

Vetores - Parte 2: O plano \mathbb{R}^2

Ademir Alves Ribeiro

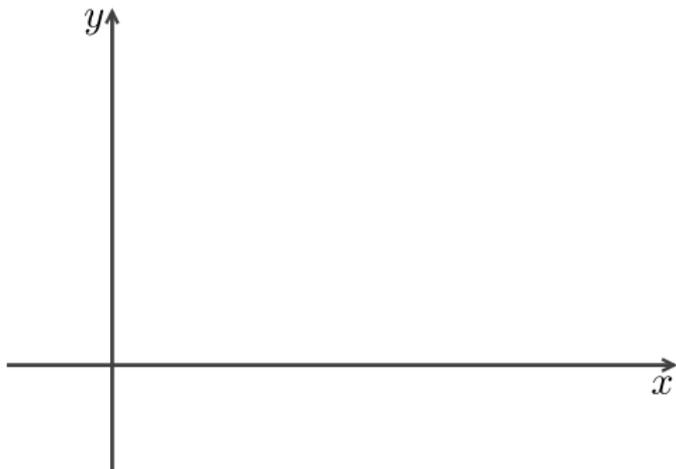
2021

<https://youtu.be/RNvgWZFAeI8>



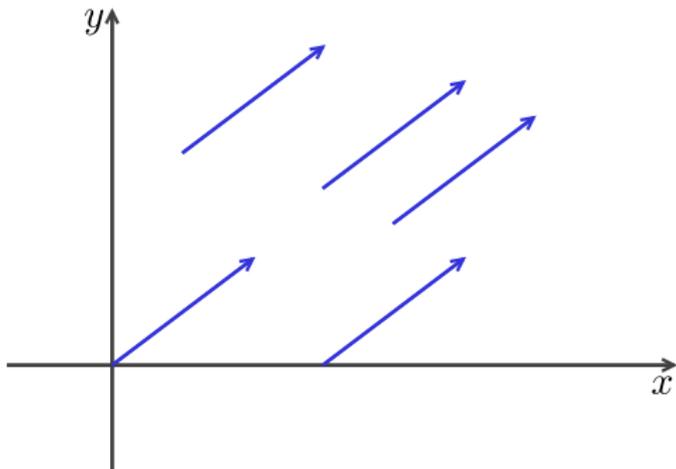
O espaço vetorial \mathbb{R}^2

- Considere o sistema cartesiano no plano



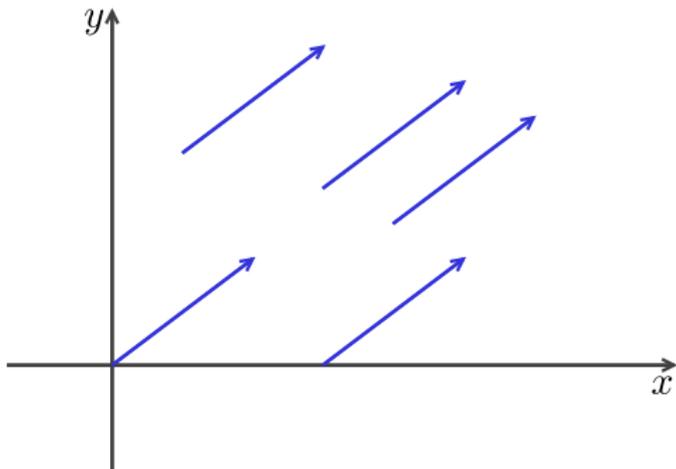
O espaço vetorial \mathbb{R}^2

- Considere o sistema cartesiano no plano e um vetor neste plano (representado por alguns segmentos orientados).



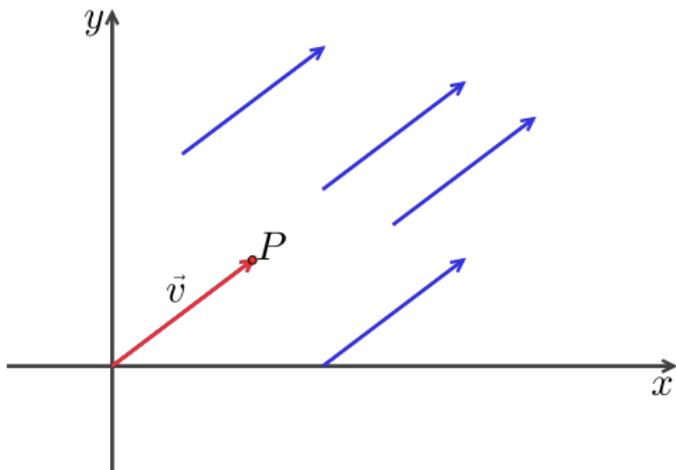
O espaço vetorial \mathbb{R}^2

- Considere o sistema cartesiano no plano e um vetor neste plano (representado por alguns segmentos orientados).
- Como podemos representar algebricamente este vetor?



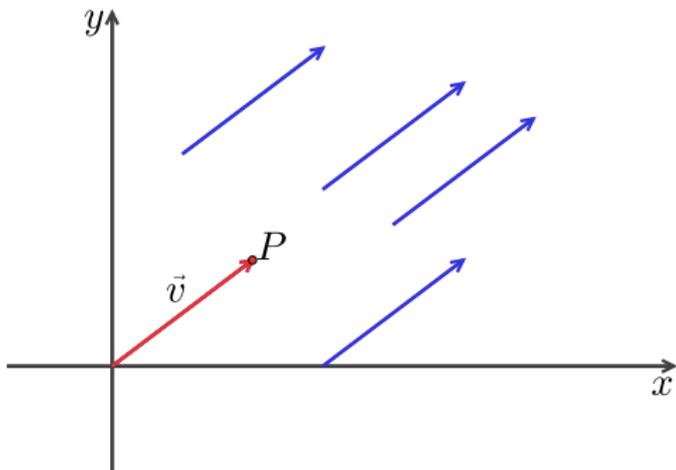
O espaço vetorial \mathbb{R}^2

- Considere o sistema cartesiano no plano e um vetor neste plano (representado por alguns segmentos orientados).
- Como podemos representar algebricamente este vetor?
- Escolhendo o representante que parte da origem.

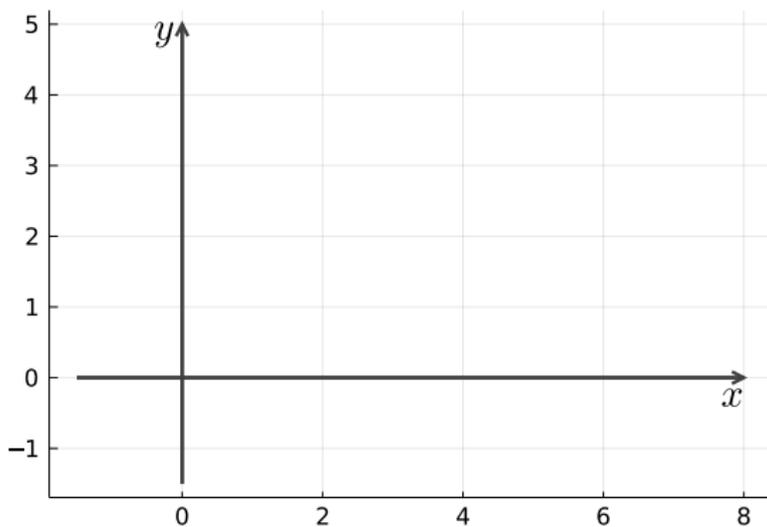


O espaço vetorial \mathbb{R}^2

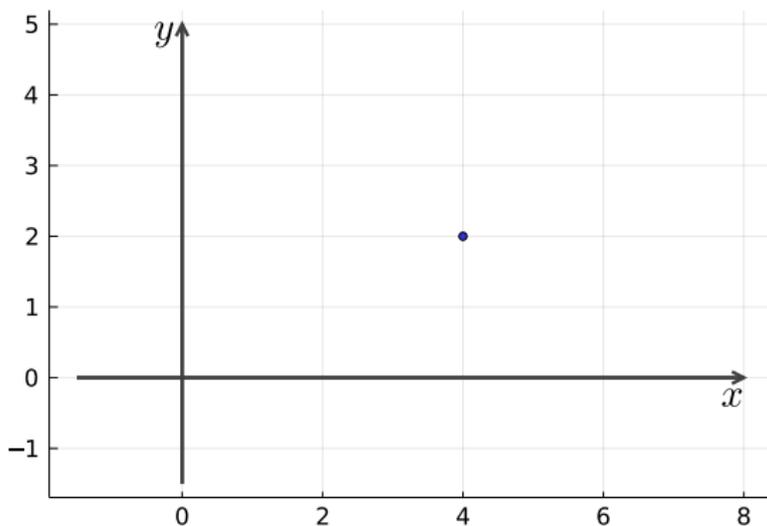
- Considere o sistema cartesiano no plano e um vetor neste plano (representado por alguns segmentos orientados).
- Como podemos representar algebricamente este vetor?
- Escolhendo o representante que parte da origem.
- Se $P = (x, y)$, representaremos $\vec{v} = (x, y)$.



