Quádricas - Exercícios

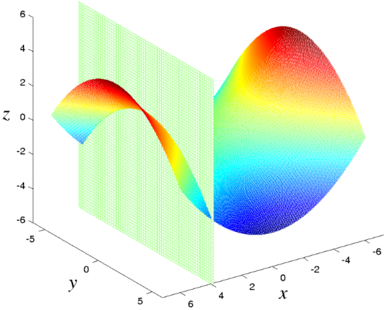
Ademir Alves Ribeiro

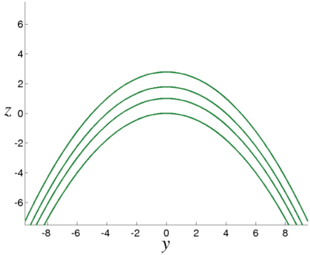
2021

https://youtu.be/z69tARiaiXE

1. Parabolóide hiperbólico - Sela

Considere $a, b > 0$, a sela de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ e as interseções com planos da forma $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$, ilustrados abaixo. Determine o vértice e o foco da parábola no plano yz, em termos de a, b e k.

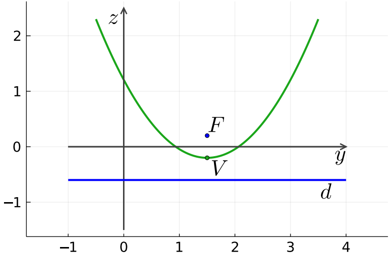




$$\begin{cases} z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = k \end{cases} \quad : \quad \text{parábolas côncavas } \forall k \in \mathbb{R}.$$

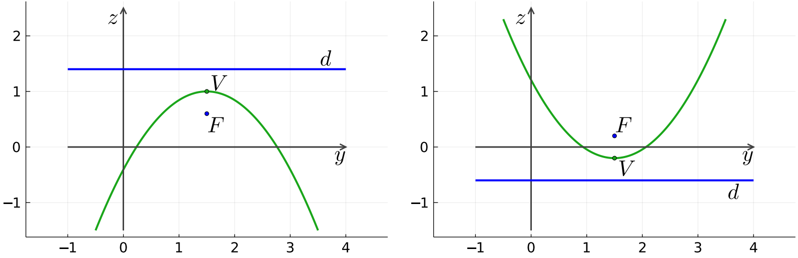
Lembrando a equação da parábola transladada

- No plano yz abaixo, a parábola de equação $(y - y_0)^2 = 2p(z - z_0)$;



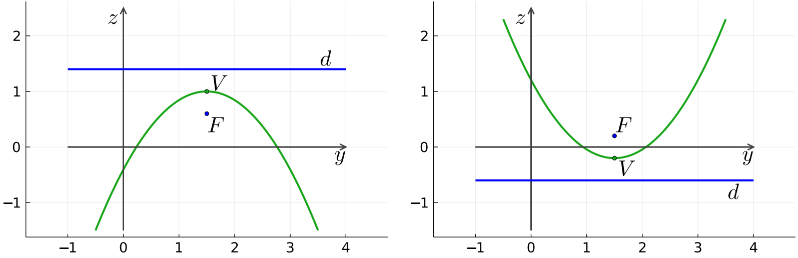
Lembrando a equação da parábola transladada

- No plano yz abaixo, a parábola de equação $(y - y_0)^2 = 2p(z - z_0)$;
- A figura da esquerda para $p < 0$ e a da direita para $p > 0$;



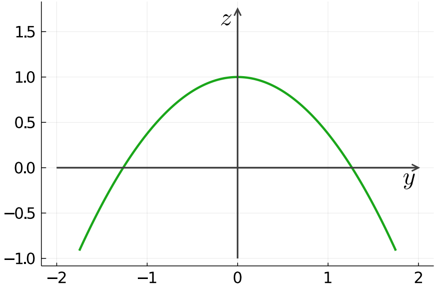
Lembrando a equação da parábola transladada

- No plano yz abaixo, a parábola de equação $(y-y_0)^2 = 2p(z-z_0)$;
- A figura da esquerda para $p<0$ e a da direita para $p>0$;
- Vértice: $V=(y_0,z_0)$;
- Foco: $F=(y_0,z_0+p/2)$;
- Diretriz: $z=z_0-p/2$.



