Aplicações da Matemática

Ademir Alves Ribeiro

Setembro/2006

Otimização: modelagem matemática

Problemas reais em diversas áreas podem ser formulados matematicamente, dentre os quais:

- Formulação de misturas
- Dieta nutricional
- Corte de barras e chapas
- Logística - transporte
- Designação (pessoas e tarefas)

Um dos objetivos é minimizar ou maximizar certa variável, como o custo ou o lucro em determinado processo.

Exemplo 1: formulação de misturas

Uma indústria produz 2 tipos de aço, de acordo com as informações abaixo.

	Aço 1	Aço 2	Disponibilidade
Forno	2	2	8
Resfriamento	5	3	15
Lucro	120	100	

Determine a quantidade de cada tipo a ser produzida de modo a maximizar o lucro.

Formulação matemática: programação linear

Problema de programação linear

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{maximizar} & 120x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resolução: método simplex

	x_1	x_2	s_1	s_2	
pv	120	100	0	0	0
s_1	2	2	1	0	8
s_2	5	3	0	1	15

$\downarrow$ pivoteamento conveniente $\downarrow$

	x_1	x_2	s_1	s_2	
pv	0	0	-35	-10	-430
x_2	0	1	1.25	-0.5	2.5
x_1	1	0	-0.75	0.5	1.5

Formulação geral

Problema de programação linear

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Dados: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
- Incógnitas: $x \in \mathbb{R}^n$

Exemplo 2: designação

Uma rede de lanchonetes vai construir 4 novas filiais, contratando uma construtora para cada obra. O orçamento é dado abaixo:

	Filial 1	Filial 2	Filial 3	Filial 4
Construtora 1	72	68	85	90
Construtora 2	70	70	88	92
Construtora 3	75	62	82	90
Construtora 4	78	65	85	94

Para cada construtora, determine a filial que lhe deve ser atribuída, de modo a minimizar o custo total.

Formulação como um PPL

Problemas de designação também podem ser colocados na forma de um PPL. Para o exemplo acima temos:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,4 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\ldots,4 \\
& x_{ij} \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Programação não linear

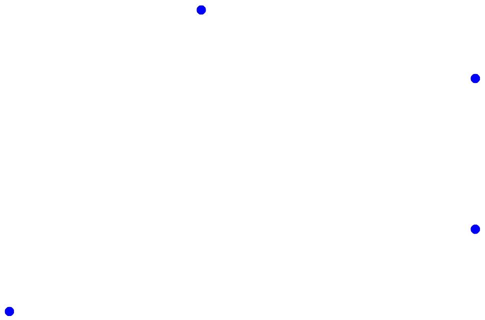
- Nem todos os problemas podem ser formulados em termos de funções lineares.
- Portanto, os métodos para resolução de PPL’s nem sempre se aplicam.

Exemplo: problema de localização

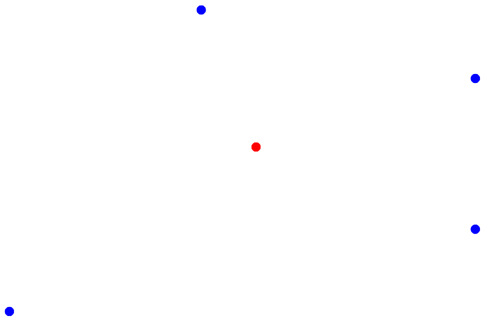
O problema

Dados m pontos $y^1, \ldots, y^m$ em $\mathbb{R}^n$, determinar o ponto cuja soma das distâncias aos pontos dados é mínima.

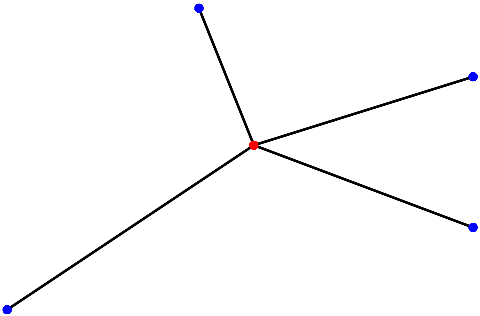
Exemplo: problema de localização



Exemplo: problema de localização



Exemplo: problema de localização



Formulação matemática

Programação não linear

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left\| x - y^i \right\| \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Programação não linear irrestrita

Problema irrestrito

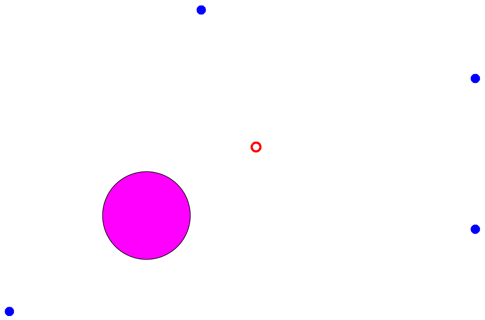
$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Voltando ao problema de localização

