O plano no espaço $\mathbb{R}^3$ - Parte 1

Ademir Alves Ribeiro

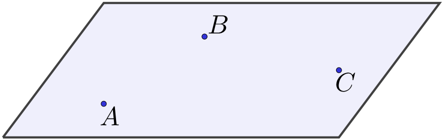
2021

https://youtu.be/j4MtsVw_TRI

Determinação de um plano

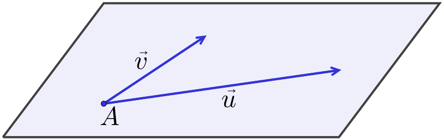
Axioma

Três pontos não colineares determinam um único plano.



Outro modo

Um ponto e duas direções independentes determinam um único plano.



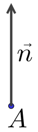
Determinação de um plano

Mais algum modo?

Determinação de um plano

Mais algum modo?

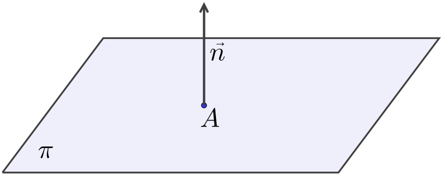
Dados um ponto A e um vetor não nulo $\vec{n}$,



Determinação de um plano

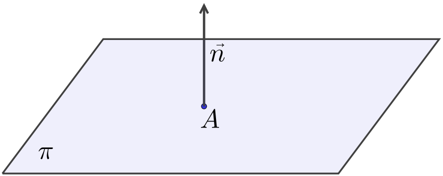
Mais algum modo?

Dados um ponto A e um vetor não nulo $\vec{n}$, existe um único plano π que passa por A e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$.

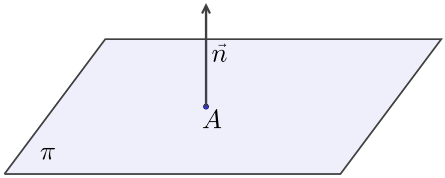


Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;

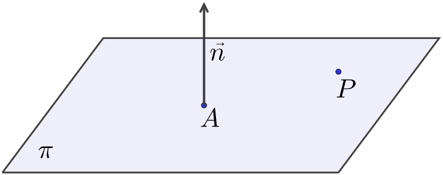


- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;



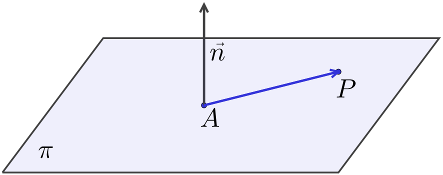
Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow$



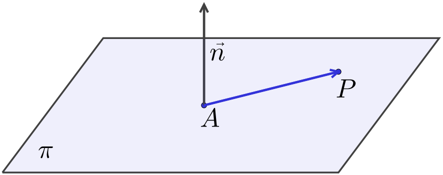
Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$;



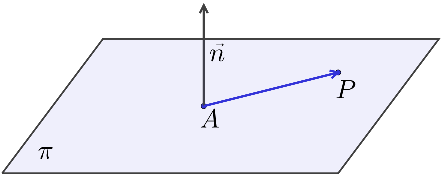
Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$;
- $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$;

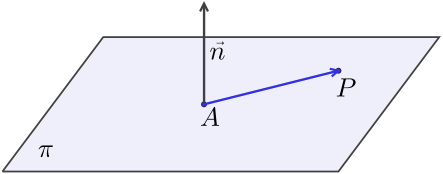


Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$;
- $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$;
- $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$;



- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$;
- $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$;
- $ax + by + cz \underbrace{-ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} = 0$;

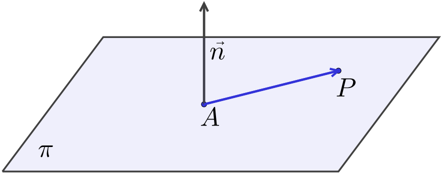


Equações do plano em $\mathbb{R}^3$

- Determinado por um ponto e um vetor normal;
- Sejam $A = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$;
- Temos que $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$;
- $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$;
- $ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} = 0$;

Equação geral do plano

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$



Exercício 1

Determine a equação geral do plano $\pi : \begin{cases} A = (2,1,0) \\ \vec{n} = (3,-2,1). \end{cases}$