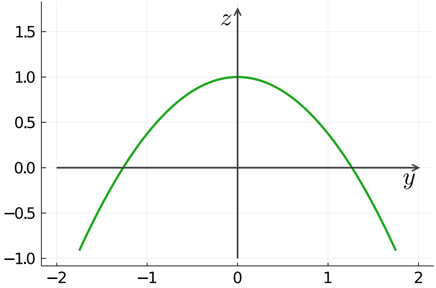
Voltando ao exercício

- $z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



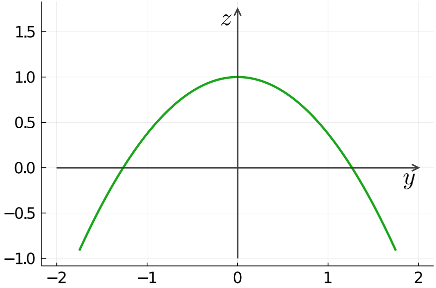
Voltando ao exercício

- $z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow y^2 = -b^2\left(z - \dfrac{k^2}{a^2}\right);$



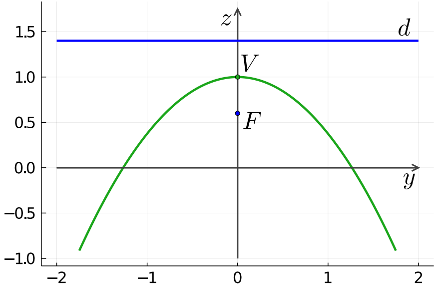
Voltando ao exercício

- $z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow y^2 = -b^2\left(z - \dfrac{k^2}{a^2}\right)$;
- $y_0 = 0\,,\quad z_0 = \dfrac{k^2}{a^2}$ e $p = \dfrac{-b^2}{2}$;



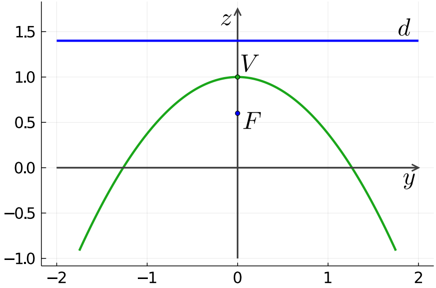
Voltando ao exercício

- $z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow y^2 = -b^2\left(z - \dfrac{k^2}{a^2}\right)$;
- $y_0 = 0\,,\quad z_0 = \dfrac{k^2}{a^2}$ e $p = \dfrac{-b^2}{2}$;
- Vértice: $V = (y_0, z_0) = \left(0, \dfrac{k^2}{a^2}\right)$;

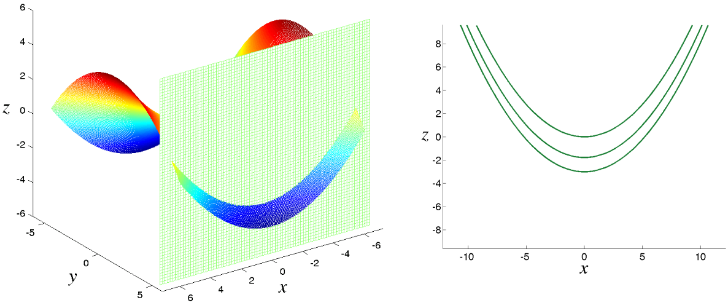


Voltando ao exercício

- $z = \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow y^2 = -b^2\left(z - \dfrac{k^2}{a^2}\right);$
- $y_0 = 0\,,\quad z_0 = \dfrac{k^2}{a^2}$ e $p = \dfrac{-b^2}{2};$
- Vértice: $V = (y_0, z_0) = \left(0, \dfrac{k^2}{a^2}\right);$
- Foco: $F = (y_0, z_0 + p/2) = \left(0, \dfrac{k^2}{a^2} - \dfrac{b^2}{4}\right).$



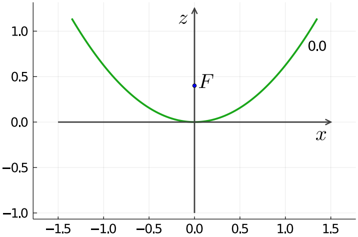
Considere a sela dada por $5x^2 - 4y^2 - 8z = 0$ e as interseções com planos $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, ilustrados abaixo. Determine os valores de k para os quais o foco da parábola no plano xz fica acima do eixo x.



$$\left\{ \begin{array}{l} z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{array} \right. \quad : \quad \text{parábolas convexas } \forall k \in \mathbb{R}.$$