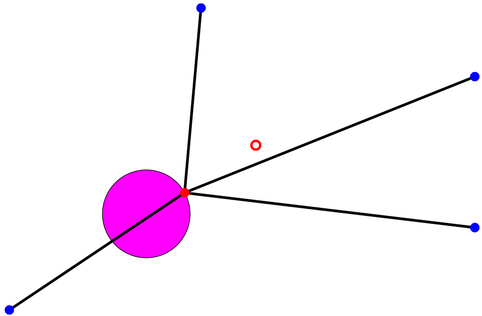
O problema

Considere o problema anterior, mas com a restrição de que o ponto procurado deve pertencer a uma região pré-estabelecida.

Voltando ao problema de localização



Voltando ao problema de localização



Formulação matemática

Programação não linear

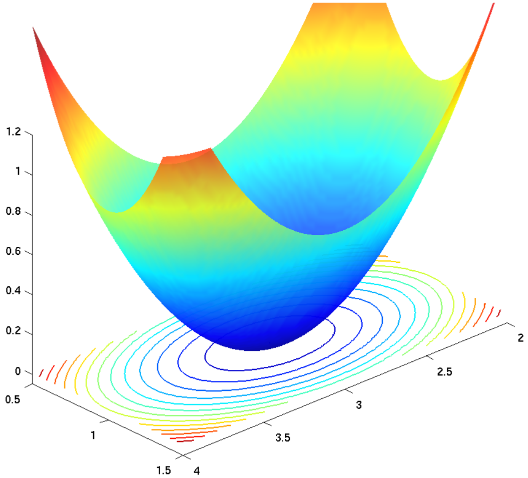
$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left\|x - y^i\right\| \\ \text{sujeito a} & \|x - c\| \leq r \end{array}$$

Programação não linear com restrições

Problema com restrições

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & g(x) = 0 \\ & h(x) \leq 0 \end{array}$$

O método de Cauchy para minimização irrestrita



Algoritmo de Cauchy

Dados: $k = 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $d^0 = -\nabla f(x^0)$,

ENQUANTO $d^k \neq 0$

Determine α_k tal que $f(x^k + \alpha_k d^k) = \min\limits_{\alpha \geq 0} f(x^k + \alpha d^k)$

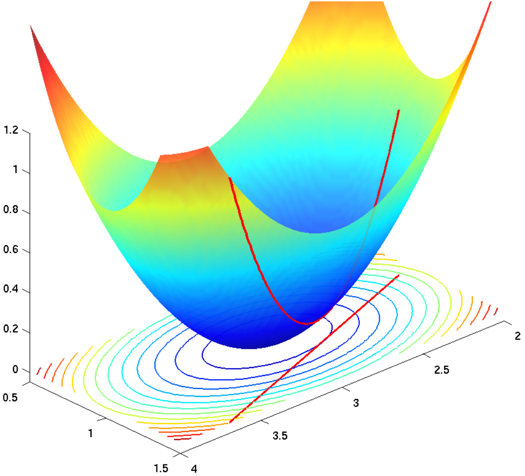
$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$

$k = k + 1$

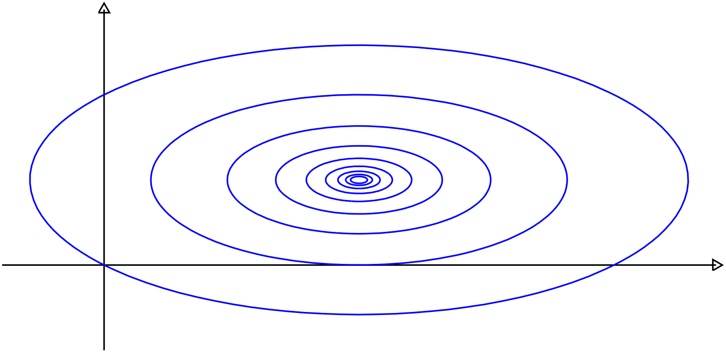
$d^k = -\nabla f(x^k)$

FIM.

