# Produto misto em $\mathbb{R}^3$

Ademir Alves Ribeiro

2021

https://youtu.be/QeVlIZQvO0s

# Produto misto

## Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

# Produto misto

**Definição**

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

- Qual produto é efetuado primeiro?

# Produto misto

**Definição**

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

- Qual produto é efetuado primeiro?
- $\vec{v} \times \vec{w} = \left( \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right)$;

# Produto misto

## Definição

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

- Qual produto é efetuado primeiro?
- $\vec{v} \times \vec{w} = \left( \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right);$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix};$

# Produto misto

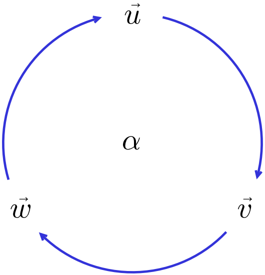
**Definição**

Dados $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$, o produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o número real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.

- Qual produto é efetuado primeiro?
- $\vec{v} \times \vec{w} = \left( \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right);$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix};$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

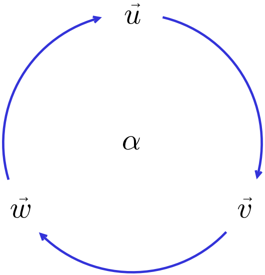
# Propriedade cíclica

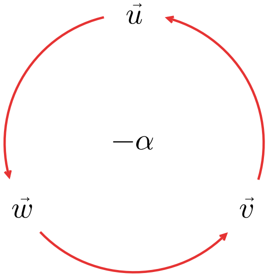
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = \alpha$$



# Propriedade cíclica

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = \alpha \qquad (\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = (\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = (\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\alpha$$



# Outras propriedades

- Considere $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$;

# Outras propriedades

- Considere $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$;
- $(\vec{u} + \vec{q}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{q}, \vec{v}, \vec{w})$;

# Outras propriedades

- Considere $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$;
- $(\vec{u}+\vec{q}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{q}, \vec{v}, \vec{w})$;
- $(\vec{u}, \vec{v}+\vec{q}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{q}, \vec{w})$;

# Outras propriedades

- Considere $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$;
- $(\vec{u}+\vec{q},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{q},\vec{v},\vec{w})$;
- $(\vec{u},\vec{v}+\vec{q},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{q},\vec{w})$;
- $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}+\vec{q}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + (\vec{u},\vec{v},\vec{q})$;

# Outras propriedades

- Considere $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$;
- $(\vec{u}+\vec{q}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{q}, \vec{v}, \vec{w})$;
- $(\vec{u}, \vec{v}+\vec{q}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{q}, \vec{w})$;
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+\vec{q}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{q})$;
- $(k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, k\vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

# Uma propriedade geométrica

**Coplanaridade**

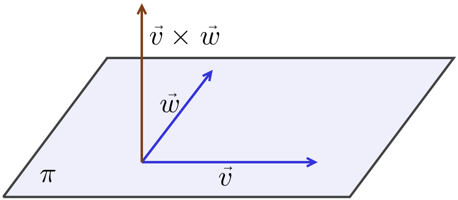
Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

# Uma propriedade geométrica

## Coplanaridade

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

- $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$;

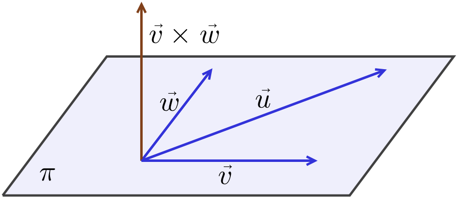


# Uma propriedade geométrica

## Coplanaridade

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

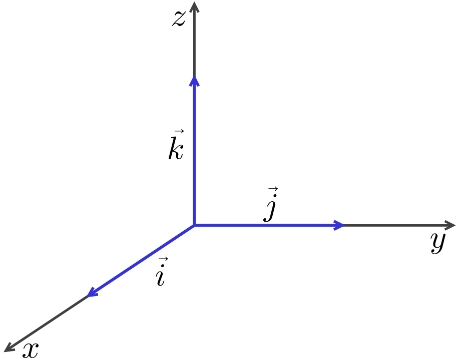
- $\vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{v}$ e $\vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{w}$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}\times\vec{w}\perp\vec{u}$.