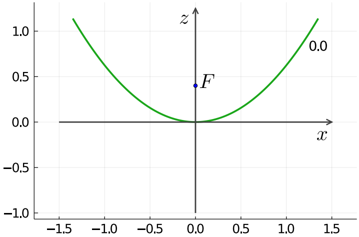
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0$



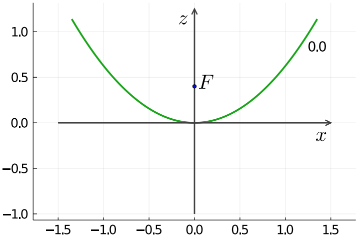
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}\left(z + \frac{k^2}{2}\right)$;



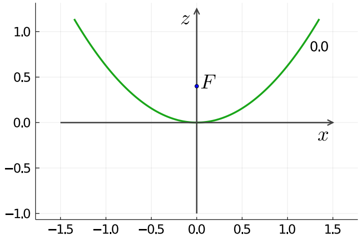
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}\left(z + \frac{k^2}{2}\right)$;
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\frac{k^2}{2}$ e $p = \frac{4}{5}$;



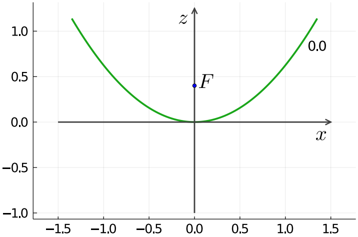
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}\left(z + \dfrac{k^2}{2}\right)$;
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\dfrac{k^2}{2}$ e $p = \dfrac{4}{5}$;
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2)$



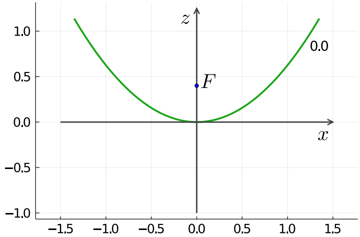
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}\left(z + \dfrac{k^2}{2}\right);$
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\dfrac{k^2}{2}$ e $p = \dfrac{4}{5};$
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2) = \left(0, -\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{2}{5}\right);$



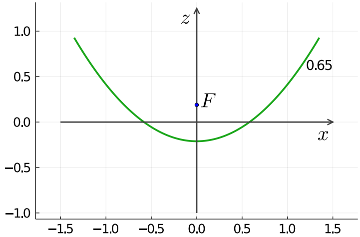
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}\left(z + \dfrac{k^2}{2}\right);$
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\dfrac{k^2}{2}$ e $p = \dfrac{4}{5};$
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2) = \left(0, -\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{2}{5}\right);$
- Acima do eixo x para $-\dfrac{2}{\sqrt{5}} < k < \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



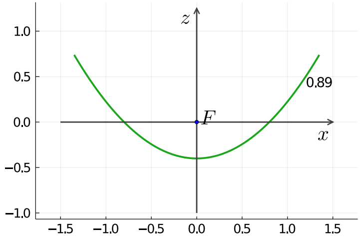
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}\left(z + \frac{k^2}{2}\right)$;
- $x_0 = 0\,,\quad z_0 = -\frac{k^2}{2}$ e $p = \frac{4}{5}$;
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2) = \left(0, -\frac{k^2}{2} + \frac{2}{5}\right)$;
- Acima do eixo x para $-\frac{2}{\sqrt{5}} < k < \frac{2}{\sqrt{5}}$.



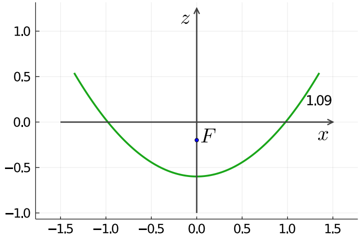
Equação em xz

- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}\left(z + \dfrac{k^2}{2}\right)$;
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\dfrac{k^2}{2}$ e $p = \dfrac{4}{5}$;
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2) = \left(0, -\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{2}{5}\right)$;
- Acima do eixo x para $-\dfrac{2}{\sqrt{5}} < k < \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