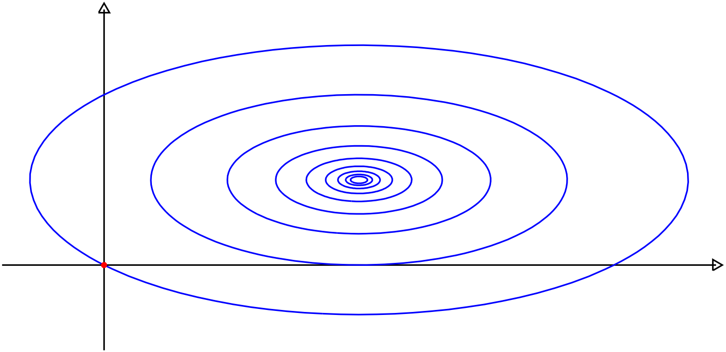
Busca linear



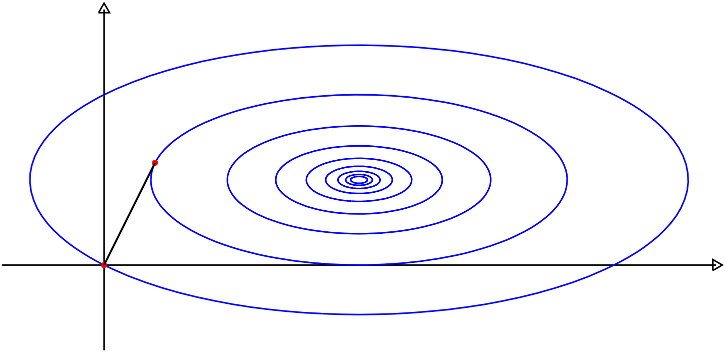
O método de Cauchy para minimização irrestrita



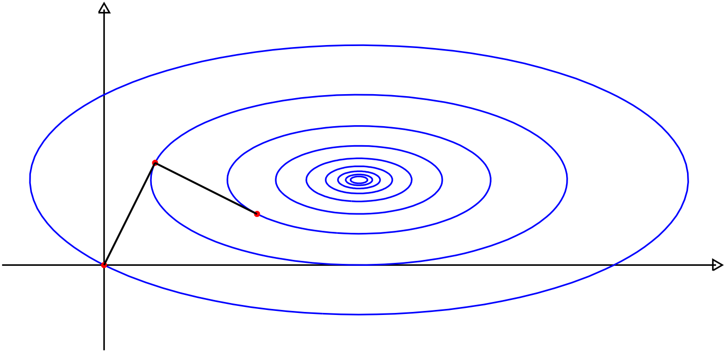
O método de Cauchy para minimização irrestrita



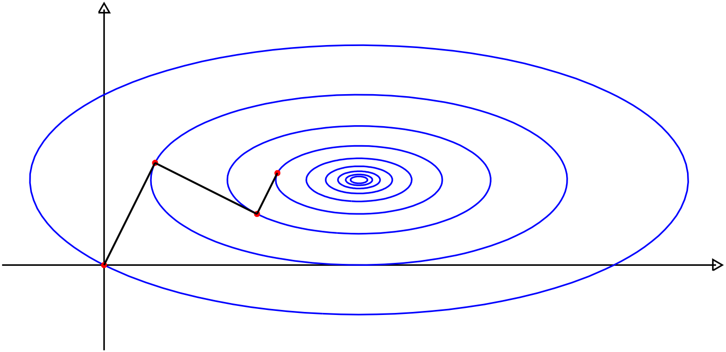
O método de Cauchy para minimização irrestrita



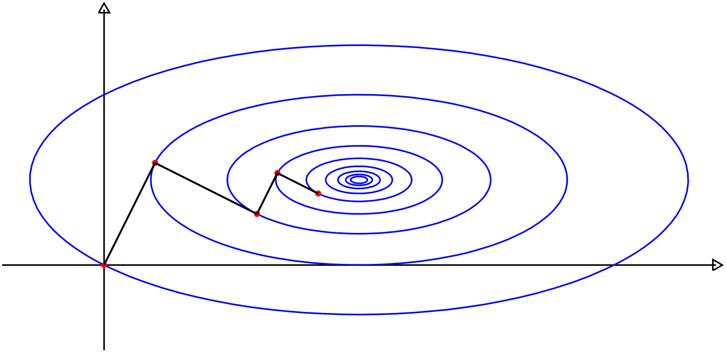
O método de Cauchy para minimização irrestrita



