Elipse - Parte 1

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/CPKkgJLwHYg

Elipse: definição e gráfico

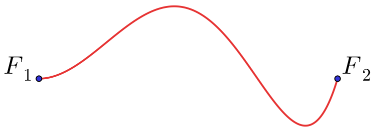
Definição

É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante

Elipse: definição e gráfico

Definição

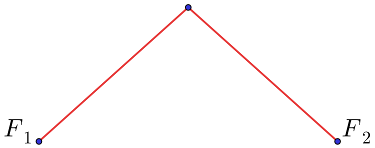
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

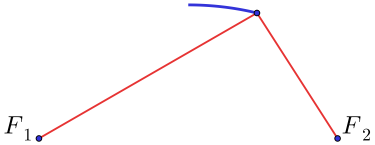
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

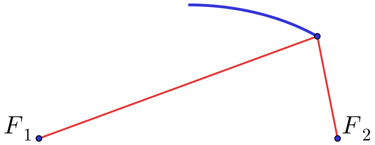
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

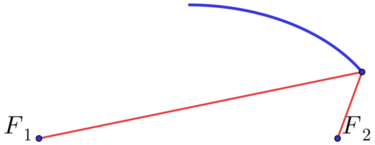
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

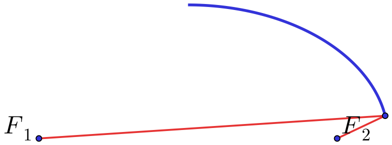
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

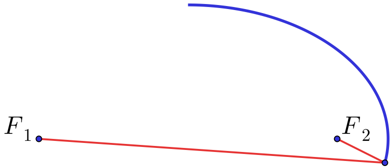
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

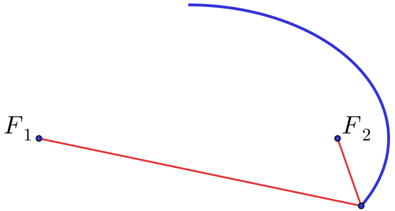
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

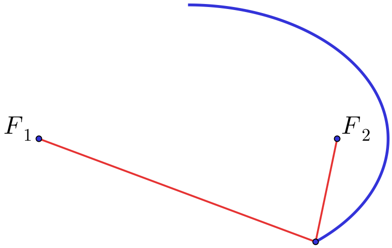
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

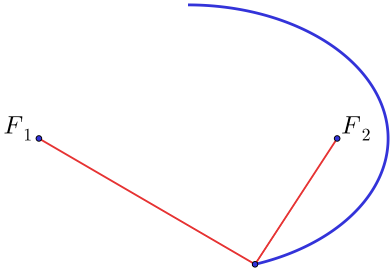
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

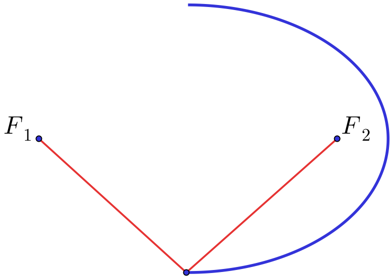
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

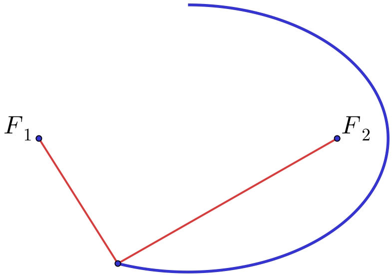
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

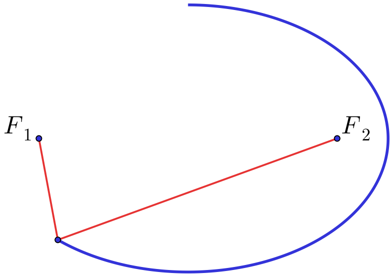
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

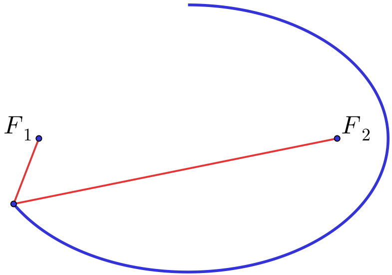
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