Exercício 1

Determine a equação geral do plano π : $\begin{cases} A = (2,1,0) \\ \vec{n} = (3,-2,1). \end{cases}$

- $3x - 2y + z + d = 0;$

Exercício 1

Determine a equação geral do plano $\pi : \begin{cases} A = (2,1,0) \\ \vec{n} = (3,-2,1). \end{cases}$

- $3x - 2y + z + d = 0;$
- $A \in \pi \Rightarrow 6 - 2 + d = 0$

Exercício 1

Determine a equação geral do plano $\pi : \begin{cases} A = (2,1,0) \\ \vec{n} = (3,-2,1). \end{cases}$

- $3x - 2y + z + d = 0;$
- $A \in \pi \Rightarrow 6 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = -4;$

Exercício 1

Determine a equação geral do plano π : $\begin{cases} A = (2,1,0) \\ \vec{n} = (3,-2,1). \end{cases}$

- $3x - 2y + z + d = 0$;
- $A \in \pi \Rightarrow 6 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = -4$;
- $\pi : 3x - 2y + z - 4 = 0.$

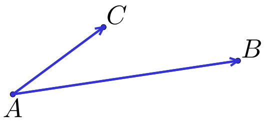
Exercício 2

Considere $A = (1,2,2)$, $B = (2,-1,1)$ e $C = (0,1,3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

Exercício 2

Considere $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, -1, 1)$ e $C = (0, 1, 3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

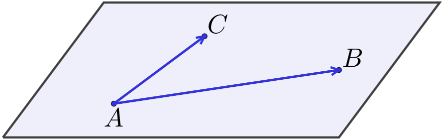
- $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1)$ não são paralelos;



Exercício 2

Considere $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, -1, 1)$ e $C = (0, 1, 3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

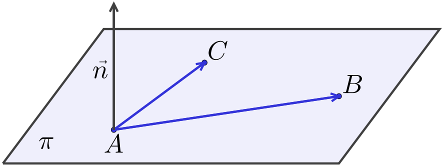
- $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1)$ não são paralelos;
- A, B e C não são colineares



Exercício 2

Considere $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, -1, 1)$ e $C = (0, 1, 3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

- $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1)$ não são paralelos;
- A, B e C não são colineares $\Rightarrow \pi : \begin{cases} A = (1, 2, 2) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \end{cases}$

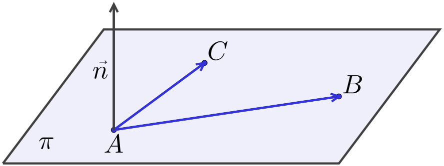


Exercícios

Exercício 2

Considere $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, -1, 1)$ e $C = (0, 1, 3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

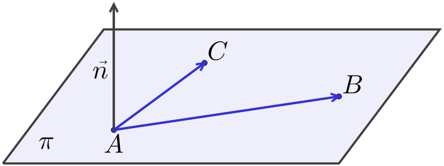
- $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1)$ não são paralelos;
- A, B e C não são colineares $\Rightarrow \pi : \begin{cases} A = (1, 2, 2) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 0, -4); \end{cases}$



Exercício 2

Considere $A = (1,2,2)$, $B = (2,-1,1)$ e $C = (0,1,3)$. Verifique que não são colineares e determine a equação geral do plano que contem estes pontos.

- $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,1)$ não são paralelos;
- A, B e C não são colineares $\Rightarrow \pi : \begin{cases} A = (1,2,2) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4,0,-4); \end{cases}$
- $\pi : -4x - 4z + 12 = 0$.

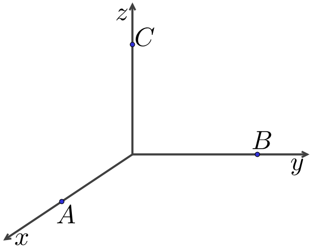


Exercício 3

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Mostre que o plano que passa por $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$ e $C=(0,0,c)$ tem equação $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Exercício 3

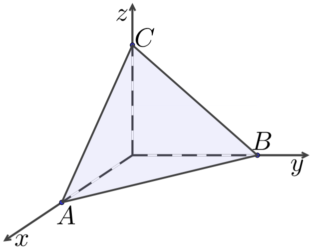
Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Mostre que o plano que passa por $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$ tem equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.



