Produto interno de vetores

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/5Ap6G2Gp4FE

DMAT - UFPR

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$;

Produto interno

Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto interno Euclidiano de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

- Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Exercícios

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2;$

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2;$

Exercício 2

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exercícios

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2;$

Exercício 2

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

UFPR

Exercício 1

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2;$

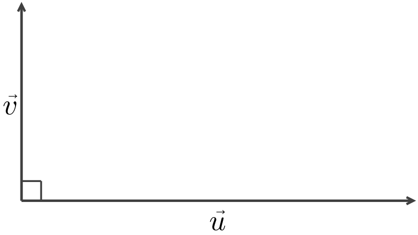
Exercício 2

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2;$

Exercício 3

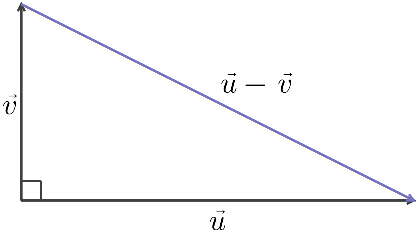
Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Exercício 3

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

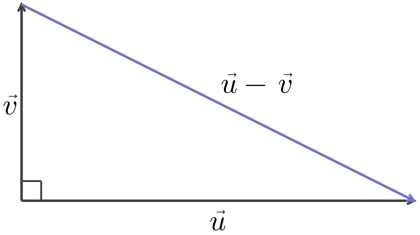
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$;



Exercício 3

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

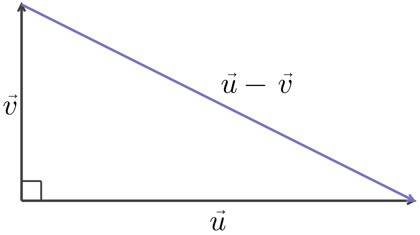
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$;
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;



Exercício 3

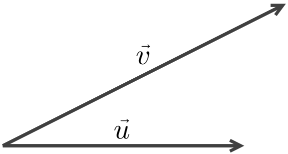
Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$;
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.



Terminologia

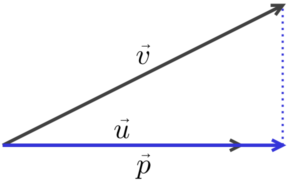
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

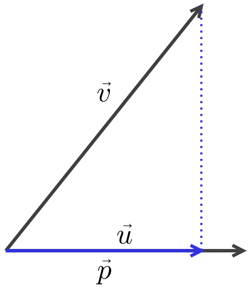
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

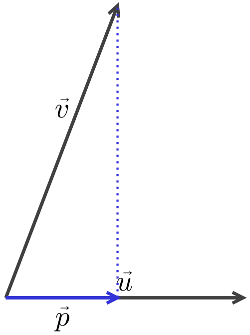
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

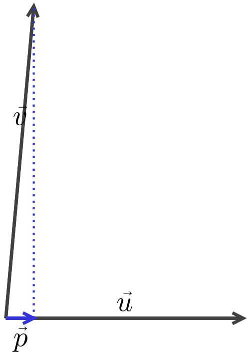
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

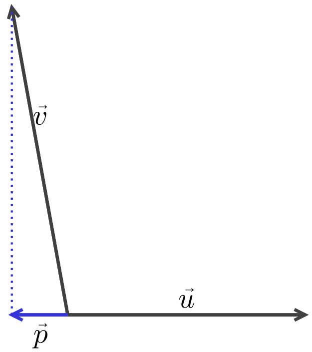
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

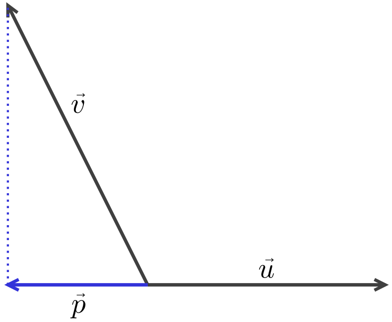
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