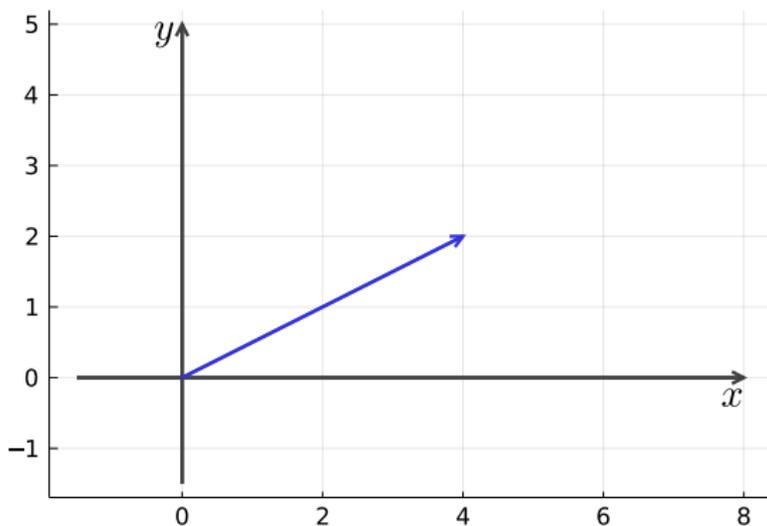
- Note que agora usaremos pares ordenados



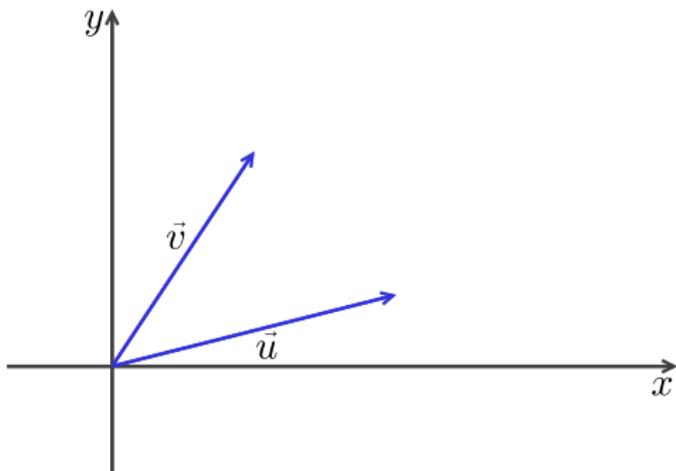
- Note que agora usaremos pares ordenados tanto para representar pontos, por exemplo $P = (4, 2)$



- Note que agora usaremos pares ordenados tanto para representar pontos, por exemplo $P = (4, 2)$ quanto vetores, $\vec{v} = (4, 2)$.

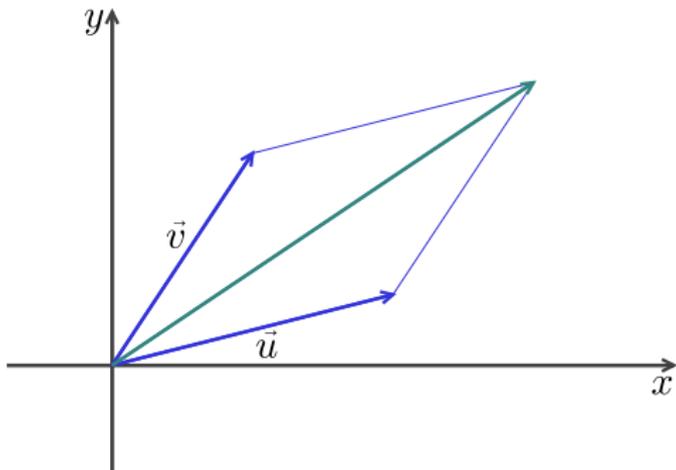


- Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$



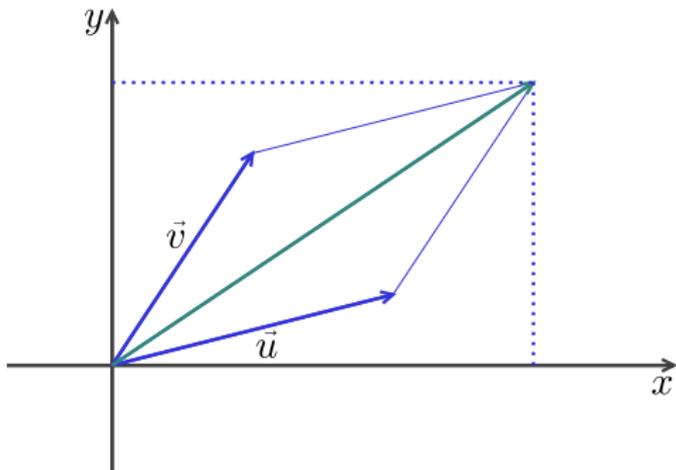
Soma de vetores

- Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$
- Como obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$?



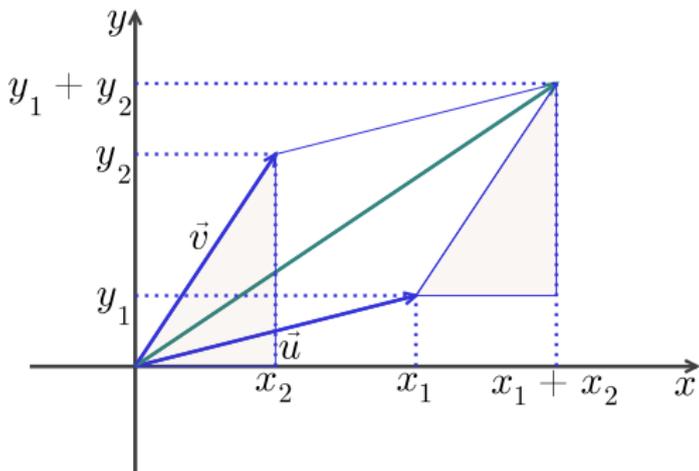
Soma de vetores

- Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$
- Como obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$?



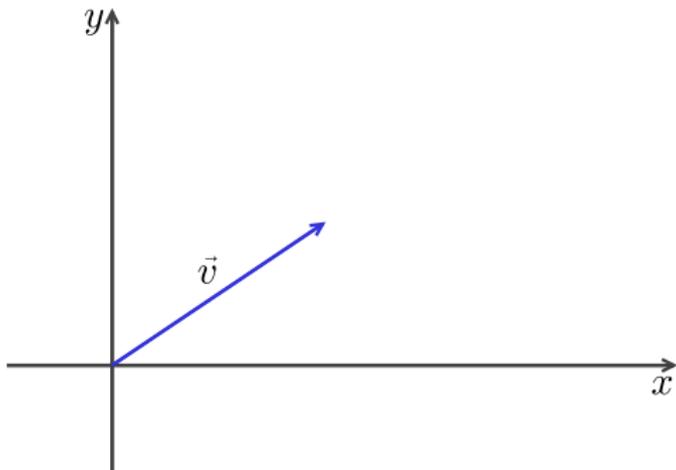
Soma de vetores

- Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$
- Como obter a soma $\vec{u} + \vec{v}$?
- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.



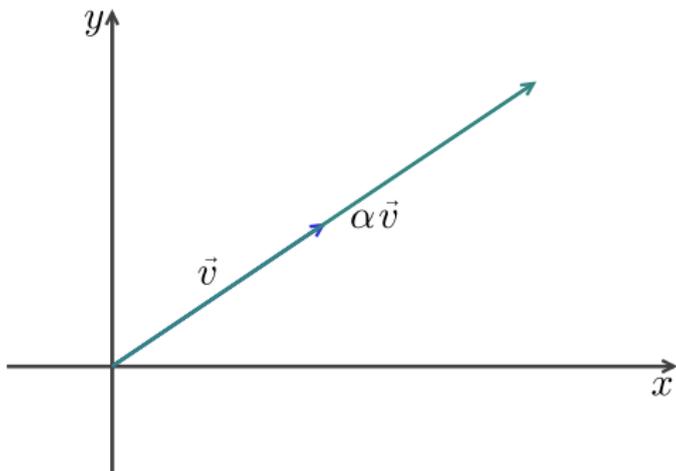
Multiplicação de escalar por vetor

- Dados $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$



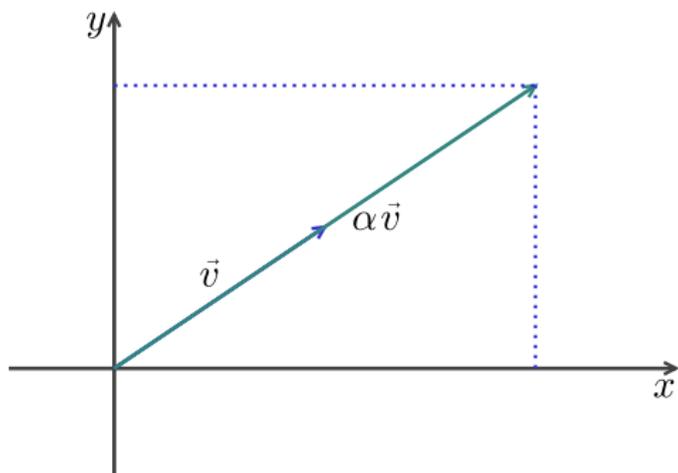
Multiplicação de escalar por vetor

- Dados $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
- Como obter o produto $\alpha\vec{v}$?