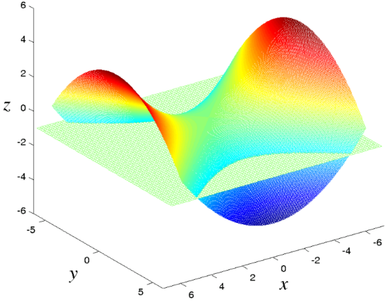
Equação em xz

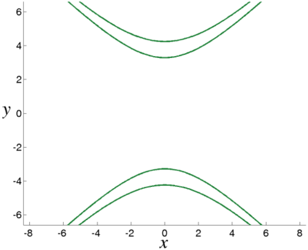
- $5x^2 - 4k^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{8}{5}\left(z + \dfrac{k^2}{2}\right)$;
- $x_0 = 0\,, \quad z_0 = -\dfrac{k^2}{2}$ e $p = \dfrac{4}{5}$;
- Foco: $F = (x_0, z_0 + p/2) = \left(0, -\dfrac{k^2}{2} + \dfrac{2}{5}\right)$;
- Acima do eixo x para $-\dfrac{2}{\sqrt{5}} < k < \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.



3. Parabolóide hiperbólico - Sela

Considere a sela de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ e as interseções com planos da forma $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, ilustrados abaixo. Mostre que todas as hipérboles tem as mesmas assíntotas, qualquer que seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

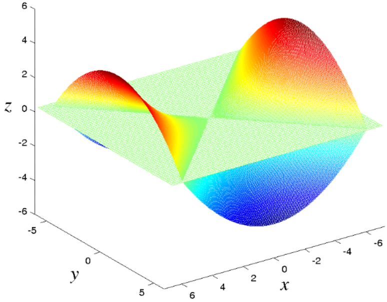


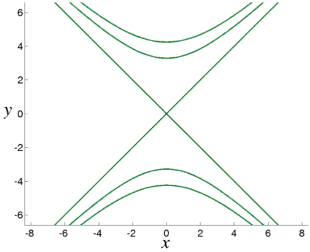


$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k \\ z = k \end{cases}$$: hipérboles na vertical $\forall k < 0$.

3. Parabolóide hiperbólico - Sela

Considere a sela de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ e as interseções com planos da forma $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, ilustrados abaixo. Mostre que todas as hipérboles tem as mesmas assíntotas, qualquer que seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

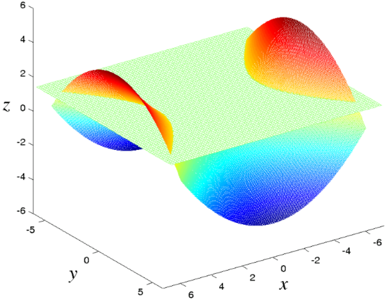


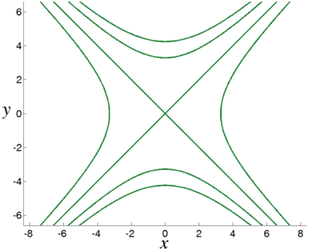


$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad : \quad \text{duas retas concorrentes } (k = 0).$$

3. Parabolóide hiperbólico - Sela

Considere a sela de equação $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ e as interseções com planos da forma $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, ilustrados abaixo. Mostre que todas as hipérboles tem as mesmas assíntotas, qualquer que seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

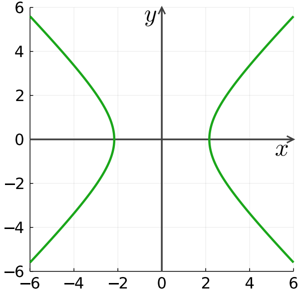




$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases} \quad : \quad \text{hipérboles na horizontal } \forall k > 0.$$

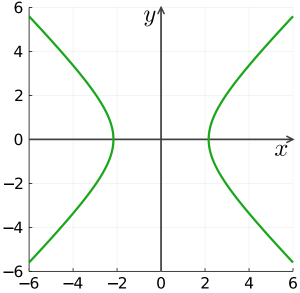
Equação em xy (considerando $k > 0$)

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k$



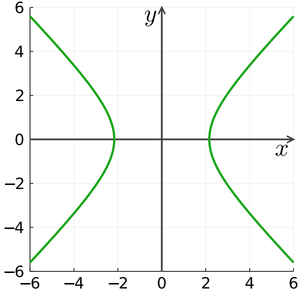
Equação em xy (considerando $k > 0$)

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{k}a)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}b)^2} = 1;$



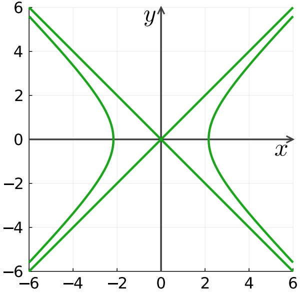
Equação em xy (considerando $k > 0$)