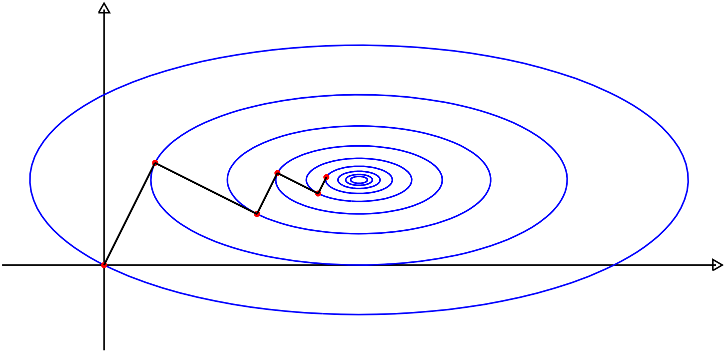
O método de Cauchy para minimização irrestrita



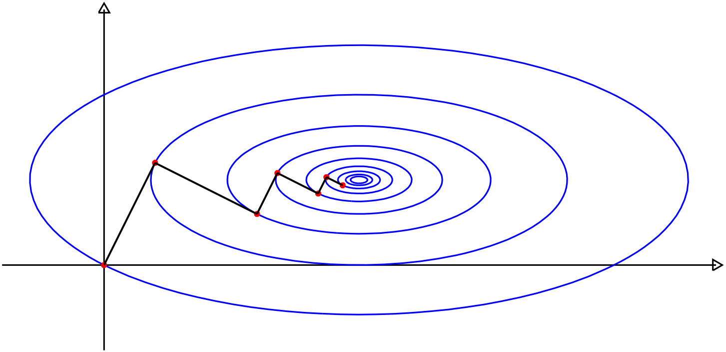
O método de Cauchy para minimização irrestrita



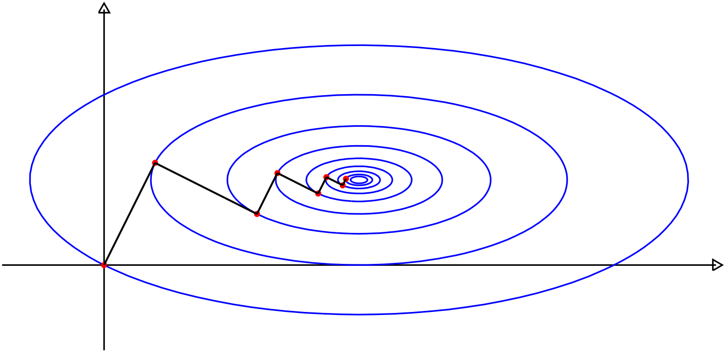
O método de Cauchy para minimização irrestrita



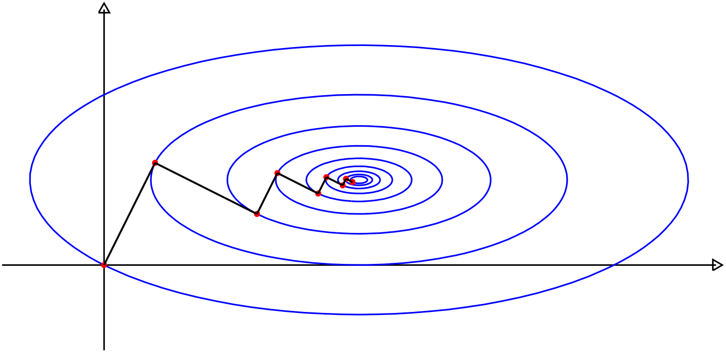
O método de Cauchy para minimização irrestrita



O método de Cauchy para minimização irrestrita



O método de Cauchy para minimização irrestrita

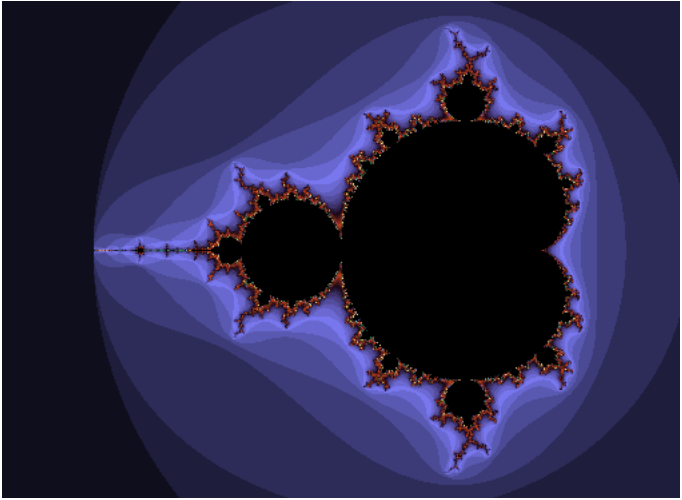


Convergência do algoritmo

Teorema

Sob certas hipóteses o algoritmo de Cauchy gera sequências que convergem para uma solução do problema de minimização.