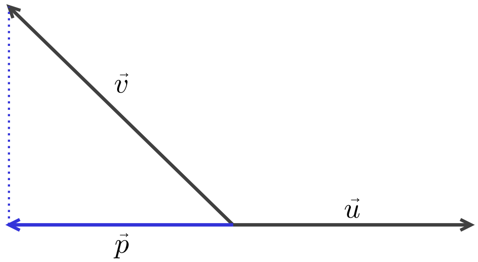
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Terminologia

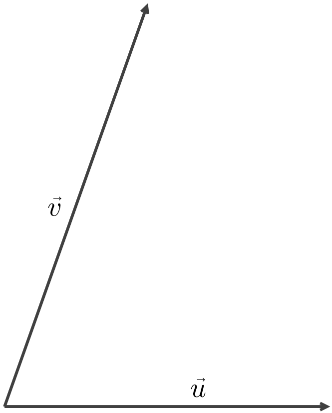
Projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ ou, simplesmente, projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right) \vec{u}$.

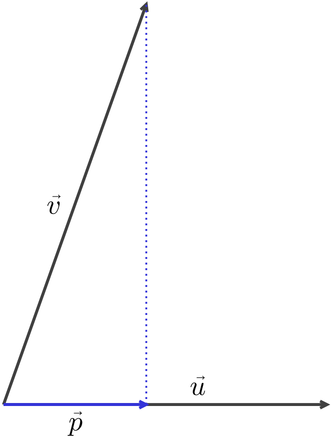


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;

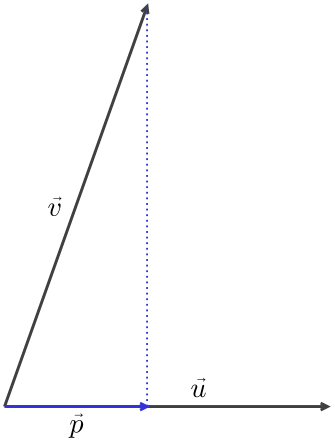


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;

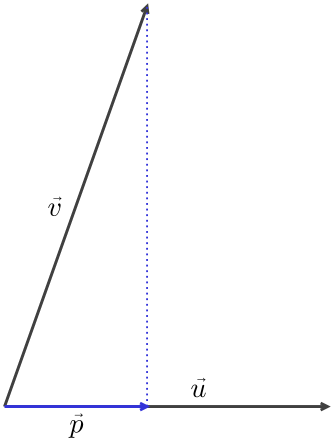


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$

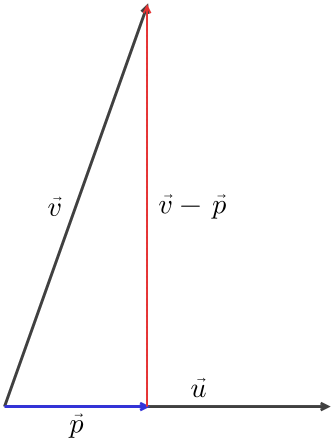


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right) \vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$
- $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{p})$;

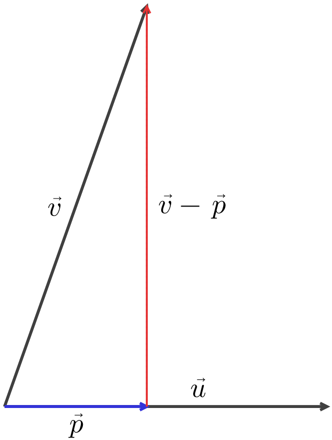


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$
- $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{p})$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{p}$

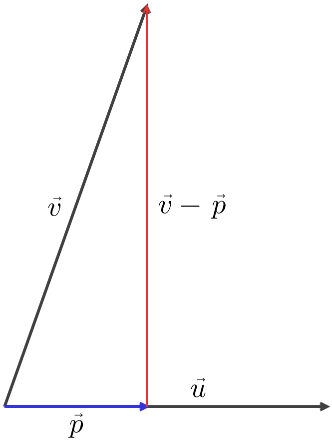


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$
- $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{p})$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{p} = k\vec{u}\cdot\vec{u}$;

