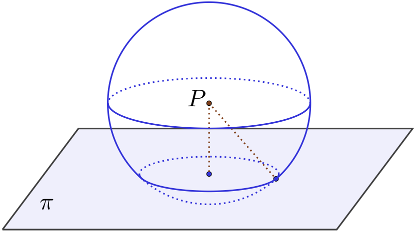
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow \mathcal{C}$ é uma circunferência:
  Centro: P^*, raio: $\sqrt{\delta^2 - d^2}$;



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

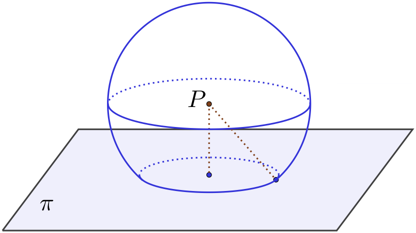
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow \mathcal{C}$ é uma circunferência: Centro: P^*, raio: $\sqrt{\delta^2 - d^2}$;
- Intersecção do plano com a esfera de centro P e raio δ.



Exercício 2

Considere um ponto P e um plano π de modo que $\mathrm{dist}(P,\pi) = d$. Descreva o conjunto $\mathcal{C} = \{Q \in \pi \mid \mathrm{dist}(P,Q) = \delta\}$ para cada valor do parâmetro $\delta \in \mathbb{R}$.

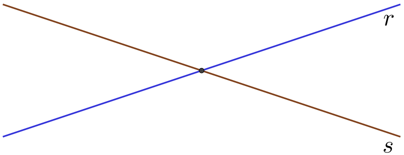
- Para $\delta < d$, temos $\mathcal{C} = \emptyset$;
- $\delta = d \Rightarrow \mathcal{C} = \{Q\}$;
- $\delta > d \Rightarrow \mathcal{C}$ é uma circunferência:
  Centro: P^*, raio: $\sqrt{\delta^2 - d^2}$;
- Intersecção do plano com a esfera de centro P e raio δ.



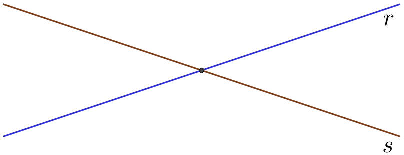
Distância entre duas retas

Distância entre duas retas

- Concorrentes;



- Concorrentes;
- $\text{dist}(r, s) = 0$.

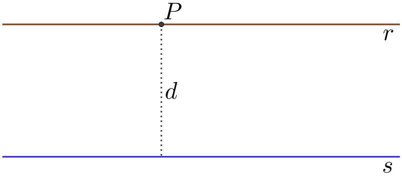


Distância entre duas retas

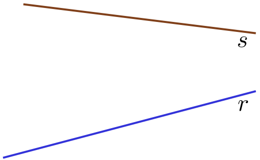
- Paralelas;

Distância entre duas retas

- Paralelas;
- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(P,s)$.

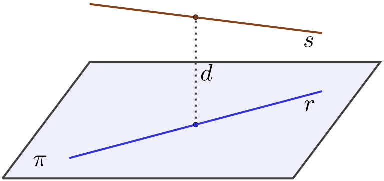


Distância entre duas retas reversas



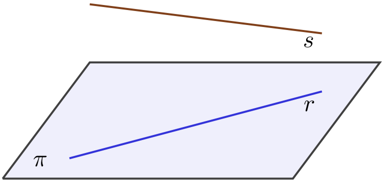
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi)$;



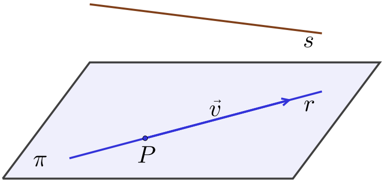
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?



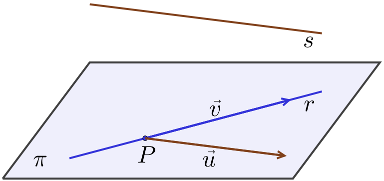
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;



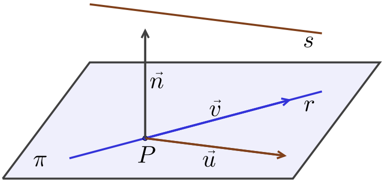
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r: \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;



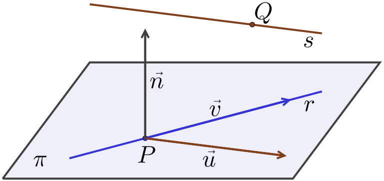
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;
- Faça $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$;



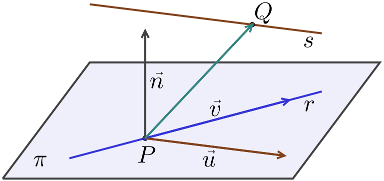
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;
- Faça $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$;
- Tome $Q \in s$;



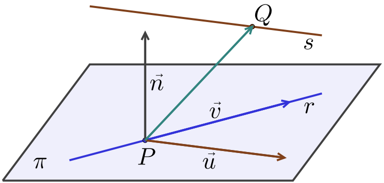
Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;
- Faça $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$;
- Tome $Q \in s$;
- $\text{dist}(r,s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$



Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;
- Faça $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$;
- Tome $Q \in s$;
- $\text{dist}(r,s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} \times \vec{v}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$



Distância entre duas retas reversas

- $\text{dist}(r,s) = \text{dist}(s,\pi)$;
- Como obter π?
- $r : \begin{cases} P \\ \vec{v} \end{cases}$;
- Tome $\vec{u} // s$;
- Faça $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$;
- Tome $Q \in s$;
- $\text{dist}(r,s) = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} \times \vec{v}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \dfrac{|(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$.