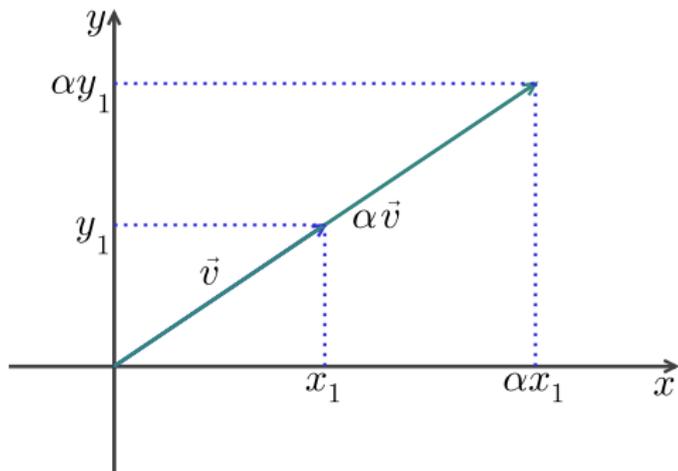
Multiplicação de escalar por vetor

- Dados $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
- Como obter o produto $\alpha\vec{v}$?



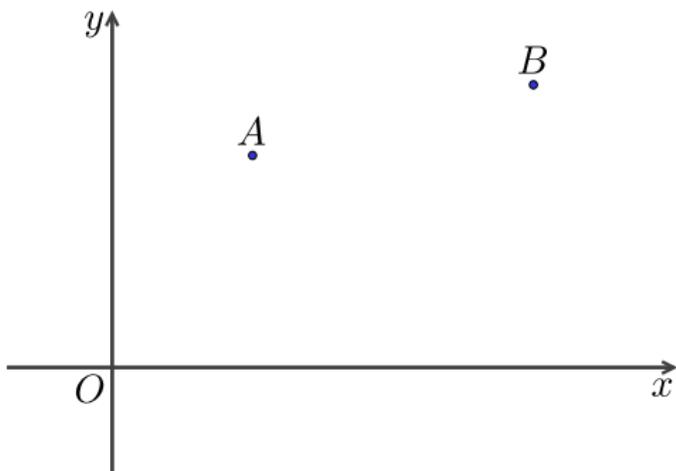
Multiplicação de escalar por vetor

- Dados $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
- Como obter o produto $\alpha\vec{v}$?
- $\alpha\vec{v} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.



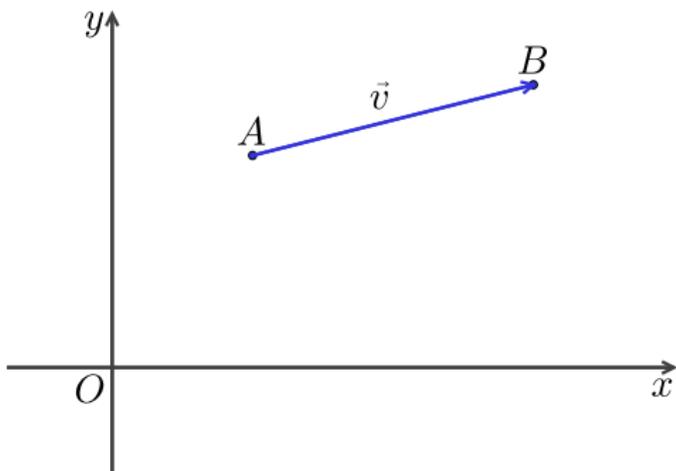
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$



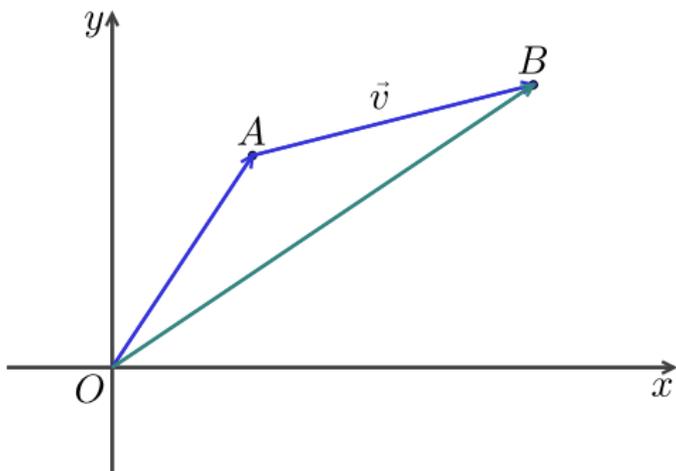
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?



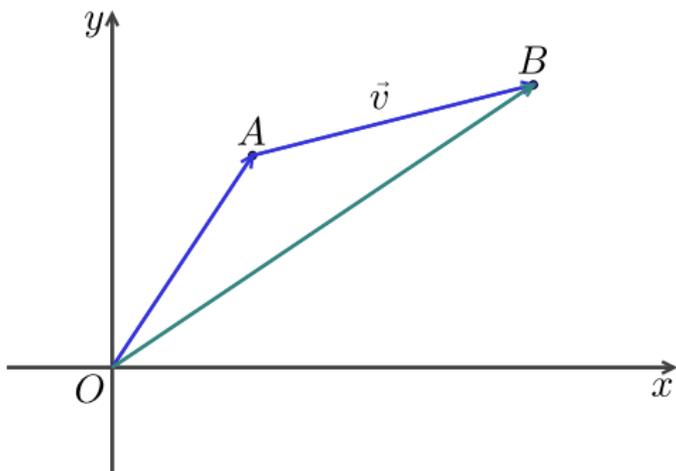
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;



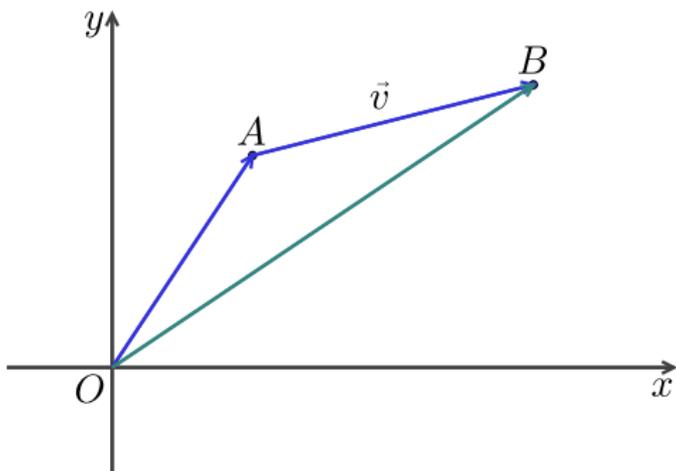
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



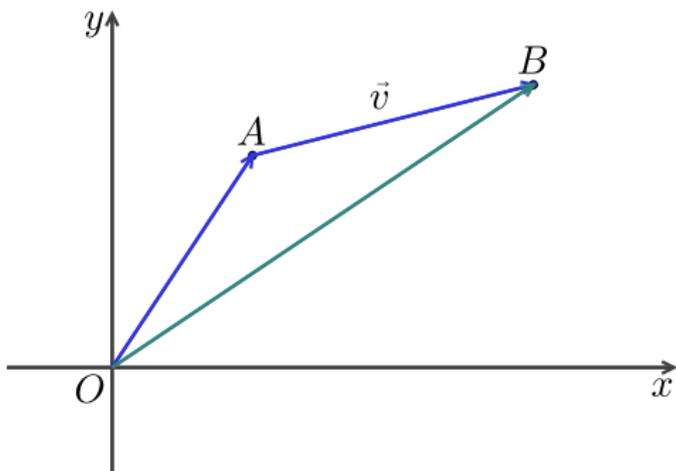
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$



