O plano no espaço $\mathbb{R}^3$ - Parte 2

Ademir Alves Ribeiro

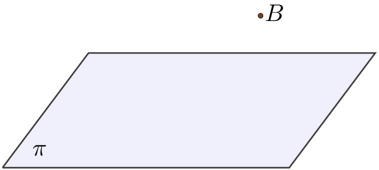
2021

https://youtu.be/_vq0bVrXBbU

Projeção de um ponto sobre um plano

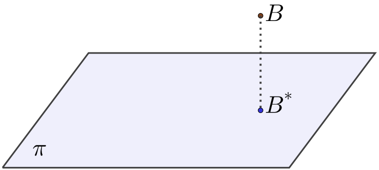
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;



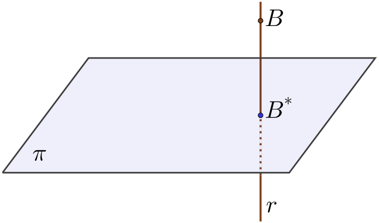
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?



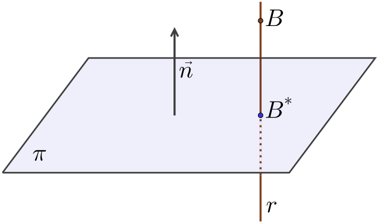
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;



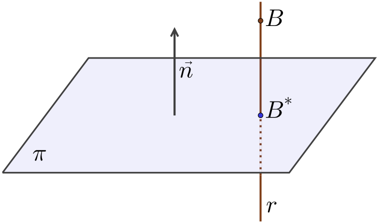
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c)$



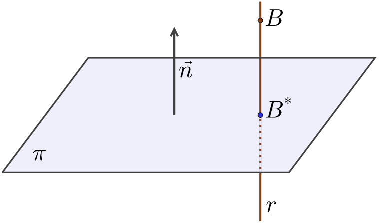
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$



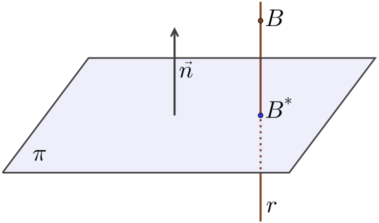
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = B + t\vec{n}$;



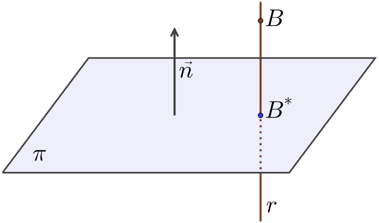
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = B + t\vec{n}$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;



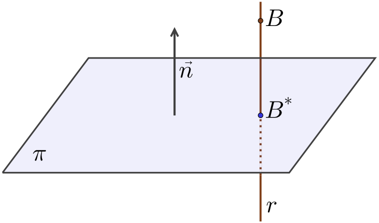
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = B + t\vec{n}$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$



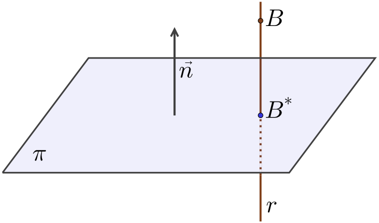
Projeção de um ponto sobre um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \text{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a, b, c) \Rightarrow r : (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = B + t\vec{n}$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^*$



Projeção de um ponto sobre um plano

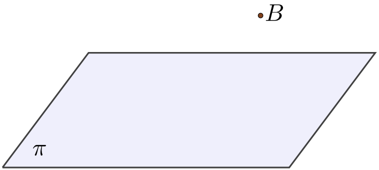
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter a projeção de B sobre π: $B^* = \mathrm{proj}_\pi B$?
- Basta tomar a reta por B, perpendicular a π, e intersectar com π;
- $\vec{v} = \vec{n} = (a,b,c) \Rightarrow r : (x,y,z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = B + t\vec{n}$;
- $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$;
- $\|\vec{n}\|^2 t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow t^* \Rightarrow B^* = B + t^*\vec{n}$.