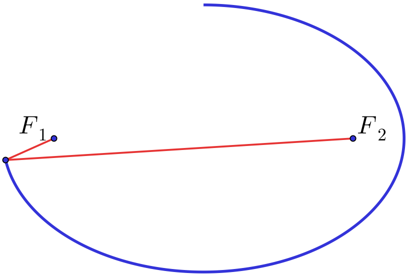
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

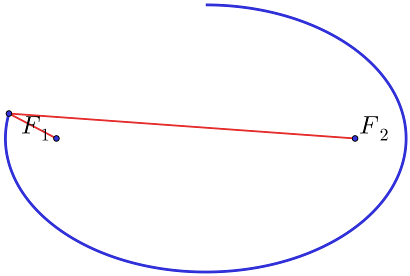
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

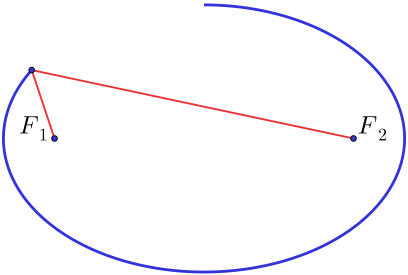
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

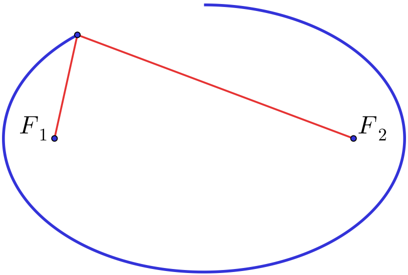
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

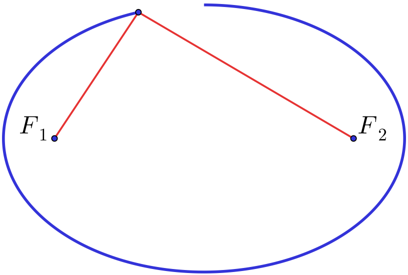
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

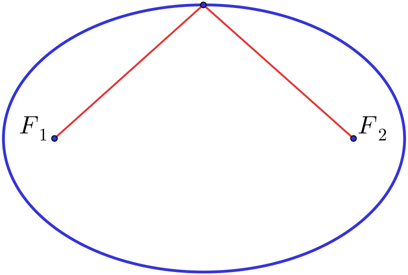
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

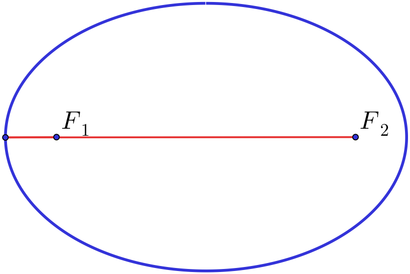
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante



Elipse: definição e gráfico

Definição

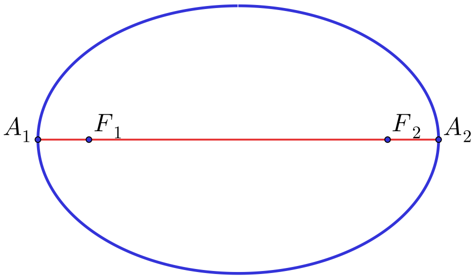
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante $= d(A_1, A_2)$.



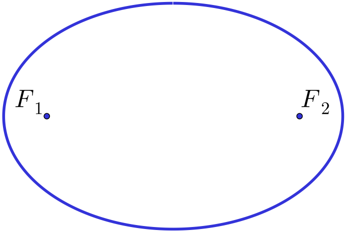
Elipse: definição e gráfico

Definição

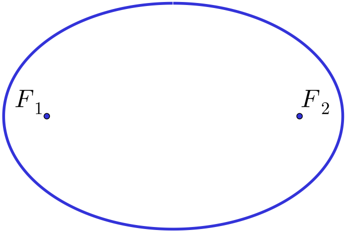
É o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados (focos) é constante $= d(A_1, A_2)$.