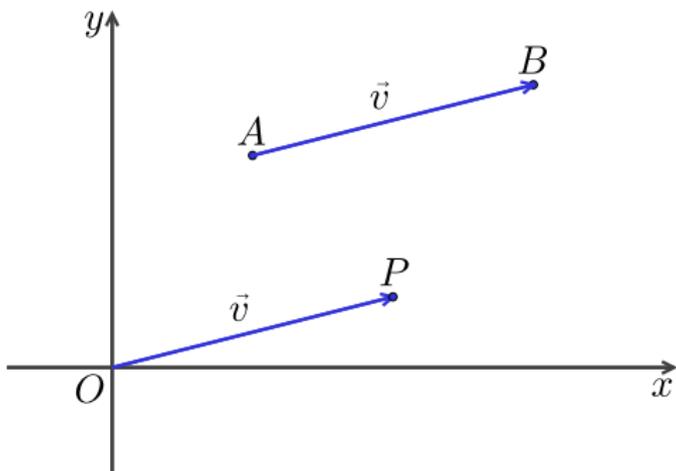
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;



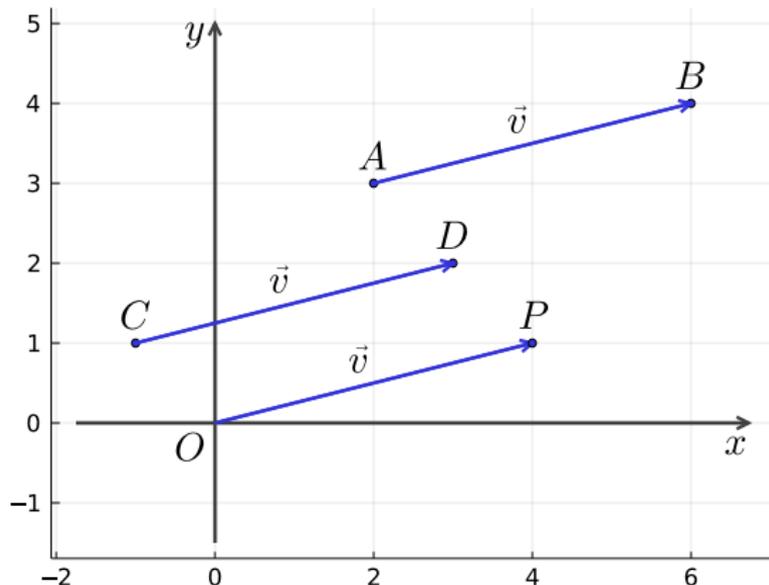
Vetor definido por dois pontos

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$?
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$;
- Temos $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



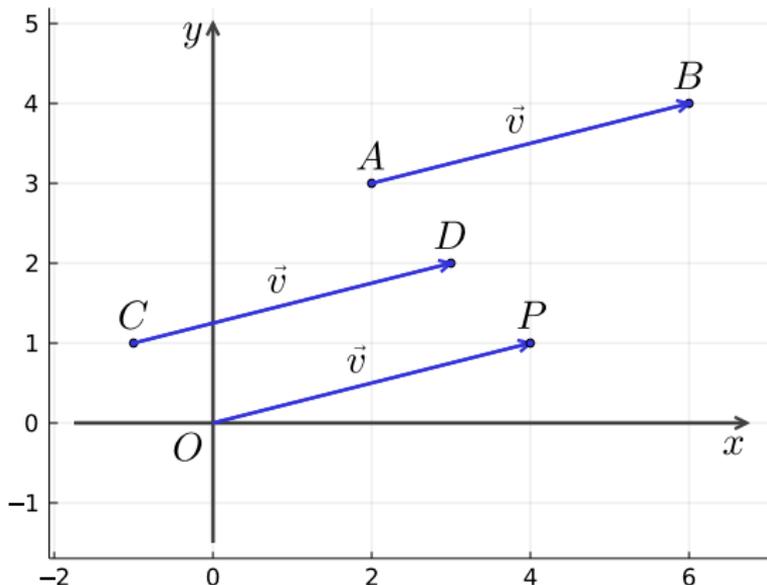
Exemplo

- $A = (2,3)$, $B = (6,4)$, $C = (-1,1)$, $D = (3,2)$, $P = (4,1)$;



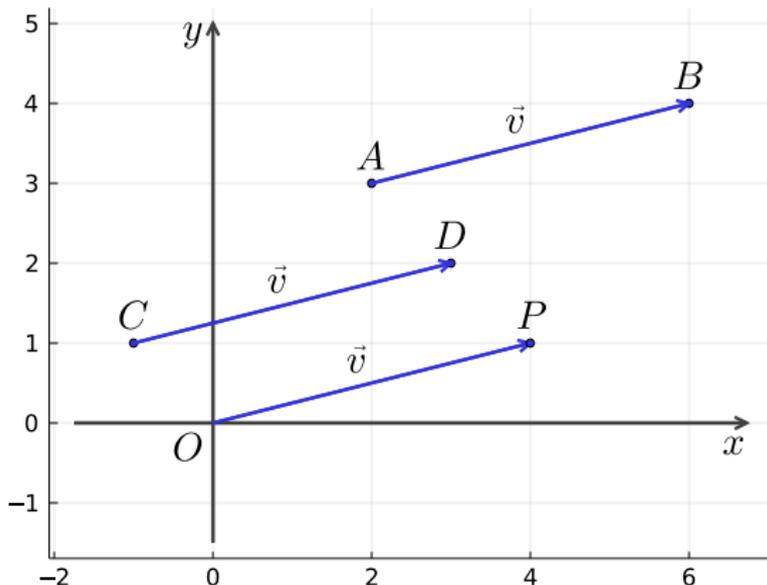
Exemplo

- $A = (2,3), B = (6,4), C = (-1,1), D = (3,2), P = (4,1)$;
- Temos $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = B - A = D - C = (4,1)$;



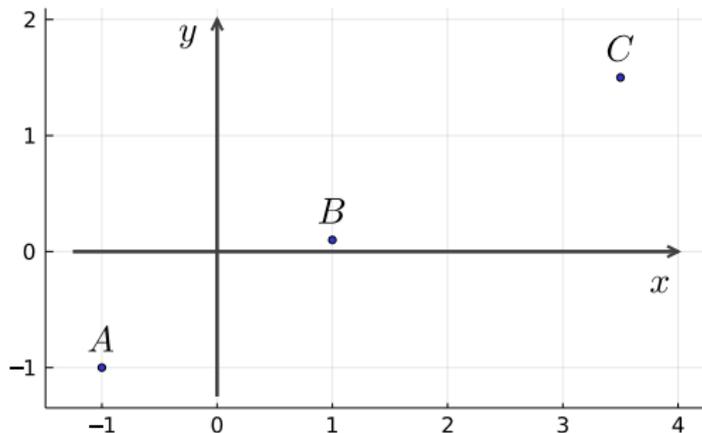
Exemplo

- $A = (2, 3)$, $B = (6, 4)$, $C = (-1, 1)$, $D = (3, 2)$, $P = (4, 1)$;
- Temos $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = B - A = D - C = (4, 1)$;
- Note também que $B = A + \vec{v}$ e $D = C + \vec{v}$.



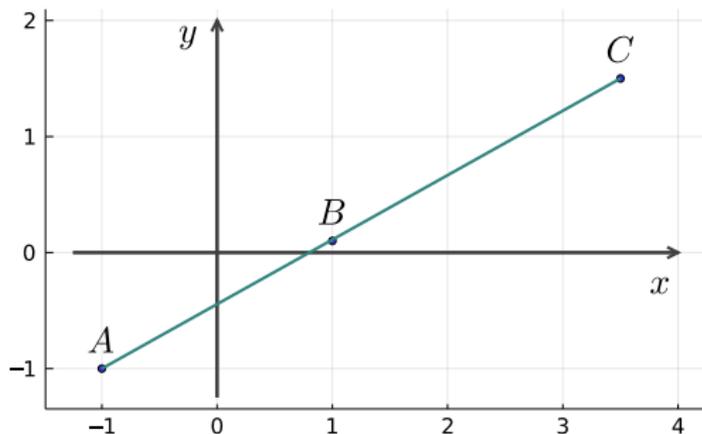
Exercício 1

Verifique se os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, 1/10)$ e $C = (7/2, 3/2)$ são colineares.



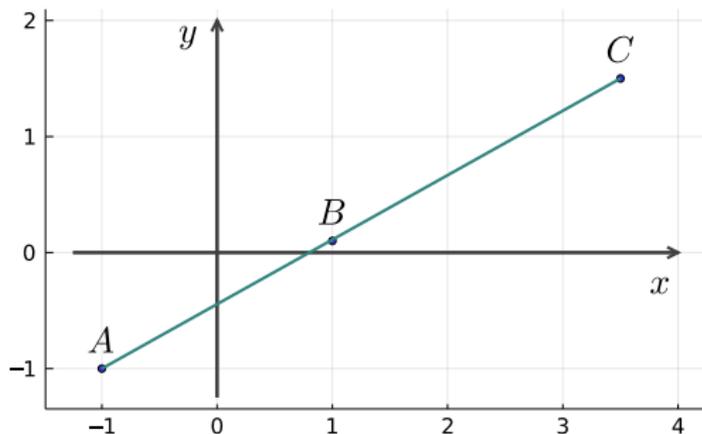
Exercício 1

Verifique se os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, 1/10)$ e $C = (7/2, 3/2)$ são colineares.