Exercício 3

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Mostre que o plano que passa por $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$ tem equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

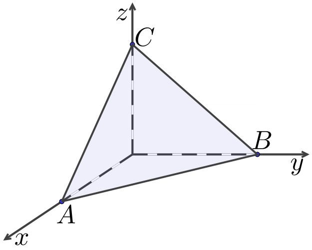
- $\pi : \begin{cases} A = (a, 0, 0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab); \end{cases}$



Exercício 3

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Mostre que o plano que passa por $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ e $C = (0,0,c)$ tem equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

- $\pi : \begin{cases} A = (a,0,0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab); \end{cases}$
- $\pi : bcx + acy + abz - abc = 0$

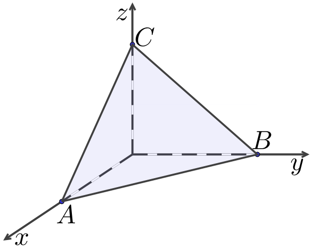


UFPR

Exercício 3

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Mostre que o plano que passa por $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$ e $C = (0,0,c)$ tem equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

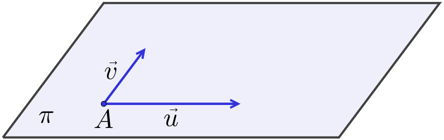
- $\pi : \begin{cases} A = (a,0,0) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab); \end{cases}$
- $\pi : bcx + acy + abz - abc = 0 \Leftrightarrow \pi : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$



Equações paramétricas do plano

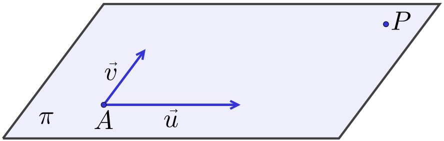
Equações paramétricas do plano

- Por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;



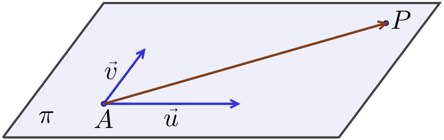
Equações paramétricas do plano

- Por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi$



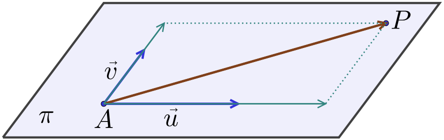
Equações paramétricas do plano

- Por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$



Equações paramétricas do plano

- Por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}$ para certos $s, t \in \mathbb{R}$;

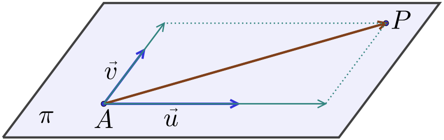


Equações paramétricas do plano

- Por $A=(x_0,y_0,z_0)$ e paralelo a $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ e $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$;
- $P=(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=s\vec{u}+t\vec{v}$ para certos $s,t\in\mathbb{R}$;

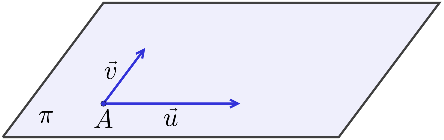
Equações paramétricas

$$\pi:\begin{cases} x=x_0+a_1s+a_2t \\ y=y_0+b_1s+b_2t \\ z=z_0+c_1s+c_2t \end{cases}$$



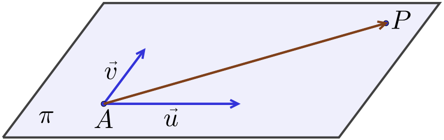
Como fica a equação geral neste caso?

- $\pi \ni A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;



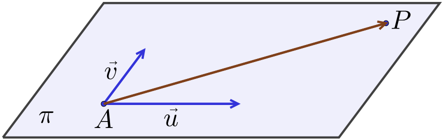
Como fica a equação geral neste caso?

- $\pi \ni A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}$ são coplanares;



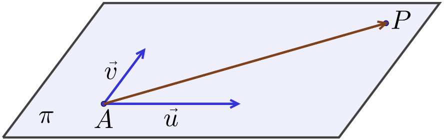
Como fica a equação geral neste caso?

- $\pi \ni A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}$ são coplanares;
- $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0;$



Como fica a equação geral neste caso?