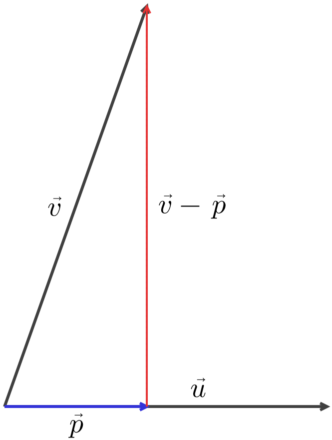


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

- Denote $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$
- $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{p})$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{p} = k\vec{u}\cdot\vec{u}$;
- $k = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$;

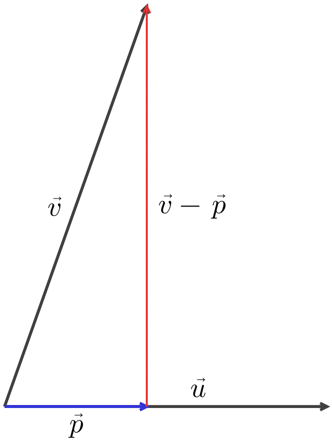


Projeção ortogonal

Teorema

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, com $\vec{u} \neq 0$, a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.

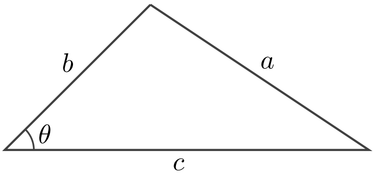
- Denote $\vec{p} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$;
- $\vec{p} = k\vec{u}$;
- $k = ?$
- $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{p})$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{p} = k\vec{u}\cdot\vec{u}$;
- $k = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$;
- $p = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$.



A lei dos cossenos

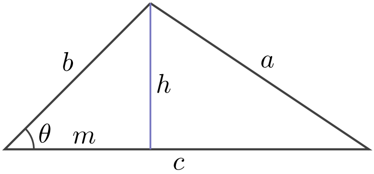
Exercício 4

Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.



Exercício 4

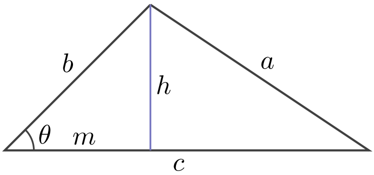
Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.



- Temos $h = b\sin\theta$ e $m = b\cos\theta$;

Exercício 4

Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.

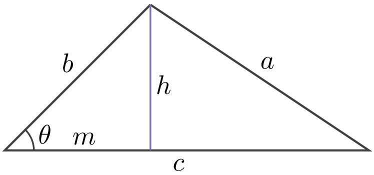


- Temos $h = b\sin\theta$ e $m = b\cos\theta$;
- Assim,

$$a^2 = h^2 + (c-m)^2$$

Exercício 4

Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.



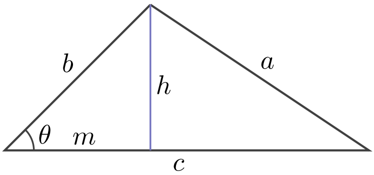
- Temos $h = b\sin\theta$ e $m = b\cos\theta$;
- Assim,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-m)^2 \\ &= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2cm + m^2 \end{aligned}$$

A lei dos cossenos

Exercício 4

Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.

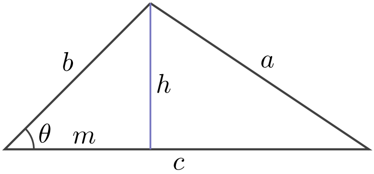


- Temos $h = b\sin\theta$ e $m = b\cos\theta$;
- Assim,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-m)^2 \\ &= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2cm + m^2 \\ &= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2cb\cos\theta + b^2\cos^2\theta \end{aligned}$$

Exercício 4

Considere o triângulo abaixo. Mostre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.



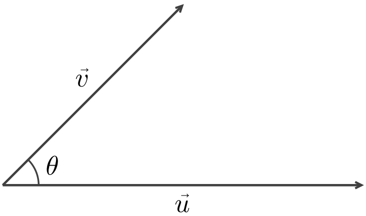
- Temos $h = b\sin\theta$ e $m = b\cos\theta$;
- Assim,

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + (c-m)^2 \\
&= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2cm + m^2 \\
&= b^2\sin^2\theta + c^2 - 2cb\cos\theta + b^2\cos^2\theta \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.
\end{aligned}$$

Produto interno e ângulo entre vetores

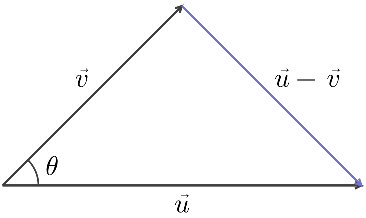
Teorema

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.