# Coplanaridade de vetores e coplanaridade de pontos

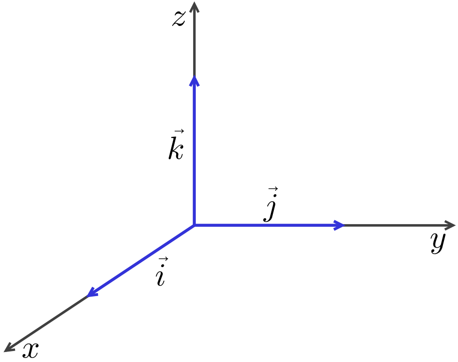
# Coplanaridade de vetores e coplanaridade de pontos

- 3 vetores podem não ser coplanares;



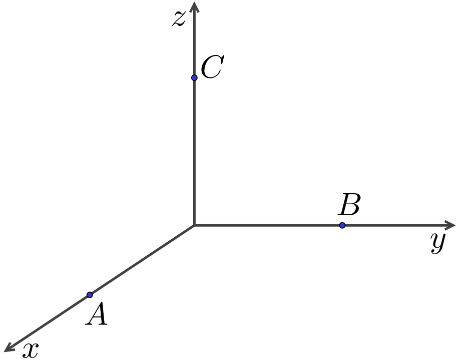
# Coplanaridade de vetores e coplanaridade de pontos

- 3 vetores podem não ser coplanares;
- $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$;



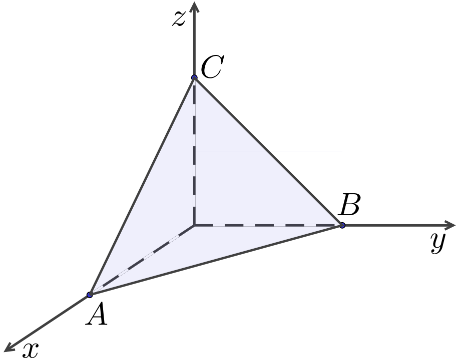
# Coplanaridade de vetores e coplanaridade de pontos

- 3 vetores podem não ser coplanares;
- $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$;
- 3 pontos sempre são coplanares;



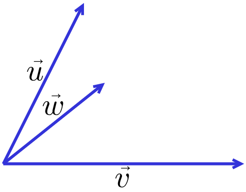
# Coplanaridade de vetores e coplanaridade de pontos

- 3 vetores podem não ser coplanares;
- $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$;
- 3 pontos sempre são coplanares;
- $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$.



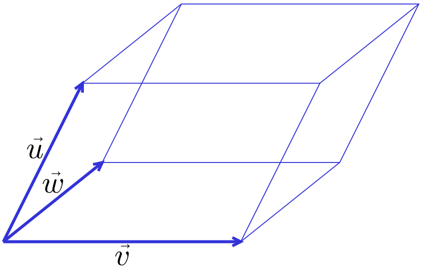
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;



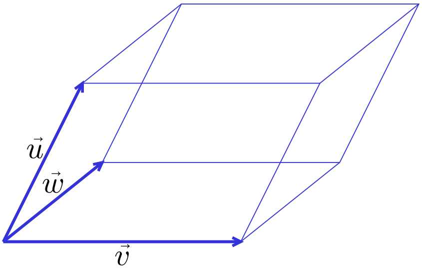
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;