Simétrico de um ponto em relação a um plano

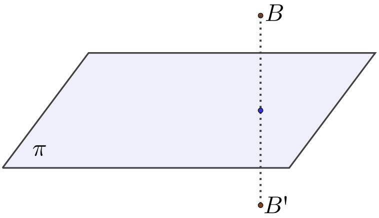
Simétrico de um ponto em relação a um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;



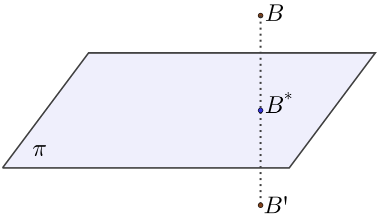
Simétrico de um ponto em relação a um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?



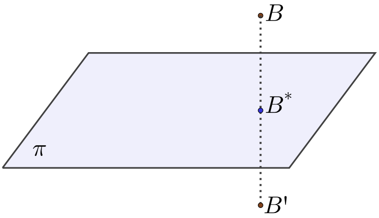
Simétrico de um ponto em relação a um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B+B'}{2}$.



Simétrico de um ponto em relação a um plano

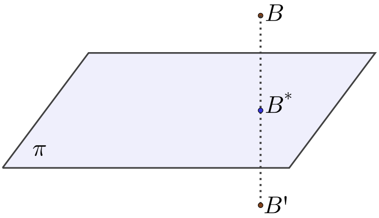
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.



- Note que $B^* - B = B' - B^*$,

Simétrico de um ponto em relação a um plano

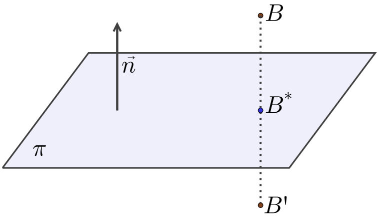
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.



- Note que $B^* - B = B' - B^*$, ou seja, $\overrightarrow{BB^*} = \overrightarrow{B^*B'}$

Simétrico de um ponto em relação a um plano

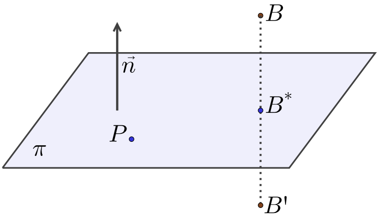
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.



- Note que $B^* - B = B' - B^*$, ou seja, $\overrightarrow{BB^*} = \overrightarrow{B^*B'} \; // \; \vec{n}$;

Simétrico de um ponto em relação a um plano

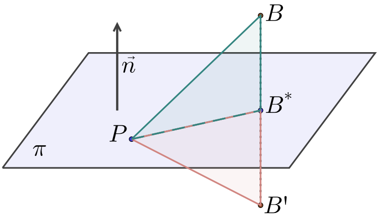
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.



- Note que $B^* - B = B' - B^*$, ou seja, $\overrightarrow{BB^*} = \overrightarrow{B^*B'} \; // \; \vec{n}$;
- Dado $P \in \pi$,

Simétrico de um ponto em relação a um plano

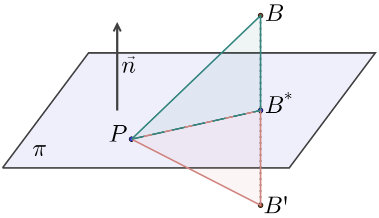
- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.



- Note que $B^* - B = B' - B^*$, ou seja, $\overrightarrow{BB^*} = \overrightarrow{B^*B'} \; // \; \vec{n}$;
- Dado $P \in \pi$, os triângulos $\triangle PBB^*$ e $\triangle PB^*B'$ são congruentes;

Simétrico de um ponto em relação a um plano

- Sejam $B = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$;
- Como obter B', o simétrico de B em relação a π?
- Basta obter a projeção B^* e fazer $B^* = \dfrac{B + B'}{2}$.

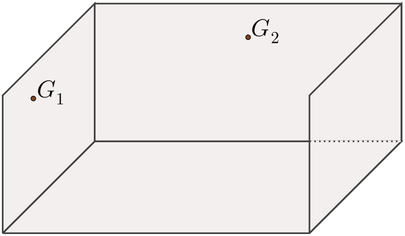


- Note que $B^* - B = B' - B^*$, ou seja, $\overrightarrow{BB^*} = \overrightarrow{B^*B'} \; // \; \vec{n}$;
- Dado $P \in \pi$, os triângulos $\triangle PBB^*$ e $\triangle PB^*B'$ são congruentes;
- Portanto, $d(P, B) = d(P, B')$.

Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

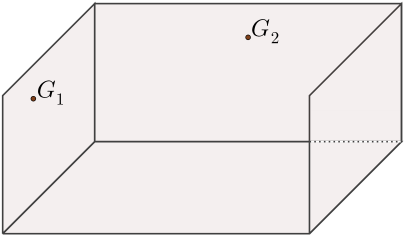


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?

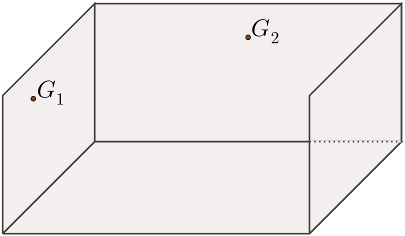


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?

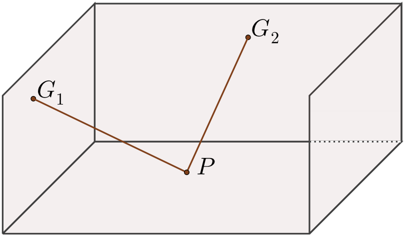


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

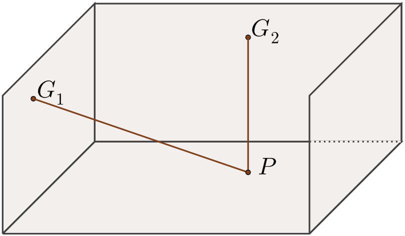
- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?



O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?

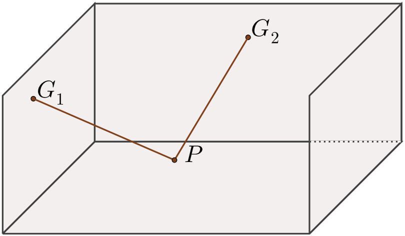


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?

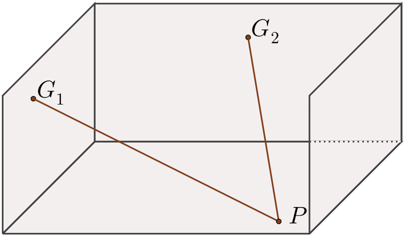


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?

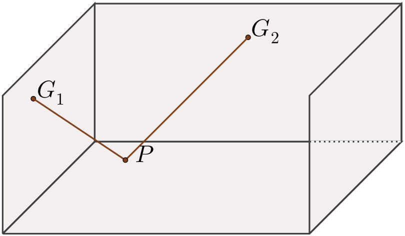


Exercício

O problema da corda

Dois ganchos estão presos nas paredes de uma sala.

- Qual o comprimento máximo de uma rede que pode ser estendida?
- Qual o comprimento mínimo de uma corda que pode ser presa nos ganchos e esticada até o chão?



Exercício

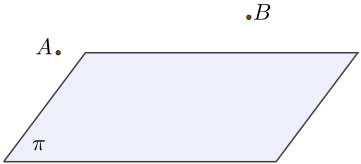
Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

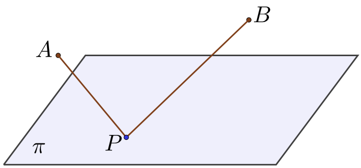


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;

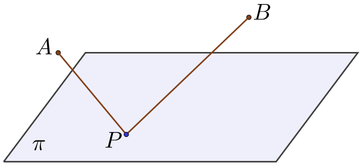


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;

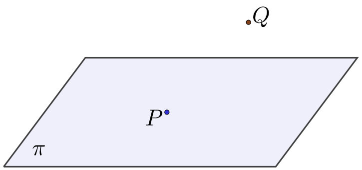


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;

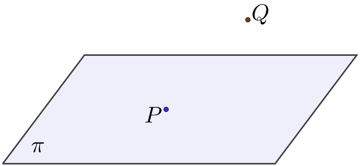


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;
- $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)$

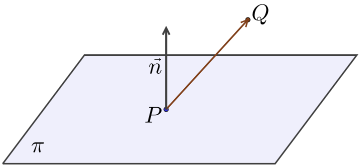


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;
- $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}$