Teorema

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.

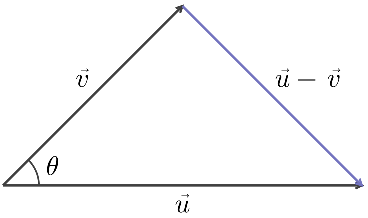


- Por um lado, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$;

Produto interno e ângulo entre vetores

Teorema

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.

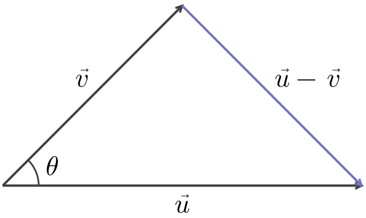


- Por um lado, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$;
- Por outro lado, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;

Produto interno e ângulo entre vetores

Teorema

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Mostre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.



- Por um lado, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$;
- Por outro lado, $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$;
- Portanto, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_1\|}$

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{||\vec{v}||\,||\vec{e}_1||} = \dfrac{x}{||\vec{v}||}$;

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ e $\vec{e_3} = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e_1}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e_1}\|} = \dfrac{x}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\beta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e_2}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e_2}\|} = \dfrac{y}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\gamma = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e_3}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e_3}\|} = \dfrac{z}{\|\vec{v}\|}$;

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_1\|} = \dfrac{x}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\beta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_2}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_2\|} = \dfrac{y}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\gamma = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_3}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_3\|} = \dfrac{z}{\|\vec{v}\|}$;
- Note que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$;

UFPR

Ângulos e cossenos diretores de um vetor

Definição

Denote $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Dado $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos que este vetor forma com $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$. Os cossenos diretores são os cossenos destes ângulos.

- Denotando por α, β e γ, temos:
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_1\|} = \dfrac{x}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\beta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_2}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_2\|} = \dfrac{y}{\|\vec{v}\|}$;
- $\cos\gamma = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_3}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{e}_3\|} = \dfrac{z}{\|\vec{v}\|}$;
- Note que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$;
- Portanto, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

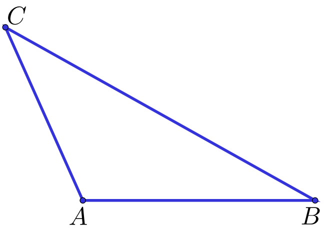
Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

Exercícios

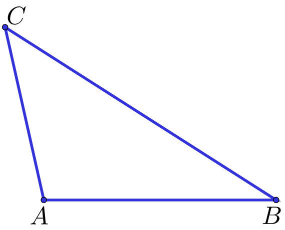
Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.



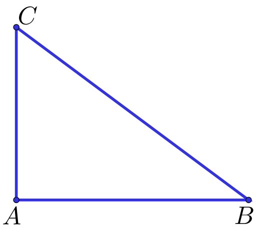
Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.



Exercício 5

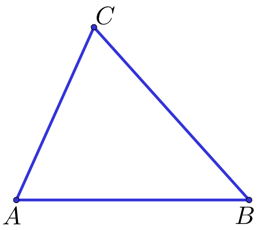
Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.



Exercícios

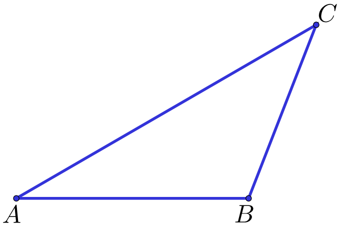
Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.



Exercício 5

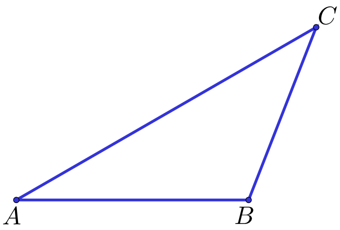
Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.