Equação da elipse

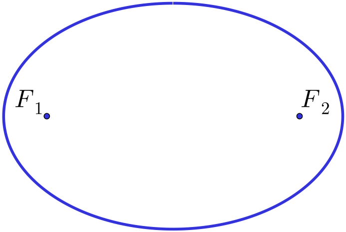


- Escolher um sistema de coordenadas.



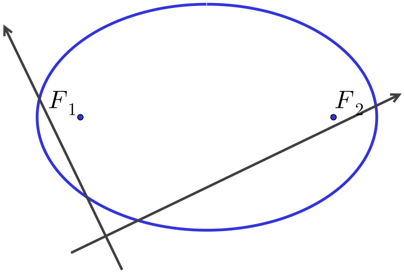
Equação da elipse

- Escolher um sistema de coordenadas.
- Qual sistema é mais conveniente?



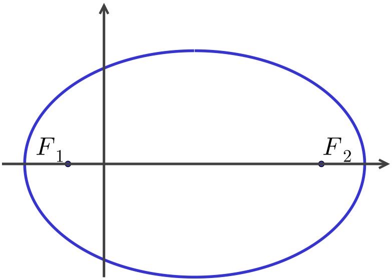
Equação da elipse

- Escolher um sistema de coordenadas.
- Qual sistema é mais conveniente?



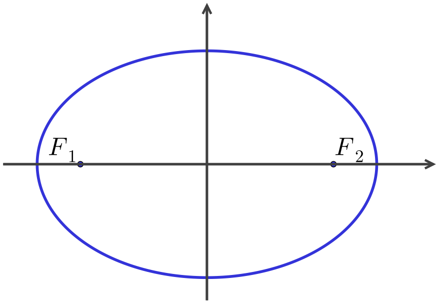
Equação da elipse

- Escolher um sistema de coordenadas.
- Qual sistema é mais conveniente?



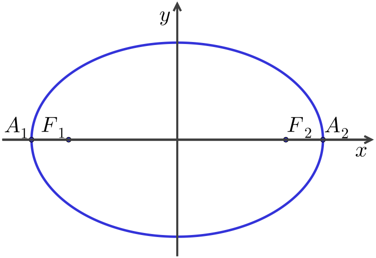
Equação da elipse

- Escolher um sistema de coordenadas.
- Qual sistema é mais conveniente? Este!



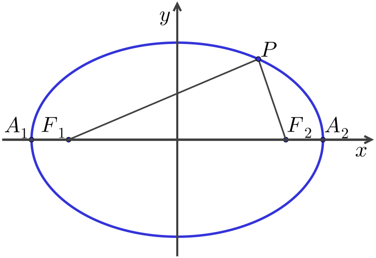
Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$;



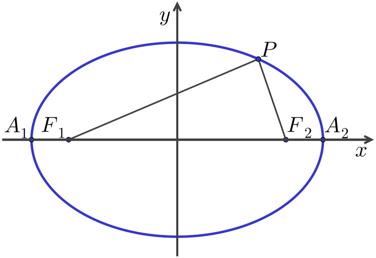
Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$;
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$



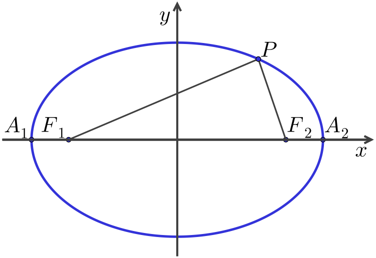
Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ Vértices: $A_1 = (-a,0)$ e $A_2 = (a,0)$;
- $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$;



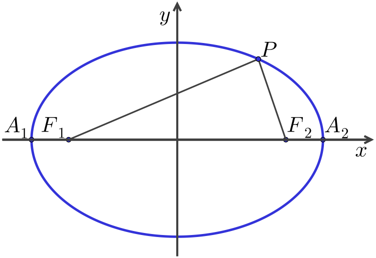
Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$;
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;
- $4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$