Exercício 1

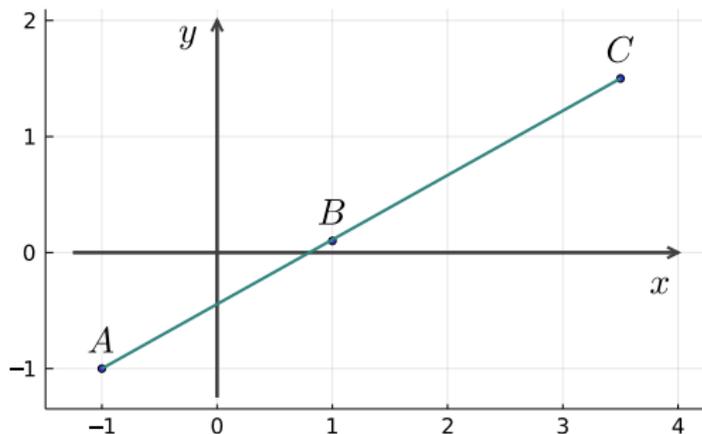
Verifique se os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, 1/10)$ e $C = (7/2, 3/2)$ são colineares.



• $\vec{AB} = B - A = (2, 11/10)$ e $\vec{AC} = C - A = (9/2, 5/2)$;

Exercício 1

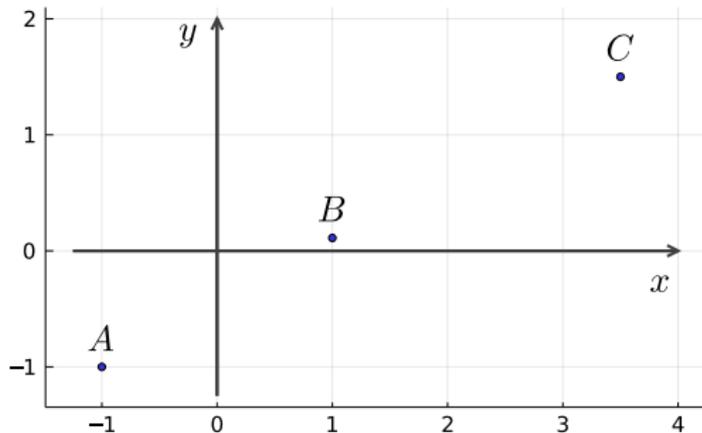
Verifique se os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, 1/10)$ e $C = (7/2, 3/2)$ são colineares.



- $\vec{AB} = B - A = (2, 11/10)$ e $\vec{AC} = C - A = (9/2, 5/2)$;
- Não são paralelos pois $9/4 \neq 25/11$.

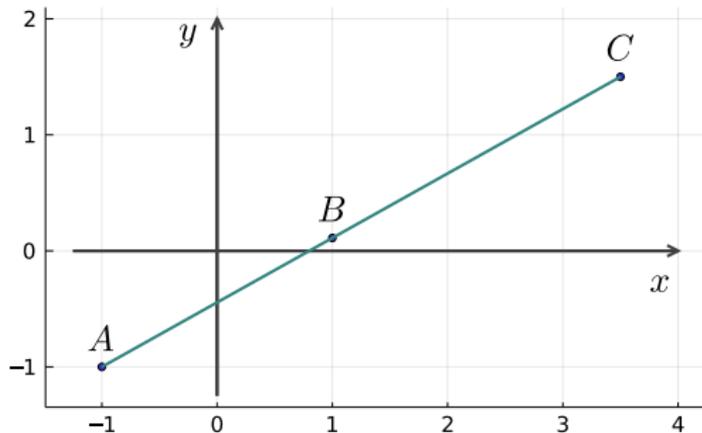
Exercício 2

Calcule o valor de m para que $A = (-1, -1)$, $B = (1, m)$ e $C = (7/2, 3/2)$ sejam colineares.



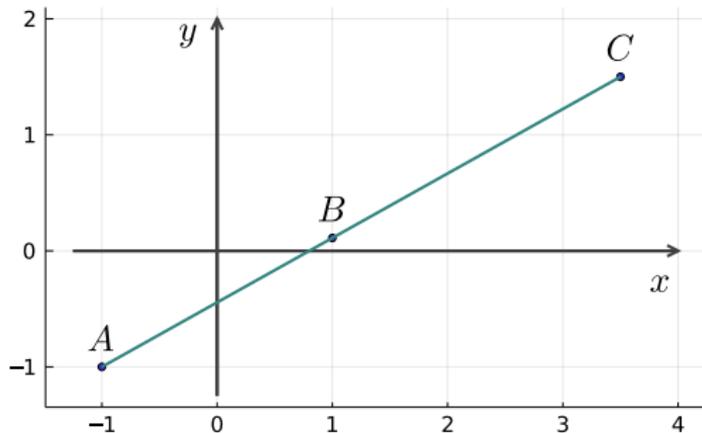
Exercício 2

Calcule o valor de m para que $A = (-1, -1)$, $B = (1, m)$ e $C = (7/2, 3/2)$ sejam colineares.



Exercício 2

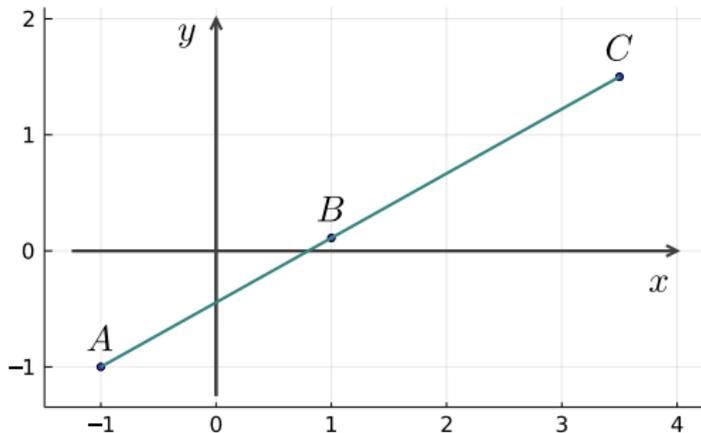
Calcule o valor de m para que $A = (-1, -1)$, $B = (1, m)$ e $C = (7/2, 3/2)$ sejam colineares.



- $\vec{AB} = (2, m+1)$ e $\vec{AC} = (9/2, 5/2)$;

Exercício 2

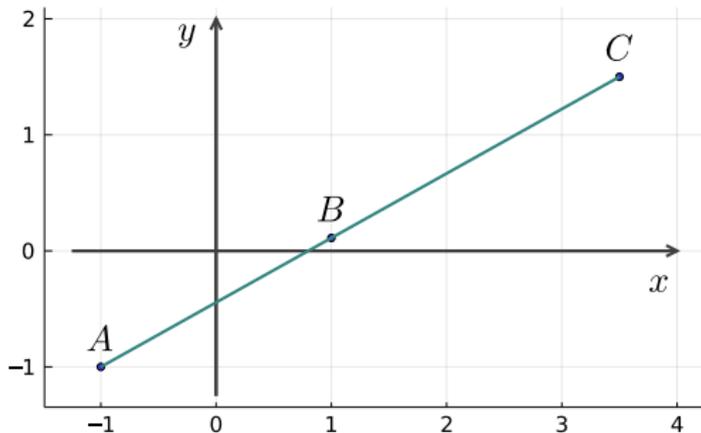
Calcule o valor de m para que $A = (-1, -1)$, $B = (1, m)$ e $C = (7/2, 3/2)$ sejam colineares.



- $\vec{AB} = (2, m+1)$ e $\vec{AC} = (9/2, 5/2)$;
- $\vec{AB} // \vec{AC} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{5}{2(m+1)}$

Exercício 2

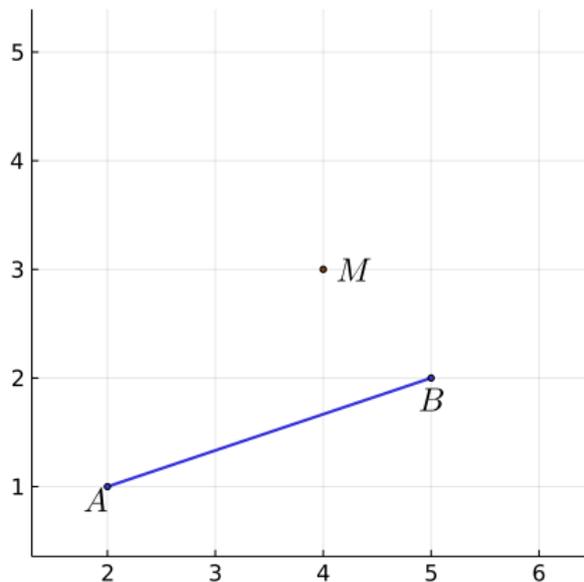
Calcule o valor de m para que $A = (-1, -1)$, $B = (1, m)$ e $C = (7/2, 3/2)$ sejam colineares.