Exercício 5

Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

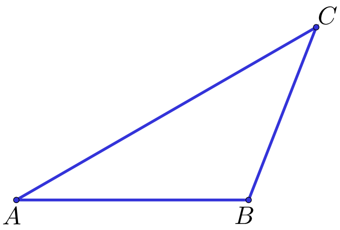
- $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$;



Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

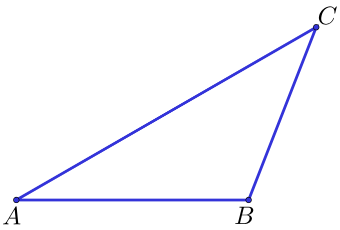
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;



Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;

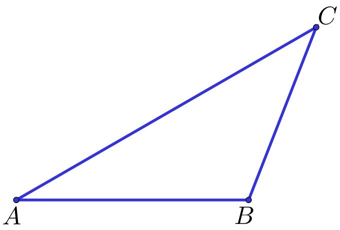


Exercícios

Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

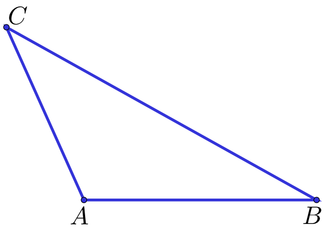
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\angle A)$;



Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

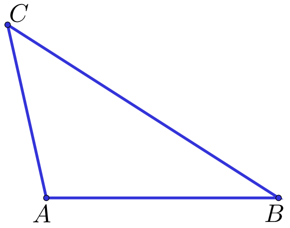
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\angle A)$;
- $t < 1 \Rightarrow \angle A$ é obtuso;



Exercício 5

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(2+t,5-2t,-3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t\in\mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

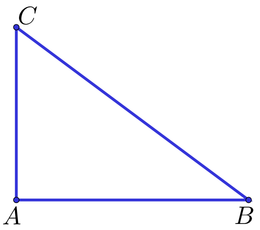
- $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC}=(1+t,3-2t,-2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9t-9$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\angle A)$;
- $t<1\Rightarrow\angle A$ é obtuso;



Exercício 5

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

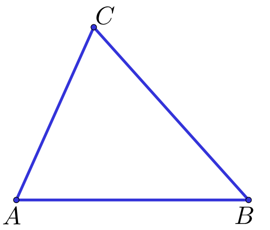
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\angle A)$;
- $t < 1 \Rightarrow \angle A$ é obtuso;
- $t = 1 \Rightarrow \angle A$ é reto;



Exercício 5

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(2+t,5-2t,-3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t\in\mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

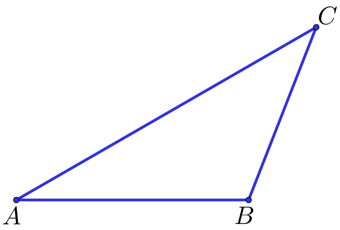
- $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC}=(1+t,3-2t,-2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9t-9$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\angle A)$;
- $t<1 \Rightarrow \angle A$ é obtuso;
- $t=1 \Rightarrow \angle A$ é reto;
- $t>1 \Rightarrow \angle A$ é agudo.



Exercício 5

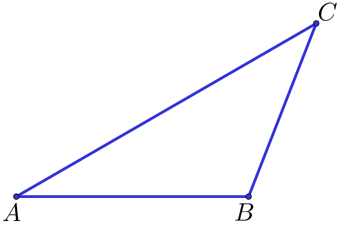
Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Classifique o ângulo $\angle A$ em obtuso, reto ou agudo em função de t.

- $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos(\angle A)$;
- $t < 1 \Rightarrow \angle A$ é obtuso;
- $t = 1 \Rightarrow \angle A$ é reto;
- $t > 1 \Rightarrow \angle A$ é agudo.



Exercício 6

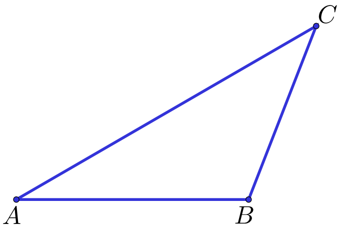
Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Para que valor de t temos $\angle A = \pi/6$?