Equação da elipse

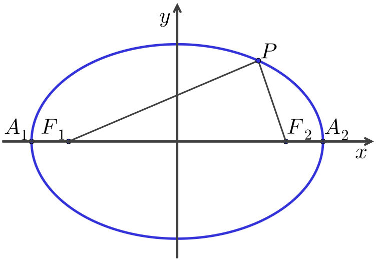
- Focos: $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ Vértices: $A_1 = (-a,0)$ e $A_2 = (a,0)$;
- $d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$;
- $4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2-c^2)a^2$;



UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$;
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;
- $4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$;
- Definindo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, obtemos

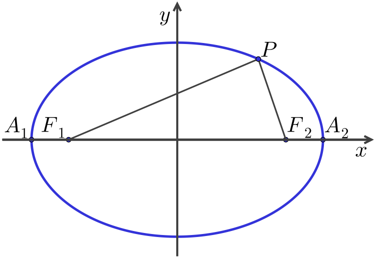


Equação da elipse

- Focos: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$;
- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$;
- $4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$;
- Definindo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, obtemos

Equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

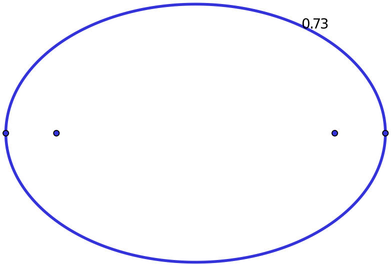


Excentricidade da elipse

- Excentricidade é a razão $e = \dfrac{c}{a}$;

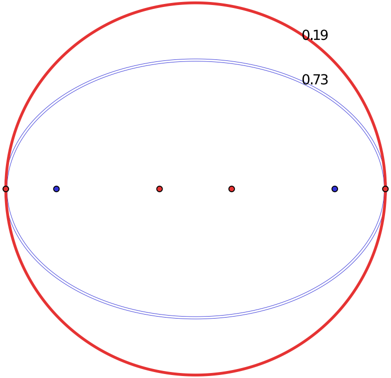
Excentricidade da elipse

- Excentricidade é a razão $e = \dfrac{c}{a}$;



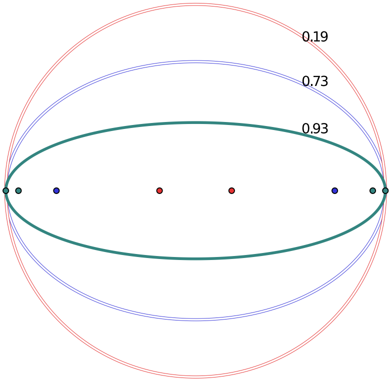
Excentricidade da elipse

- Excentricidade é a razão $e = \dfrac{c}{a}$;
- Quanto mais próxima de zero, mais arredondada é a curva.



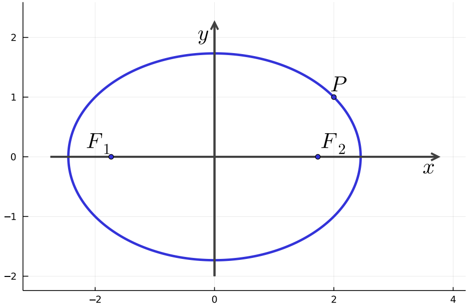
Excentricidade da elipse

- Excentricidade é a razão $e = \dfrac{c}{a}$;
- Quanto mais próxima de zero, mais arredondada é a curva.
- Quanto mais próxima de 1, mais achatada é a curva.



1. Reta tangente à elipse

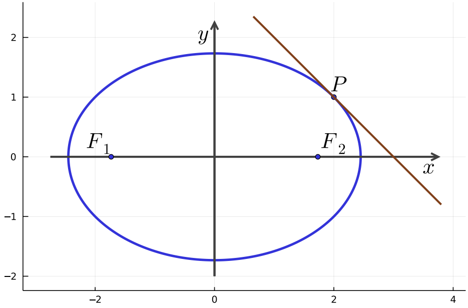
Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2, 1) \in \mathcal{E}$.