- $\vec{AB} = (2, m+1)$ e $\vec{AC} = (9/2, 5/2)$;
- $\vec{AB} // \vec{AC} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{5}{2(m+1)} \Leftrightarrow m = \frac{1}{9}$.

Exercício 3

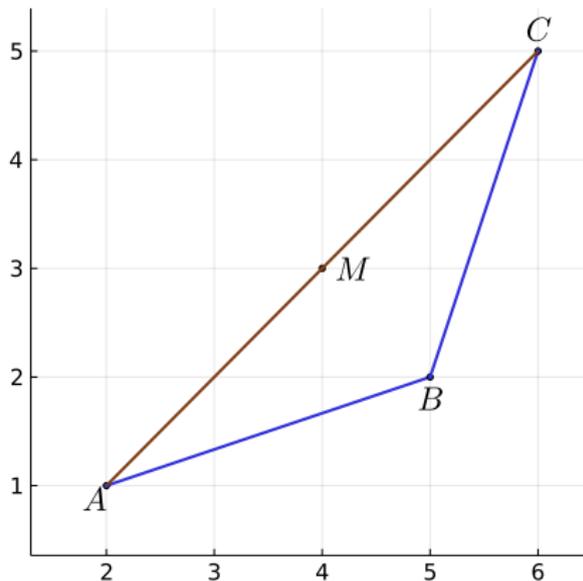
Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

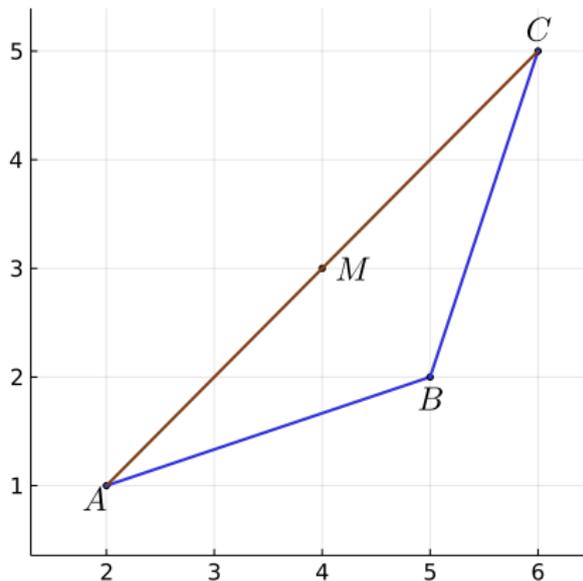
- $C = M + \overrightarrow{MC}$



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

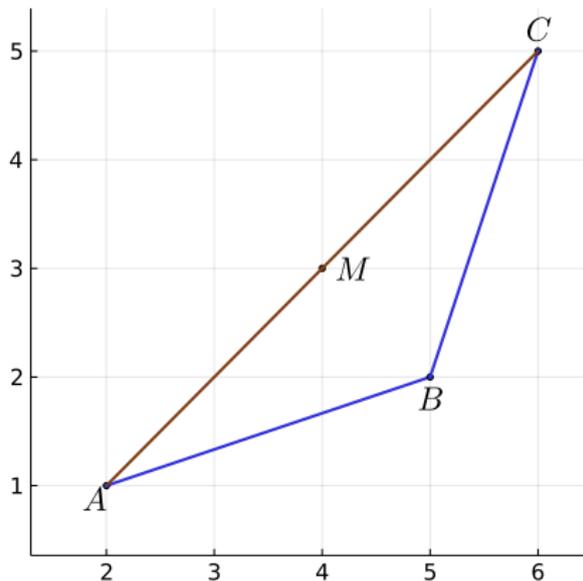
- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM};$



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

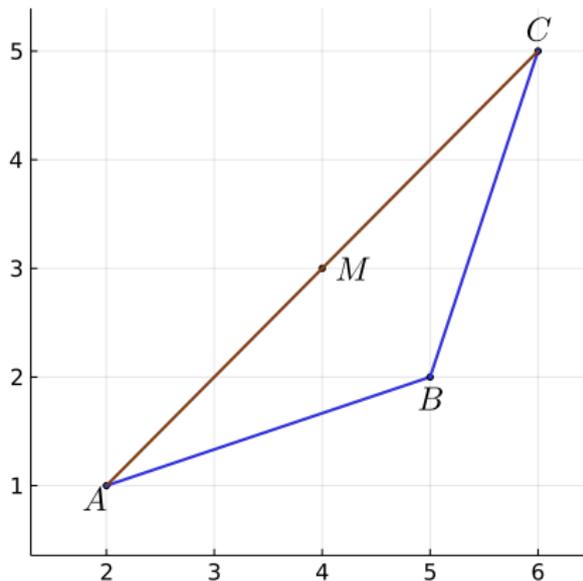
- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$;
- $\overrightarrow{AM} = (2, 2)$;



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

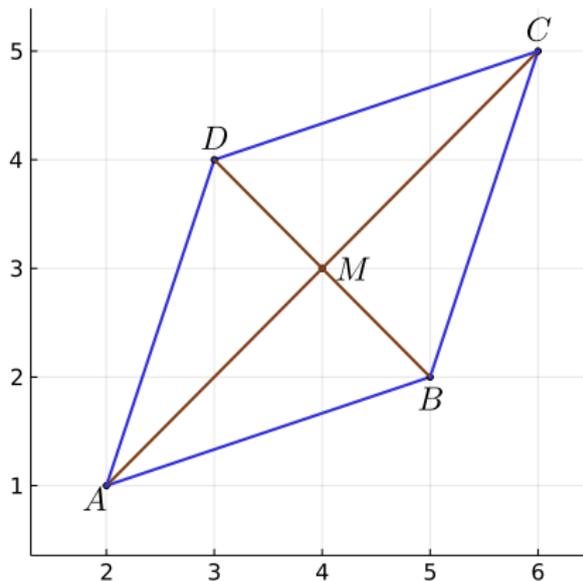
- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$;
- $\overrightarrow{AM} = (2, 2)$;
- $C = (6, 5)$;



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

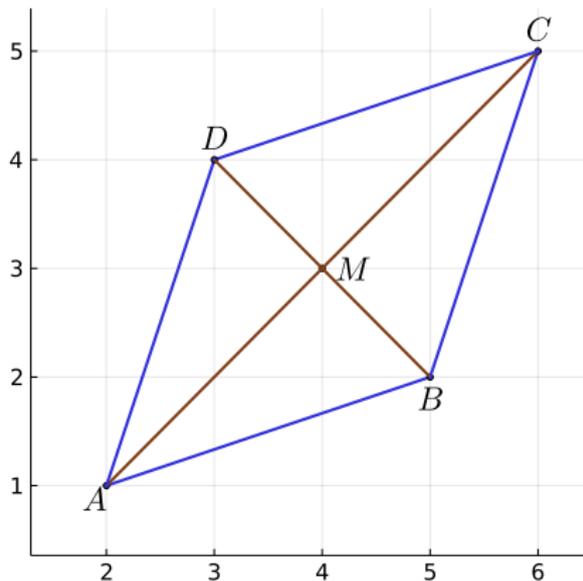
- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$;
- $\overrightarrow{AM} = (2, 2)$;
- $C = (6, 5)$;
- $D = M + \overrightarrow{MD} = M + \overrightarrow{BM}$;



Exercício 3

Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

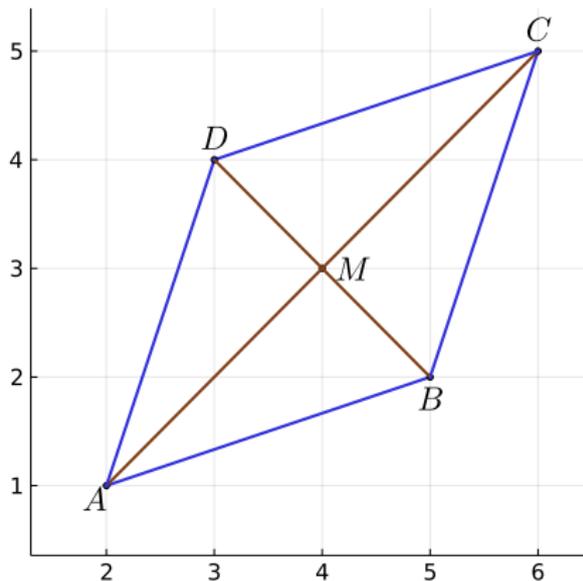
- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$;
- $\overrightarrow{AM} = (2, 2)$;
- $C = (6, 5)$;
- $D = M + \overrightarrow{MD} = M + \overrightarrow{BM}$;
- $\overrightarrow{BM} = (-1, 1)$;



Exercício 3

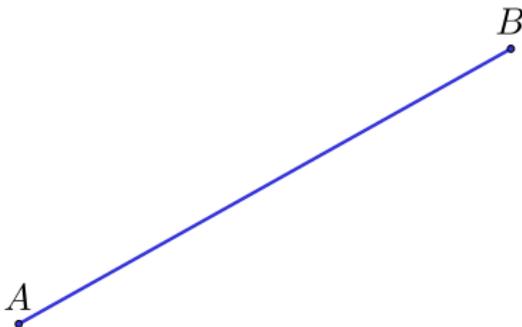
Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (5, 2)$ vértices de um paralelogramo e $M = (4, 3)$ o ponto de interseção das diagonais. Determine os outros dois vértices.