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{k}a)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}b)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm\dfrac{\sqrt{k}b}{\sqrt{k}a}x$



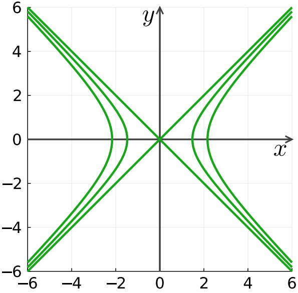
Equação em xy (considerando $k > 0$)

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{k}a)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}b)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm\dfrac{\sqrt{k}b}{\sqrt{k}a}x = \pm\dfrac{b}{a}x.$



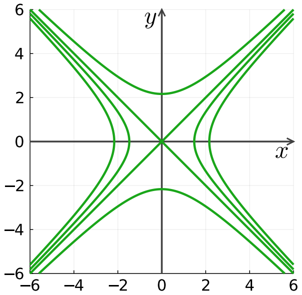
Equação em xy (considerando $k > 0$)

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{k}a)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{k}b)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm\dfrac{\sqrt{k}b}{\sqrt{k}a}x = \pm\dfrac{b}{a}x.$



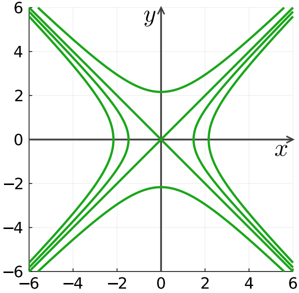
Equação em xy (considerando $k < 0$)

- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k$



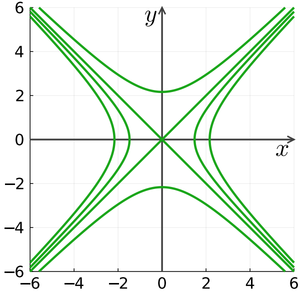
Equação em xy (considerando $k < 0$)

- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{(\sqrt{|k|}b)^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{|k|}a)^2} = 1;$



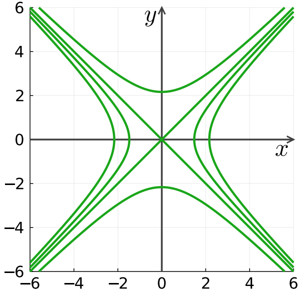
Equação em xy (considerando $k < 0$)

- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{(\sqrt{|k|}b)^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{|k|}a)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm \dfrac{\sqrt{|k|}b}{\sqrt{|k|}a} x$



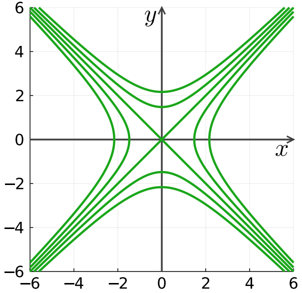
Equação em xy (considerando $k < 0$)

- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{(\sqrt{|k|}b)^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{|k|}a)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm\dfrac{\sqrt{|k|}b}{\sqrt{|k|}a}x = \pm\dfrac{b}{a}x.$



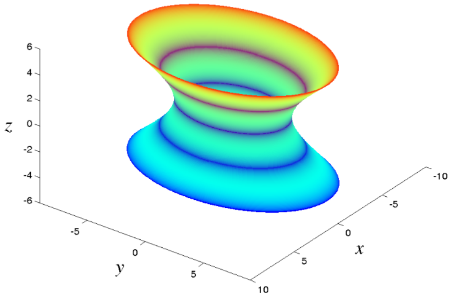
Equação em xy (considerando $k < 0$)

- $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -k \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{(\sqrt{|k|}b)^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{|k|}a)^2} = 1;$
- Assíntotas: $y = \pm \dfrac{\sqrt{|k|}b}{\sqrt{|k|}a} x = \pm \dfrac{b}{a} x.$



4. Hiperbolóide de uma folha (desafio)

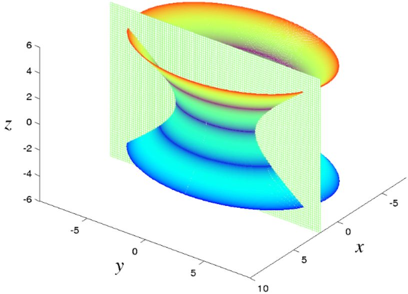
Seja H o hiperbolóide de uma folha dado por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Por qualquer ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$ passam duas retas inteiramente contidas em H.