- $\pi \ni A = (x_0, y_0, z_0)$ e paralelo a $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$;
- $P = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}$ são coplanares;
- $\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0;$
- Poderia usar isto no Exercício 2, com $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.



Uma reta vista como intersecção de dois planos

Exercício 4

Obtenha dois planos que se intersectam ao longo da reta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Exercício 4

Obtenha dois planos que se intersectam ao longo da reta $r:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 2-t. \end{cases}$

- $r:\left\{\; x-1 = \dfrac{2-y}{3} = 2-z \right.\;\;;$

Uma reta vista como intersecção de dois planos

Exercício 4

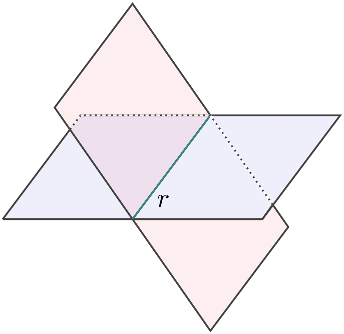
Obtenha dois planos que se intersectam ao longo da reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

- $r : \left\{ \; x - 1 = \dfrac{2 - y}{3} = 2 - z \right.$;
- $r : \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$.

Exercício 4

Obtenha dois planos que se intersectam ao longo da reta $r:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 2-t. \end{cases}$

- $r:\left\{\; x-1 = \dfrac{2-y}{3} = 2-z \right.$;
- $r:\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-3z+4=0 \end{cases}$.



Intersecção de uma reta com um plano

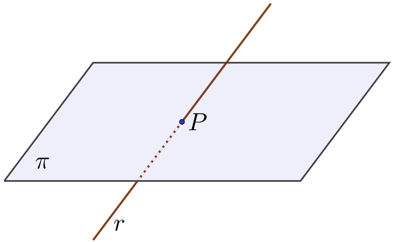
- Sejam $r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0;$

Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?

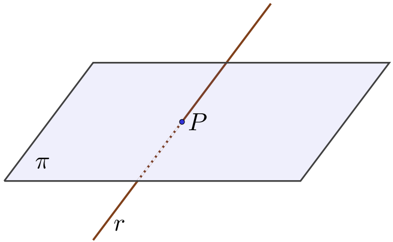
Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0;$
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?



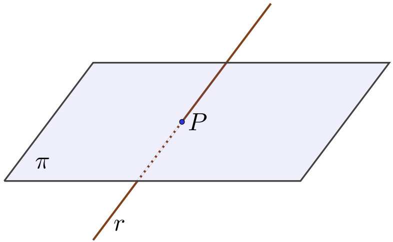
Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0;$
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0;$



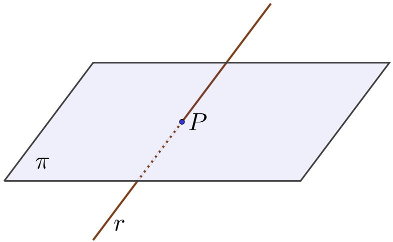
Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;



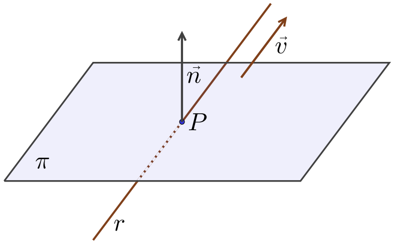
Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, então $r \cap \pi$ é um único ponto;



Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, então $r \cap \pi$ é um único ponto;

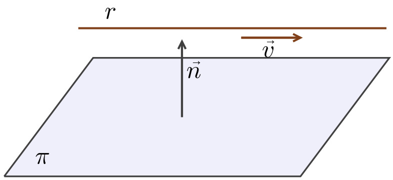


Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, então $r \cap \pi$ é um único ponto;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, temos dois casos:

Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, então $r \cap \pi$ é um único ponto;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, temos dois casos: $r \cap \pi = \emptyset$



Intersecção de uma reta com um plano

- Sejam $r:\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- O que podemos afirmar sobre $r \cap \pi$?
- $a(x_0 + \alpha t) + b(y_0 + \beta t) + c(z_0 + \gamma t) + d = 0$;
- $(a\alpha + b\beta + c\gamma)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, então $r \cap \pi$ é um único ponto;
- Se $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, temos dois casos: $r \cap \pi = \emptyset$ ou $r \subset \pi$.