Exercícios

1. Reta tangente à elipse

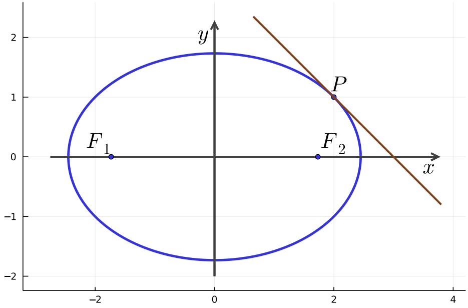
Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2, 1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.



1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2,1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r : \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 + nt \end{cases}$;

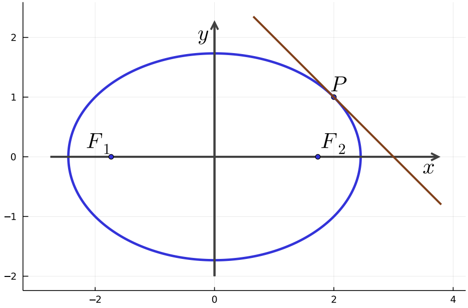


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2+2y^2=6$ e $P=(2,1)\in\mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

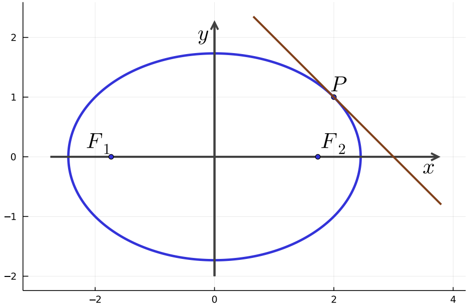
- $r:\begin{cases} x=2+mt \\ y=1+nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2+2(1+nt)^2=6$;



1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2,1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r : \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 + nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2 + 2(1+nt)^2 = 6$;
- $4(m+n)t + (m^2+2n^2)t^2 = 0$;

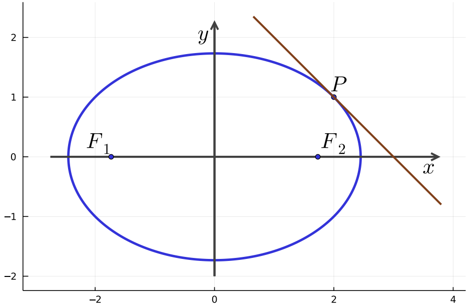


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2, 1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r : \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 + nt \end{cases}$;
- $(2 + mt)^2 + 2(1 + nt)^2 = 6$;
- $4(m + n)t + (m^2 + 2n^2)t^2 = 0$;
- $m^2 + 2n^2 \neq 0$ e só existe um t;

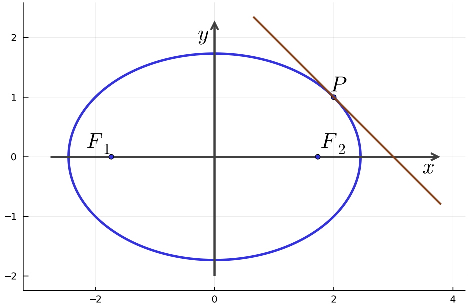


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2,1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r : \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 + nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2 + 2(1+nt)^2 = 6$;
- $4(m+n)t + (m^2+2n^2)t^2 = 0$;
- $m^2 + 2n^2 \neq 0$ e só existe um t;
- Portanto, $m + n = 0$;

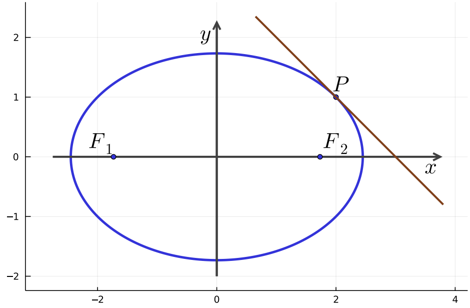


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2+2y^2=6$ e $P=(2,1)\in\mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r:\begin{cases} x=2+mt \\ y=1+nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2+2(1+nt)^2=6$;
- $4(m+n)t+(m^2+2n^2)t^2=0$;
- $m^2+2n^2\neq 0$ e só existe um t;
- Portanto, $m+n=0$;
- $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$;