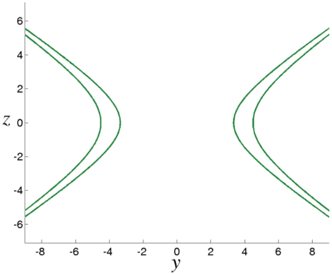


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. Hiperbolóide de uma folha (desafio)

Seja H o hiperbolóide de uma folha dado por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Por qualquer ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$ passam duas retas inteiramente contidas em H.

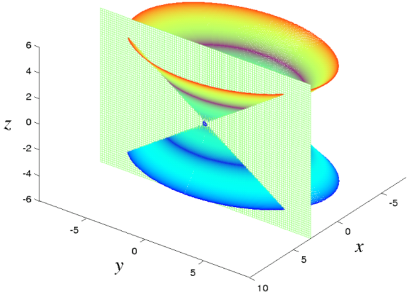


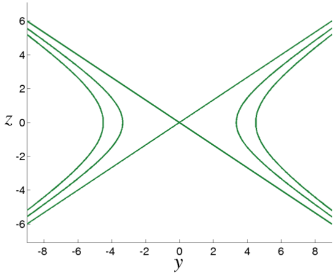


$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$: hipérboles $(-a < k < a)$.

4. Hiperbolóide de uma folha (desafio)

Seja H o hiperbolóide de uma folha dado por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Por qualquer ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$ passam duas retas inteiramente contidas em H.





$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = k \end{cases}$$: duas retas concorrentes $(k = -a$ ou $k = a)$.

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$,

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $\quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*)\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*)\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*)\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma = \sqrt{1 + z_0^2} - z_0\gamma$

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $\quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $\; C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*)\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0\cos(t) + y_0\sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma = \sqrt{1 + z_0^2} - z_0\gamma > 0$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 &= 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma &= 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma = \sqrt{1 + z_0^2} - z_0\gamma > 0$;
- Também temos $\varphi(t_0 - \pi/2) = \varphi(t_0 + \pi/2) = -z_0\gamma \leq 0$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $\quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $\; C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma = \sqrt{1 + z_0^2} - z_0\gamma > 0$;
- Também temos $\varphi(t_0 - \pi/2) = \varphi(t_0 + \pi/2) = -z_0\gamma \leq 0$;
- $\therefore \exists\, \bar{t}, \hat{t} \in \mathbb{R}$, $t_0 - \pi/2 \leq \bar{t} < t_0 < \hat{t} \leq t_0 + \pi/2$, tais que $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t}) = 0$;

Procurando as direções das retas

- Existe $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 + \lambda v \in H$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$?
- $(x_0 + \lambda\alpha)^2 + (y_0 + \lambda\beta)^2 - (z_0 + \lambda\gamma)^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$;
- $A = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$, $\quad B = 2(x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma)$ e $\; C = x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$;
- Como o tamanho de v não importa, vamos olhar para o sistema
$$(*) \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & = & 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 & = & 0 \\ x_0\alpha + y_0\beta - z_0\gamma & = & 0 \end{cases}$$
- Tome $\gamma = 1$, se $z_0 \geq 0$ ou $\gamma = -1$, se $z_0 < 0$;
- Defina $\varphi(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) - z_0\gamma$;
- Definindo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, temos $x_0/r = \cos(t_0)$ e $y_0/r = \sin(t_0)$;
- Logo, $\varphi(t_0) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - z_0\gamma = \sqrt{1 + z_0^2} - z_0\gamma > 0$;
- Também temos $\varphi(t_0 - \pi/2) = \varphi(t_0 + \pi/2) = -z_0\gamma \leq 0$;
- $\therefore \exists\, \bar{t}, \hat{t} \in \mathbb{R}$, $t_0 - \pi/2 \leq \bar{t} < t_0 < \hat{t} \leq t_0 + \pi/2$, tais que $\varphi(\bar{t}) = \varphi(\hat{t}) = 0$;
- $\therefore \bar{v} = \big(\cos(\bar{t}), \sin(\bar{t}), \gamma\big)$ e $\hat{v} = \big(\cos(\hat{t}), \sin(\hat{t}), \gamma\big)$ resolvem $(*)$.

As retas contidas no hiperbolóide