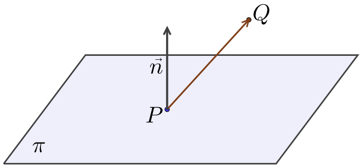


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;
- $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} > 0$

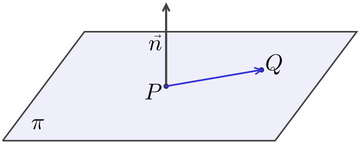


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;
- $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

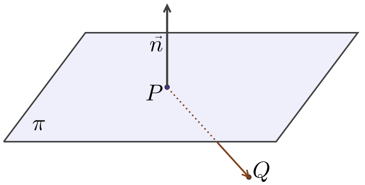


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Queremos $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- Vejamos primeiro que A e B estão de fato no mesmo semiespaço;
- Considere $P = (x,y,z) \in \pi : ax + by + cz + d = 0$ e $Q = (x_0, y_0, z_0)$;
- $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} < 0$;

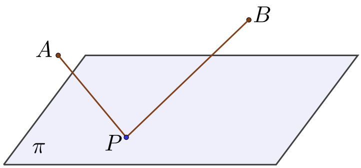


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Vejamos agora como obter $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;

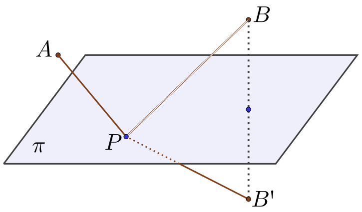


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Vejamos agora como obter $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- $d(P,B) = d(P,B')$

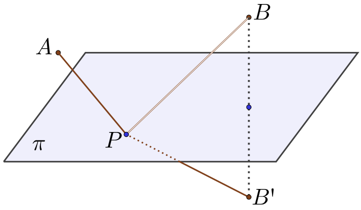


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Vejamos agora como obter $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- $d(P,B) = d(P,B') \Rightarrow d(P,A) + d(P,B) = d(A,P) + d(P,B')$;

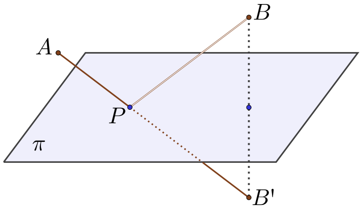


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Vejamos agora como obter $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- $d(P,B) = d(P,B') \Rightarrow d(P,A) + d(P,B) = d(A,P) + d(P,B')$;
- $d(A,P) + d(P,B')$ é mínima quando A, P e B' estão alinhados;

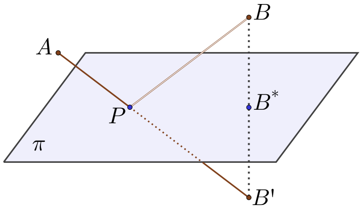


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Vejamos agora como obter $P \in \pi$ tal que $d(P,A) + d(P,B)$ é mínima;
- $d(P,B) = d(P,B') \Rightarrow d(P,A) + d(P,B) = d(A,P) + d(P,B')$;
- $d(A,P) + d(P,B')$ é mínima quando A, P e B' estão alinhados;
- Vamos calcular B^* e depois B';

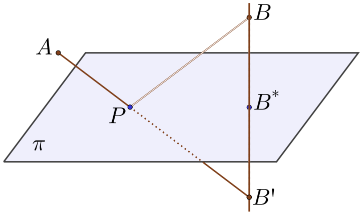


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 3, 3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x, y, z) = (t, 3 + 2t, 3 - t)$;

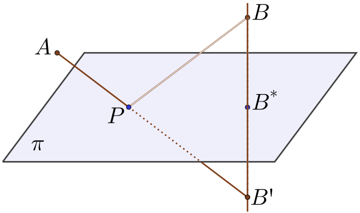


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x,y,z) = (t, 3+2t, 3-t)$;
- B^*: $t + 2(3+2t) - (3-t) + 3 = 0$

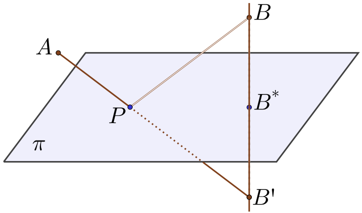


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x,y,z) = (t, 3+2t, 3-t)$;
- B^*: $t + 2(3+2t) - (3-t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -1$