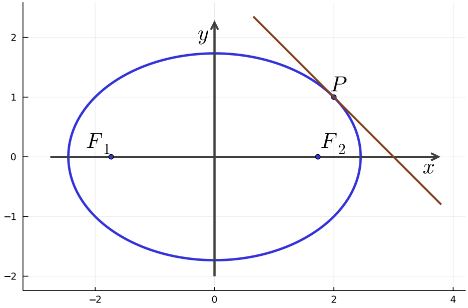


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$ e $P = (2,1) \in \mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 + nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2 + 2(1+nt)^2 = 6$;
- $4(m+n)t + (m^2+2n^2)t^2 = 0$;
- $m^2 + 2n^2 \neq 0$ e só existe um t;
- Portanto, $m + n = 0$;
- $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$;
- $r: x + y = 3$.

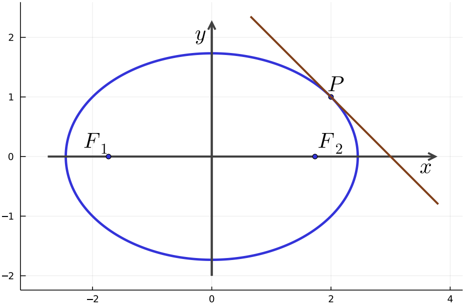


Exercícios

1. Reta tangente à elipse

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2+2y^2=6$ e $P=(2,1)\in\mathcal{E}$. Determine a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.

- $r:\begin{cases} x=2+mt \\ y=1+nt \end{cases}$;
- $(2+mt)^2+2(1+nt)^2=6$;
- $4(m+n)t+(m^2+2n^2)t^2=0$;
- $m^2+2n^2\neq 0$ e só existe um t;
- Portanto, $m+n=0$;
- $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$;
- $r: x+y=3$.

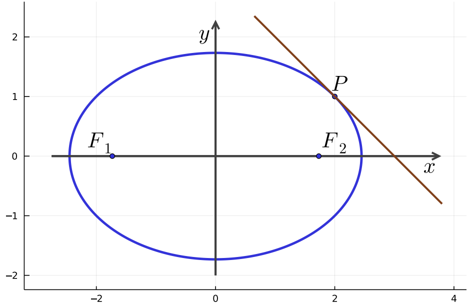


- A tangente à $\alpha x^2+\beta y^2=1$ em $P=(x_0,y_0)$ é $\alpha x_0 x+\beta y_0 y=1$.

Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

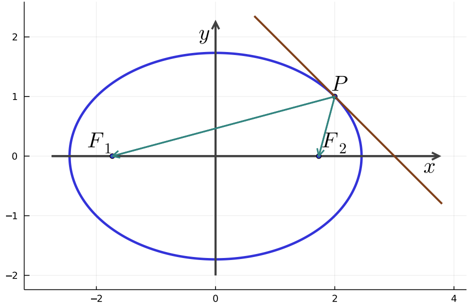
Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2, 1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P.



Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

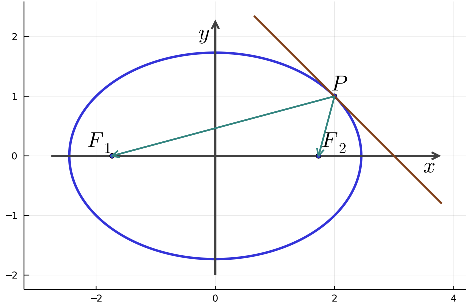


Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

- $r : x + y = 3;$

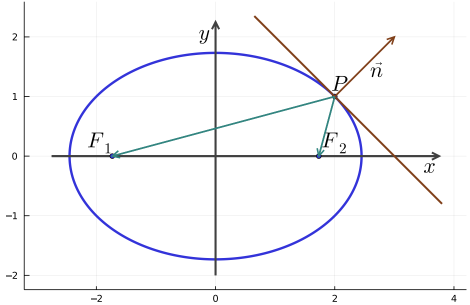


Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

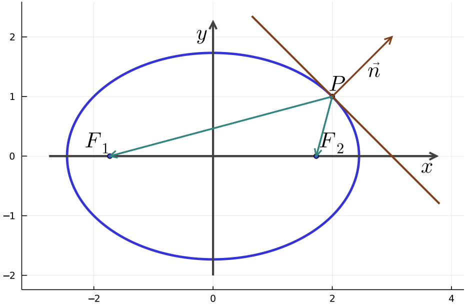
- $r : x + y = 3$;
- $\vec{n} = (1,1)$ é ortogonal à r;



