Revisão, correções e melhorias para o livro de Otimização

1. **Teorema 2.9**, p 39. Considere uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x^* \in \text{int}(D)$ um minimizador local de f. Então qualquer derivada direcional que exista em x^* é nula. Consequentemente, se f é diferenciável em x^*, temos que

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{1}$$

Demonstração. Considere $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e suponha que a derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x^*) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t}$$

não seja nula, digamos, positiva. Como $x^* \in \text{int}(D)$ é um minimizador local de f, existe $\delta > 0$ tal que $x^* + td \in D$ e $f(x^*) \leq f(x^* + td)$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, fornecendo

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x^*) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} \leq 0,$$

uma contradição. □

2. **Exercício**, cap 2. Considere $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ e a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1x_2 + \dfrac{2}{x_1} + \dfrac{2}{x_2}$. Mostre que f tem um minimizador global.
Resolução. Afirmamos que se $f(x) \leq 5$, então $\frac{2}{5} \leq x_i \leq 4$, $i = 1, 2$. De fato, se $x_1 < \frac{2}{5}$ ou $x_2 < \frac{2}{5}$, então

$$f(x) = x_1x_2 + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} > \frac{2}{x_i} > 5.$$

Além disso, se $x_1 > 4$ ou $x_2 > 4$, então

$$f(x) = x_1x_2 + \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1x_2} > x_1x_2 + \frac{8}{x_1x_2} = \frac{(x_1x_2 - 2\sqrt{2})^2}{x_1x_2} + 4\sqrt{2} > 5.$$

Isto prova a afirmação. Considere agora o conjunto $L = \{x \in D \mid f(x) \leq 5\}$. Este conjunto é fechado pois se a sequência $(x^k) \subset L$ converge para um ponto $\bar{x}$, então $\bar{x} \in D$ e $f(\bar{x}) \leq 5$. Também é limitado em virtude da afirmação provada anteriormente. Portanto, existe um ponto $x^* \in L$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in L$. Caso $x \in D \setminus L$, temos $f(x) > 5 \geq f(x^*)$, provando assim que x^* é um minimizador global de f. □

3. **Teorema 4.13**, p 83. O Algoritmo 4.4, com o tamanho do passo calculado pela condição de Armijo (Algoritmo 4.3), é globalmente convergente.
Demonstração. Sejam (x^k) uma sequência gerada pelo algoritmo e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de (x^k), digamos $x^k \overset{\mathbb{N}'}{\to} \bar{x}$. Suponha por absurdo que $\bar{x}$ não seja estacionário, isto é, $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Pela continuidade de f, temos $f(x^k) \overset{\mathbb{N}'}{\to} f(\bar{x})$. Como a sequência $(f(x^k))$ é decrescente, podemos aplicar o Teorema 1.12 para concluir que $f(x^k) \to f(\bar{x})$. Por outro lado, pela condição de Armijo, temos

$$f(x^{k+1}) = f(x^k + t_kd^k) \leq f(x^k) + \eta t_k \nabla f(x^k)^T d^k.$$

Usando a definição de d^k e a positividade de $H(x^k)$, obtemos

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \eta t_k \nabla f(x^k)^T H(x^k) \nabla f(x^k) \geq 0,$$

o que implica $t_k \nabla f(x^k)^T H(x^k) \nabla f(x^k) \to 0$. Mas

$$\nabla f(x^k)^T H(x^k) \nabla f(x^k) \stackrel{\mathbb{N}'}{\to} \nabla f(\bar{x})^T H(\bar{x}) \nabla f(\bar{x}) \neq 0,$$

donde segue que $t_k \stackrel{\mathbb{N}'}{\to} 0$. Então, $t_k < 1$, para todo $k \in \mathbb{N}'$, suficientemente grande. Pelo Algoritmo 4.3, o passo $\dfrac{t_k}{\gamma}$ existiu e foi recusado. Assim,

$$f\Big(x^k + \frac{t_k}{\gamma} d^k\Big) > f(x^k) + \eta \frac{t_k}{\gamma} \nabla f(x^k)^T d^k.$$

Aplicando agora o teorema do valor médio (Teorema 1.57), podemos escrever

$$f\Big(x^k + \frac{t_k}{\gamma} d^k\Big) = f(x^k) + \frac{t_k}{\gamma} \nabla f\Big(x^k + \theta_k \frac{t_k}{\gamma} d^k\Big)^T d^k,$$

com $\theta_k \in (0,1)$. Portanto,

$$\nabla f\Big(x^k + \theta_k \frac{t_k}{\gamma} d^k\Big)^T d^k > \eta \nabla f(x^k)^T d^k.$$

Usando novamente a definição de d^k, obtemos

$$\nabla f\Big(x^k - \theta_k \frac{t_k}{\gamma} H(x^k) \nabla f(x^k)\Big)^T H(x^k) \nabla f(x^k) < \eta \nabla f(x^k)^T H(x^k) \nabla f(x^k).$$

Tomando o limite em $\mathbb{N}'$, podemos concluir que

$$\nabla f(\bar{x})^T H(\bar{x}) \nabla f(\bar{x}) \leq \eta \nabla f(\bar{x})^T H(\bar{x}) \nabla f(\bar{x}),$$

que junto com a positividade de $H(\bar{x})$ fornece $\eta \geq 1$, o que é uma contradição. $\square$

4. **Exercício**, cap 7. Mostre que o problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x) = x_1 x_2 x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

tem um maximizador global.

Resolução. Afirmamos que se algum $x_i > 1$, então $f(x) < 9$. De fato, digamos que $x_1 > 1$. Então, como x_2 e x_3 não podem ser simultaneamente nulos,

$$x_3 \leq x_2 + x_3 < x_1(x_2 + x_3) \leq x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 3,$$

donde segue que $x_3 < 3$. Além disso,

$$x_1 = \frac{(3 - x_2 x_3)}{x_2 + x_3}.$$

Portanto,

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 = \frac{(3 - x_2 x_3) x_2 x_3}{x_2 + x_3} < 9,$$

pois $0 \leq 3 - x_2 x_3 \leq 3$, $0 \leq \dfrac{x_2}{x_2 + x_3} \leq 1$ e $0 \leq x_3 < 3$. Os casos $x_2 > 1$ ou $x_3 > 1$ são análogos e assim a afirmação é verdadeira. Isto nos permite concluir que o conjunto

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 3, x \geq 0, f(x) \geq 9\}$$

é compacto. Portanto, existe um ponto $x^* \in L$ tal que $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in L$. Para os outros pontos viáveis do problema, isto é, para $x \notin L$, temos $f(x) < 9 \leq f(x^*)$, provando assim que x^* é um maximizador global para o problema. $\square$