- $C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM}$;
- $\overrightarrow{AM} = (2, 2)$;
- $C = (6, 5)$;
- $D = M + \overrightarrow{MD} = M + \overrightarrow{BM}$;
- $\overrightarrow{BM} = (-1, 1)$;
- $D = (3, 4)$.



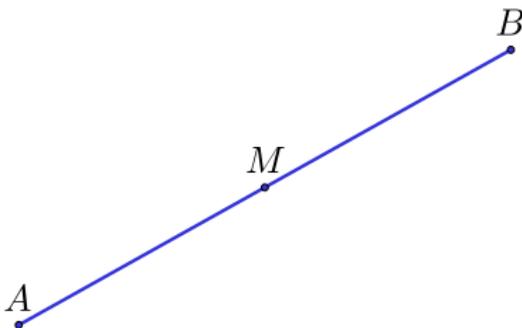
O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$



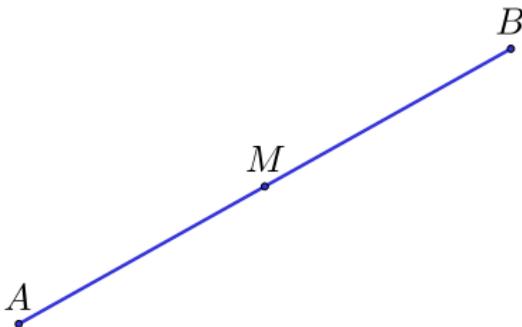
O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas do ponto médio do segmento AB ?



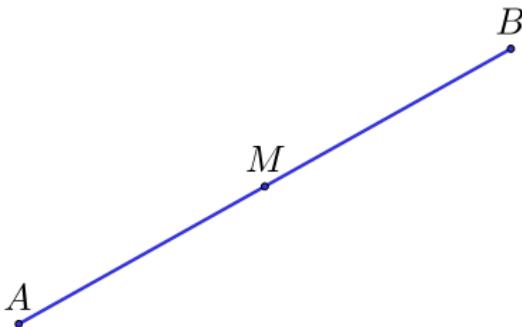
O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas do ponto médio do segmento AB ?
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;



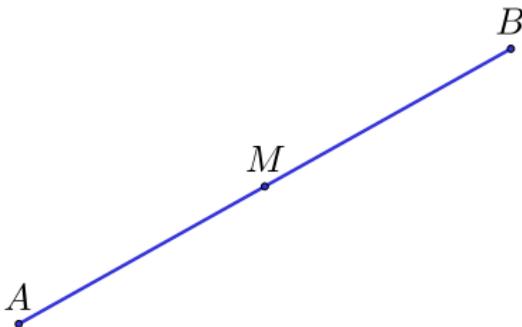
O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas do ponto médio do segmento AB ?
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;
- $M - A = B - M$;



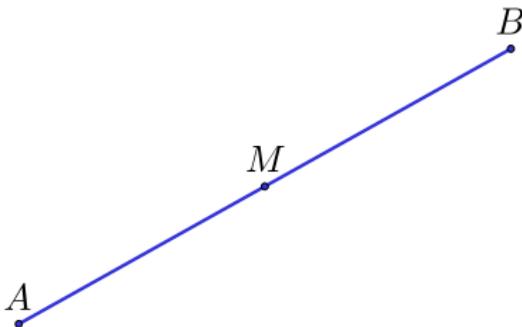
O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas do ponto médio do segmento AB ?
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;
- $M - A = B - M$;
- $M = \frac{A + B}{2}$



O ponto médio de um segmento

- Dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$
- Como obter as coordenadas do ponto médio do segmento AB ?
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$;
- $M - A = B - M$;
- $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$.



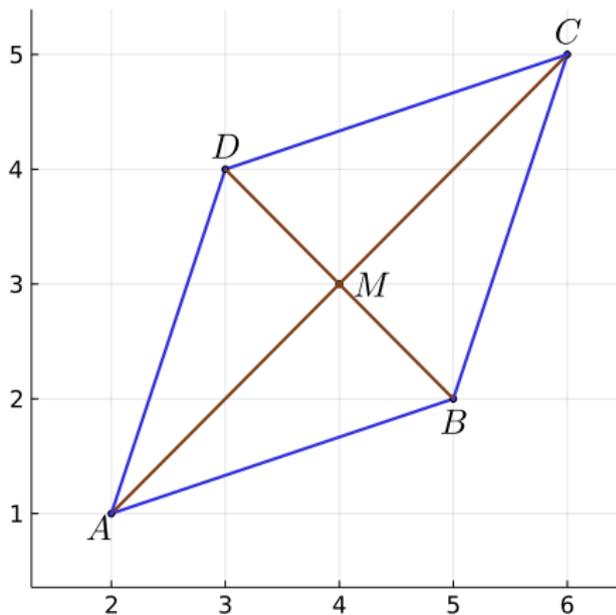
O ponto médio de um segmento

O paralelogramo do Exercício 3

$A = (2,1)$, $B = (5,2)$, $C = (6,5)$, $D = (3,4)$ e $M = (4,3)$.

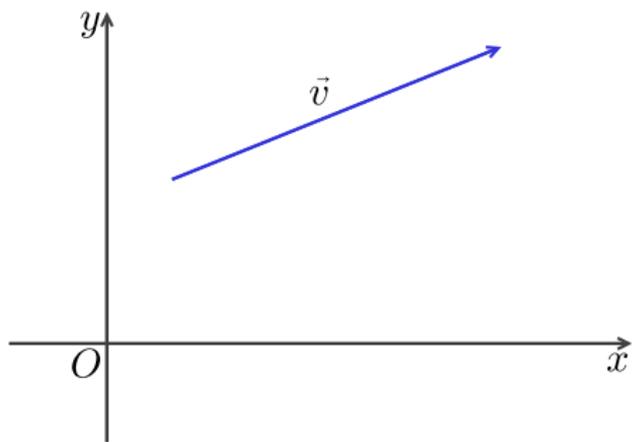
- $M = \frac{A+C}{2}$;

- $M = \frac{B+D}{2}$.



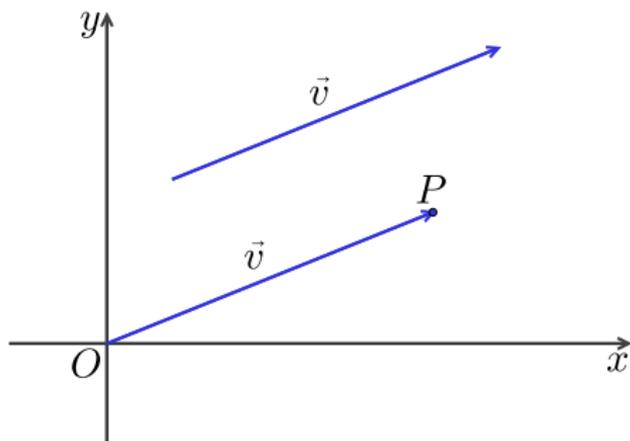
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?