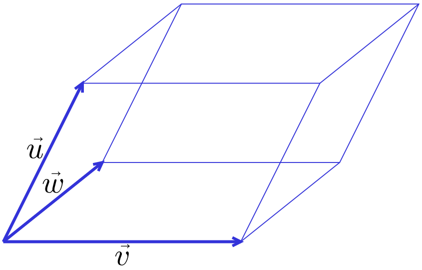
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V =$



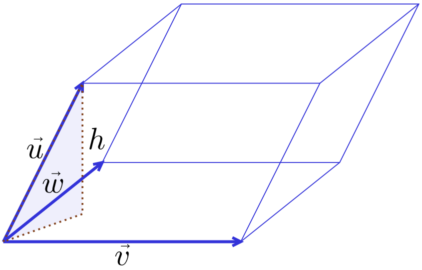
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h$



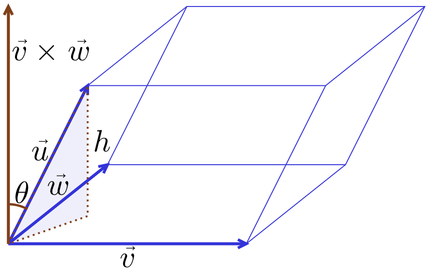
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h$



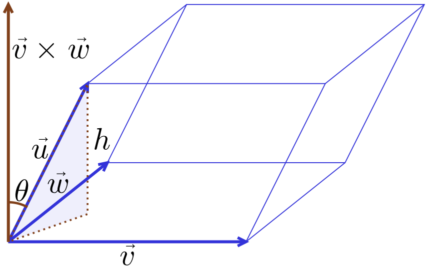
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta|$



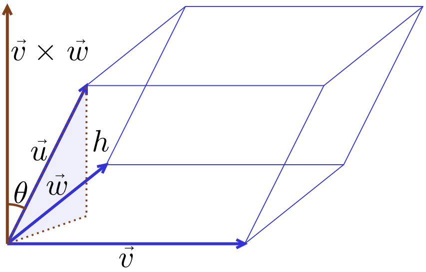
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$;



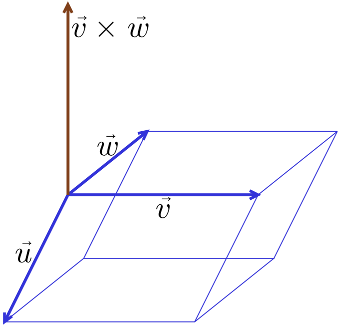
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$;
- Não há perda de generalidade em considerar $\theta \in [0, \pi/2)$.



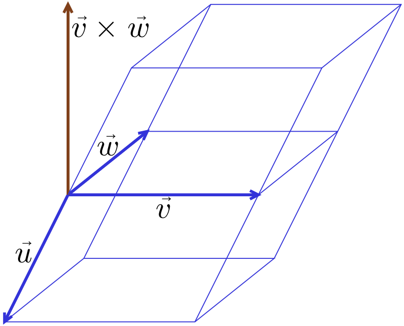
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$;
- Não há perda de generalidade em considerar $\theta \in [0, \pi/2)$.



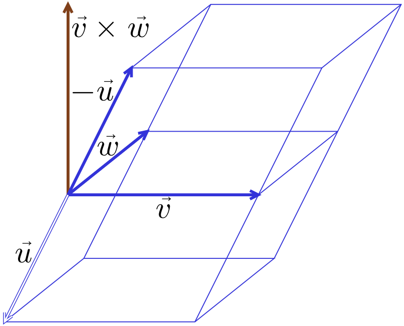
# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$;
- Não há perda de generalidade em considerar $\theta \in [0, \pi/2)$.



# Outra propriedade geométrica: volume do paralelepípedo

- Considere vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não coplanares;
- E o paralelepípedo determinado por eles;
- $V = S_B \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot h = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$;
- Não há perda de generalidade em considerar $\theta \in [0, \pi/2)$.



# Volume do tetraedro

- $V = \frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.