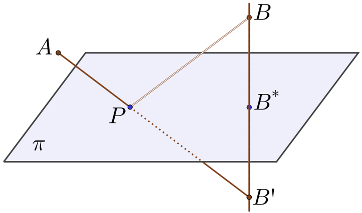


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x,y,z) = (t, 3+2t, 3-t)$;
- B^*: $t + 2(3+2t) - (3-t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow B^* = (-1,1,4)$;

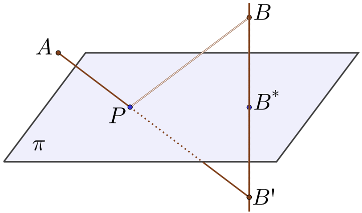


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x,y,z) = (t, 3+2t, 3-t)$;
- B^*: $t + 2(3+2t) - (3-t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow B^* = (-1,1,4)$;
- $B' = 2B^* - B = (-2,-1,5)$;

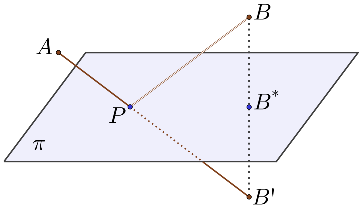


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por B e perpendicular a π: $(x,y,z) = (t, 3+2t, 3-t)$;
- B^*: $t + 2(3+2t) - (3-t) + 3 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow B^* = (-1,1,4)$;
- $B' = 2B^* - B = (-2,-1,5)$;
- Agora vamos calcular P;

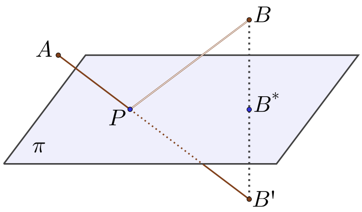


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por A e B': $(x,y,z) = (1-3t, -t, 1+4t)$;

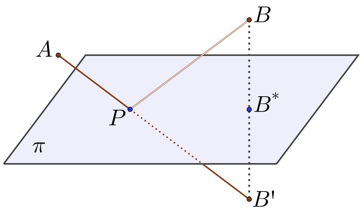


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x+2y-z+3=0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por A e B': $(x,y,z) = (1-3t, -t, 1+4t)$;
- Cálculo de P: $1-3t+2(-t)-(1+4t)+3=0$

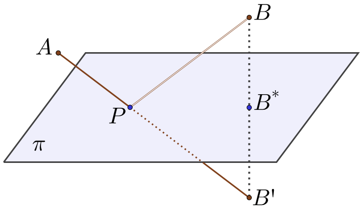


Exercício

Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por A e B': $(x,y,z) = (1-3t, -t, 1+4t)$;
- Cálculo de P: $1 - 3t + 2(-t) - (1+4t) + 3 = 0 \Rightarrow t = 1/3$;

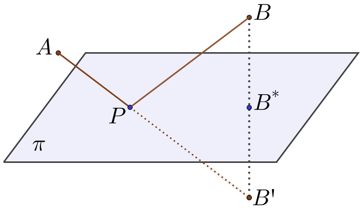


Exercício

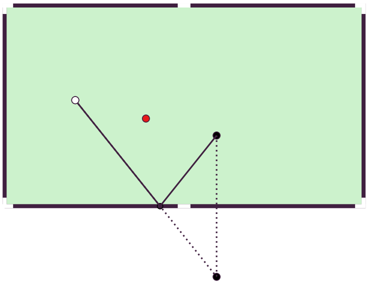
Modelando matematicamente

Considere os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (0,3,3)$. Encontre o ponto do plano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ cuja soma das distâncias aos pontos A e B é mínima.

- Reta por A e B': $(x,y,z) = (1-3t, -t, 1+4t)$;
- Cálculo de P: $1 - 3t + 2(-t) - (1+4t) + 3 = 0 \Rightarrow t = 1/3$;
- $P = (0, -1/3, 7/3)$.



Problemas diferentes com mesmo modelo



`https://youtu.be/HU6oxEyq2F0`