2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

- $r : x + y = 3$;
- $\vec{n} = (1,1)$ é ortogonal à r;
- $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$;

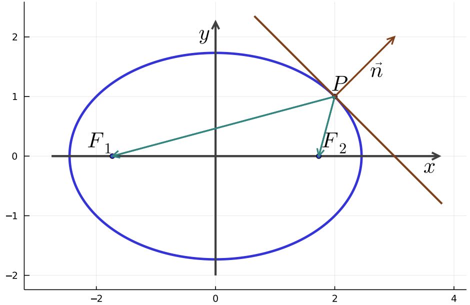


Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

- $r : x + y = 3$;
- $\vec{n} = (1,1)$ é ortogonal à r;
- $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$;
- $v_1 = -(\sqrt{3} + 2, 1)$;

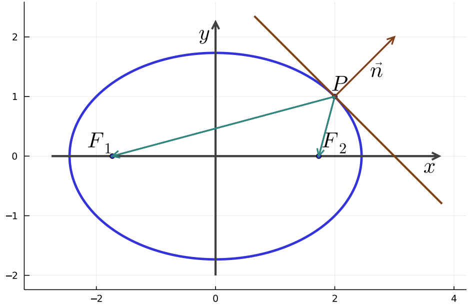


Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2+2y^2=6$, o ponto $P=(2,1)\in\mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1=\overrightarrow{PF_1}$ e $v_2=\overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

- $r: x+y=3$;
- $\vec{n}=(1,1)$ é ortogonal à r;
- $F_1=(-\sqrt{3},0)$ e $F_2=(\sqrt{3},0)$;
- $v_1=-(\sqrt{3}+2,1)$;
- $v_2=-(2-\sqrt{3},1)$;

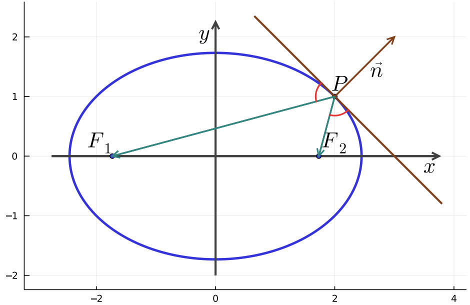


Exercícios

2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

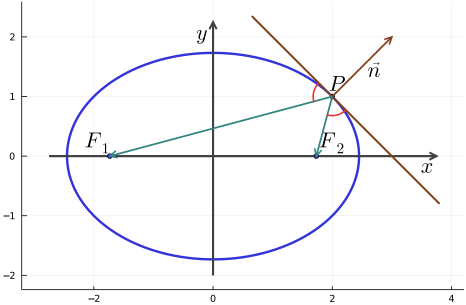
- $r : x + y = 3;$
- $\vec{n} = (1,1)$ é ortogonal à r;
- $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$;
- $v_1 = -(\sqrt{3}+2, 1)$;
- $v_2 = -(2-\sqrt{3}, 1)$;
- $\left\langle \vec{n}, \dfrac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle = \left\langle \vec{n}, \dfrac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle$.



2. Ângulo dos raios focais com a reta tangente

Considere a elipse $\mathcal{E}$ dada por $x^2 + 2y^2 = 6$, o ponto $P = (2,1) \in \mathcal{E}$ e a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto P. Mostre que os vetores $v_1 = \overrightarrow{PF_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{PF_2}$ fazem ângulos iguais com r.

- $r : x + y = 3$;
- $\vec{n} = (1,1)$ é ortogonal à r;
- $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$;
- $v_1 = -(\sqrt{3}+2, 1)$;
- $v_2 = -(2-\sqrt{3}, 1)$;
- $\left\langle \vec{n}, \dfrac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle = \left\langle \vec{n}, \dfrac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle$.



- Esta propriedade vale para qualquer elipse.