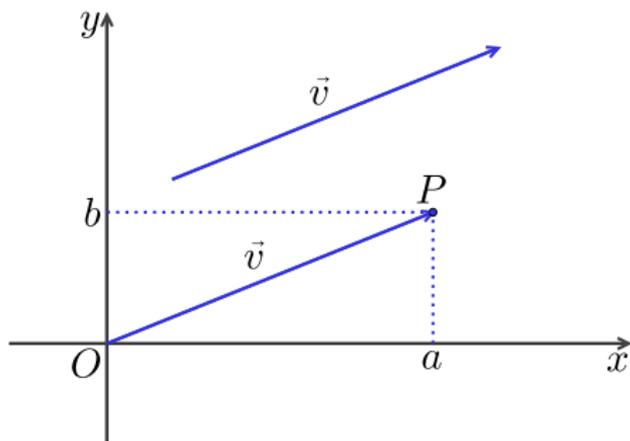
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$



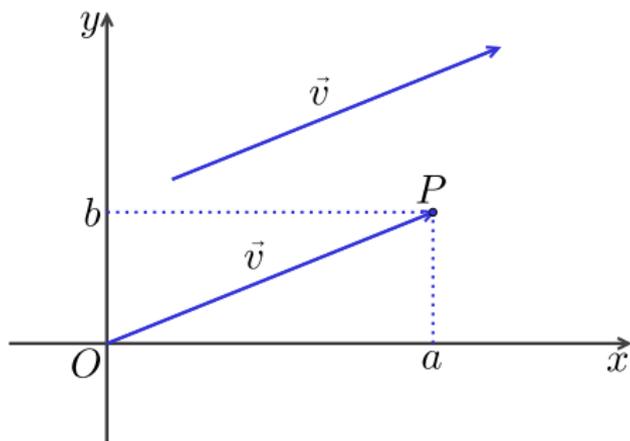
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$;



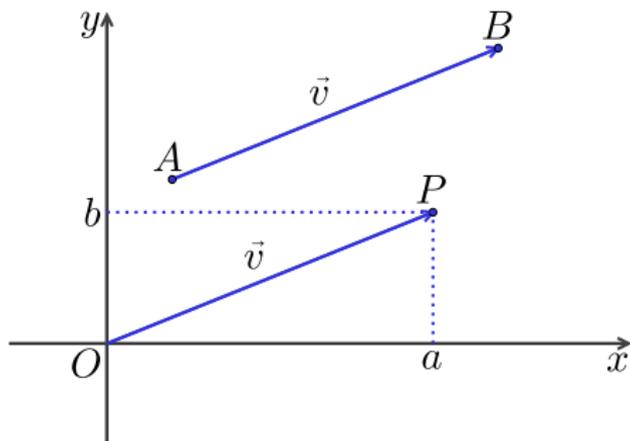
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$;
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;



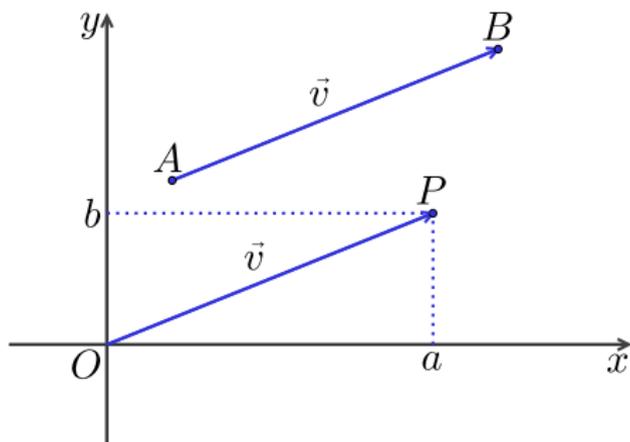
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$;
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- E se tomamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$?



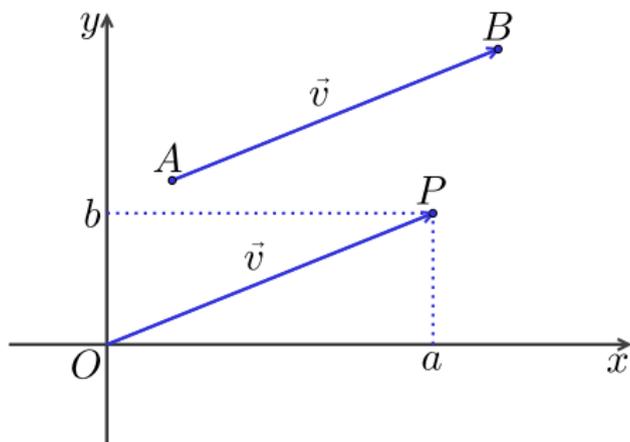
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$;
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- E se tomamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$?
- $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$



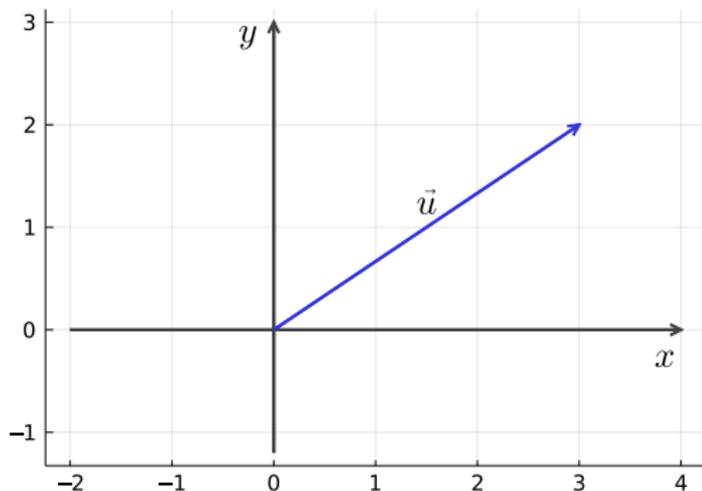
O módulo (comprimento) de um vetor

- Como calcular o módulo de um vetor \vec{v} ?
- Escolhendo um representante adequado: $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$;
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- E se tomamos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$?
- $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



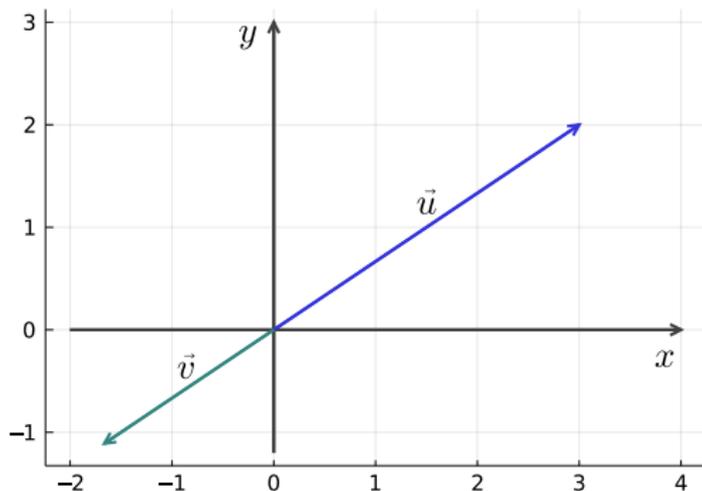
Exercício 4

Encontre um vetor \vec{v} de comprimento 2, com mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{u} = (3, 2)$.



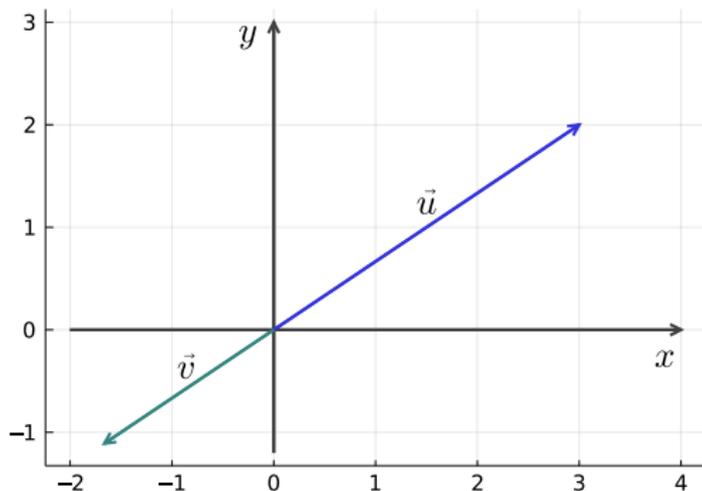
Exercício 4

Encontre um vetor \vec{v} de comprimento 2, com mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{u} = (3, 2)$.



Exercício 4

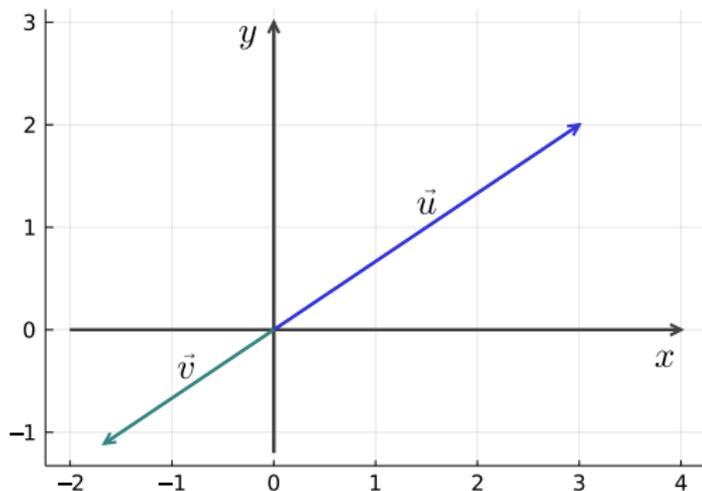
Encontre um vetor \vec{v} de comprimento 2, com mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{u} = (3, 2)$.



- $\vec{v} = -\frac{2}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$

Exercício 4

Encontre um vetor \vec{v} de comprimento 2, com mesma direção e sentido contrário ao de $\vec{u} = (3, 2)$.



- $\vec{v} = -\frac{2}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}(3, 2) \approx -(1.664, 1.109).$