Exercício 6

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(2+t,5-2t,-3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t\in\mathbb{R}$. Para que valor de t temos $\angle A=\pi/6$?

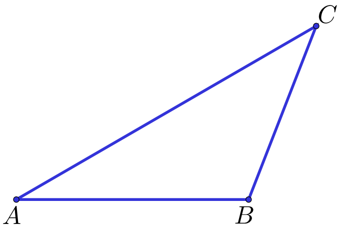
- $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC}=(1+t,3-2t,-2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9t-9$;



Exercício 6

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Para que valor de t temos $\angle A = \pi/6$?

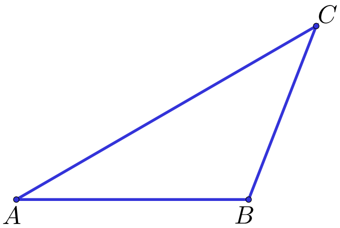
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sqrt{3}/2$;



Exercício 6

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Para que valor de t temos $\angle A = \pi/6$?

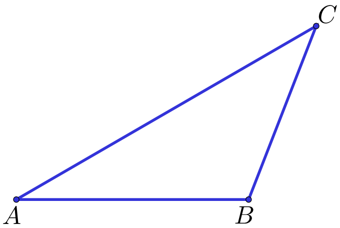
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sqrt{3}/2$;
- $6(t-1) = \sqrt{3}\|\overrightarrow{AC}\|$;



Exercício 6

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t \in \mathbb{R}$. Para que valor de t temos $\angle A = \pi/6$?

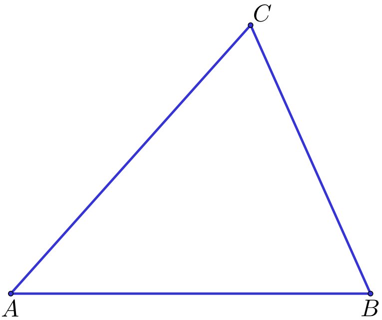
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \sqrt{3}/2$;
- $6(t-1) = \sqrt{3}\|\overrightarrow{AC}\|$;
- $t > 1 \Rightarrow t = (3+\sqrt{15})/3$.



Exercícios

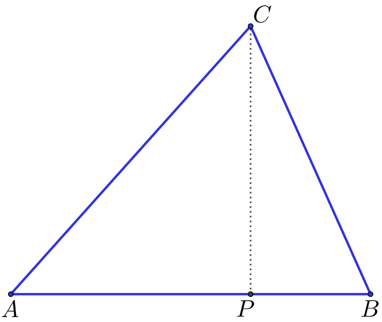
Exercício 7

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(2+t,5-2t,-3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t=5/3$.



Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

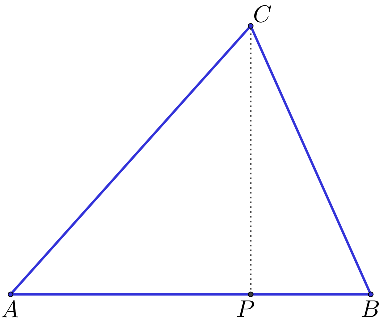


Exercícios

Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

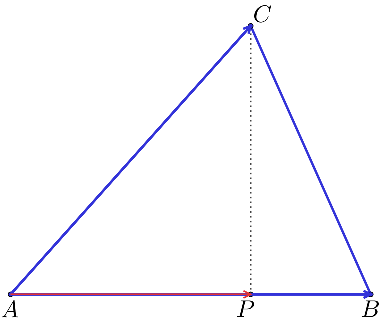
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;



Exercício 7

Sejam $A=(1,2,-1)$, $B=(2,0,1)$ e $C=(2+t,5-2t,-3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t=5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

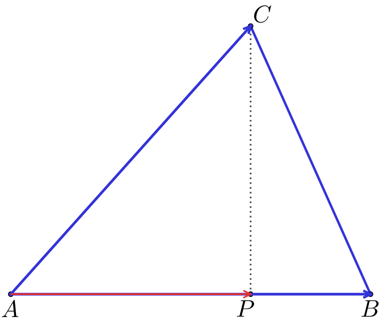
- $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC}=(1+t,3-2t,-2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9t-9$;
- $\overrightarrow{AP}=\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AC}$;



Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

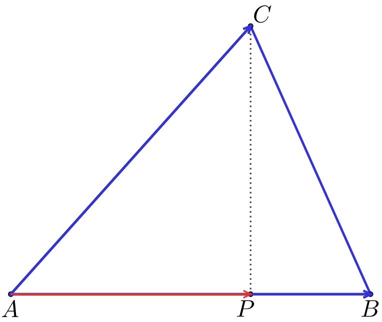
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AP} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AP} = (t-1)(1,-2,2)$;



Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

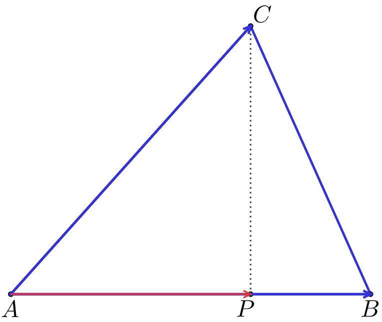
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t-9$;
- $\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AP} = (t-1)(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AP} = 2/3(1,-2,2)$;



Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

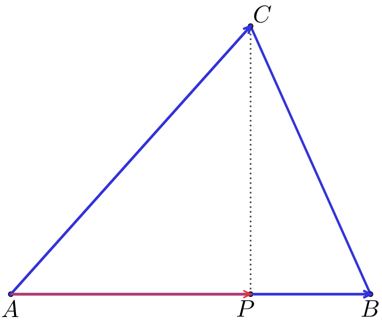
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AP} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AP} = (t-1)(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AP} = 2/3(1,-2,2)$;
- $P = (5/3, 2/3, 1/3)$;



Exercício 7

Sejam $A = (1,2,-1)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

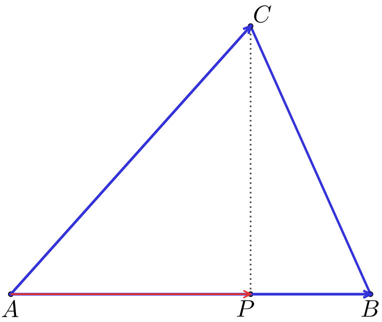
- $\overrightarrow{AB} = (1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t-9$;
- $\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AP} = (t-1)(1,-2,2)$;
- $\overrightarrow{AP} = 2/3(1,-2,2)$;
- $P = (5/3, 2/3, 1/3)$;
- $\overrightarrow{PC} = (2,1,0)$;



Exercício 7

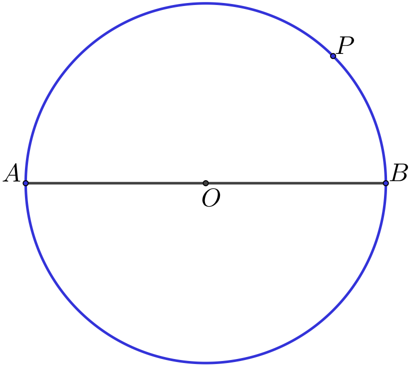
Sejam $A = (1, 2, -1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (2+t, 5-2t, -3+2t)$ vértices de um triângulo, com $t = 5/3$. Calcule a altura do triângulo relativa ao lado AB.

- $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2)$;
- $\overrightarrow{AC} = (1+t, 3-2t, -2+2t)$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9t - 9$;
- $\overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AP} = (t-1)(1, -2, 2)$;
- $\overrightarrow{AP} = 2/3(1, -2, 2)$;
- $P = (5/3, 2/3, 1/3)$;
- $\overrightarrow{PC} = (2, 1, 0)$;
- Altura: $\sqrt{5}$.



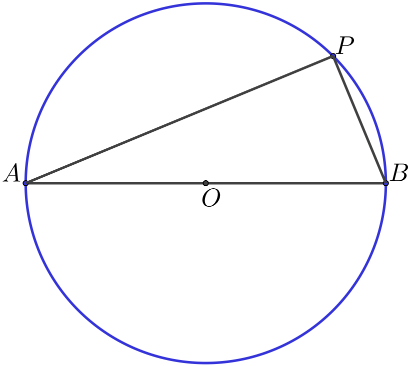
Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência,



Exercício 8

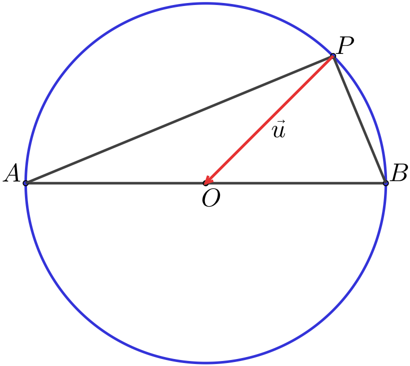
Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.



Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

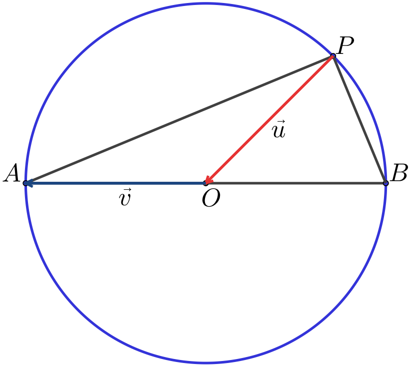
- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;



Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;

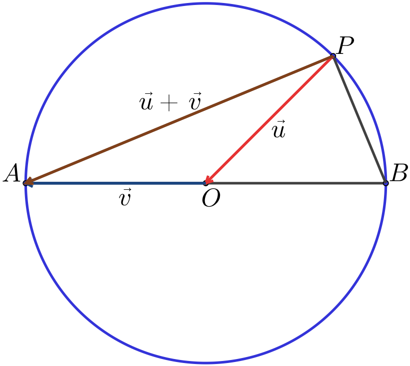


Exercícios

Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;
- $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PA}$;

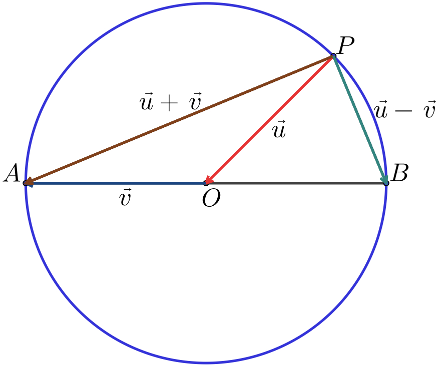


Exercícios

Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;
- $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PA}$;
- $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PB}$;

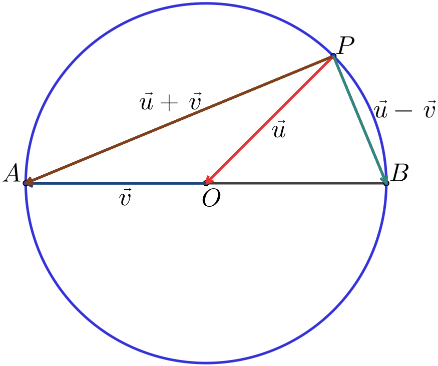


Exercícios

Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

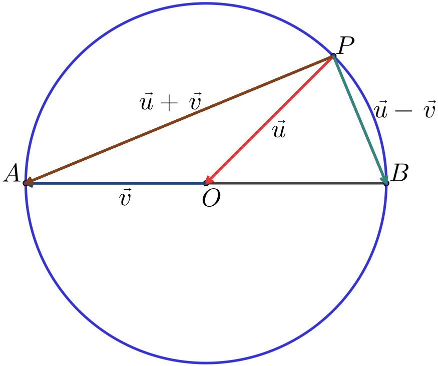
- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;
- $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PA}$;
- $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PB}$;
- $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$



Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;
- $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PA}$;
- $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PB}$;
- $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$



Exercício 8

Prove que de qualquer ponto sobre uma circunferência, enxergamos qualquer diâmetro sob um ângulo de $\pi/2$ radianos.

- $\vec{u} = \overrightarrow{PO}$;
- $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$;
- $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PA}$;
- $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{PB}$;
- $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$.