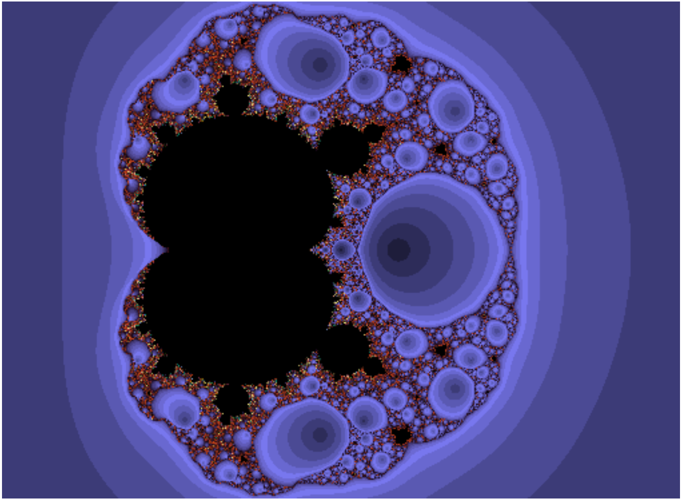
Fractais



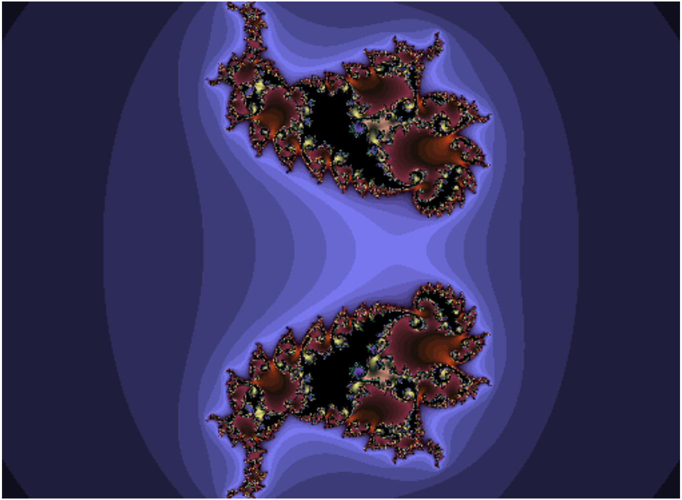
Histórico

- Benoit Mandelbrot (1975)
- Figuras geométricas diferentes das tradicionais
- Construção por processos iterativos infinitos
- Dimensão fracionária
- Estrutura fina
- Auto-similaridade
- Algumas formas fractais são encontradas na natureza

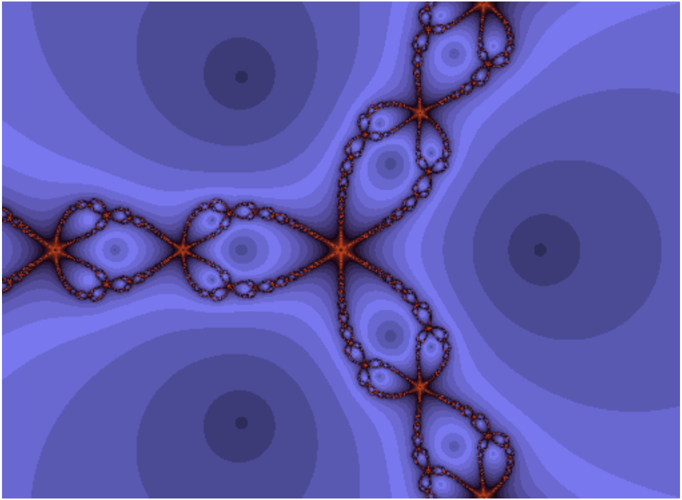
Magnet



Phoenix



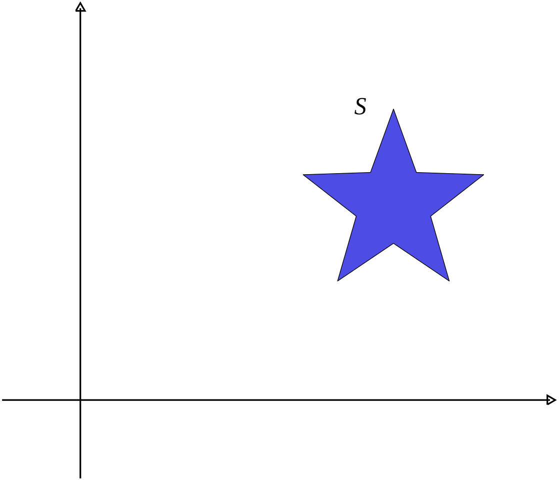
Newton



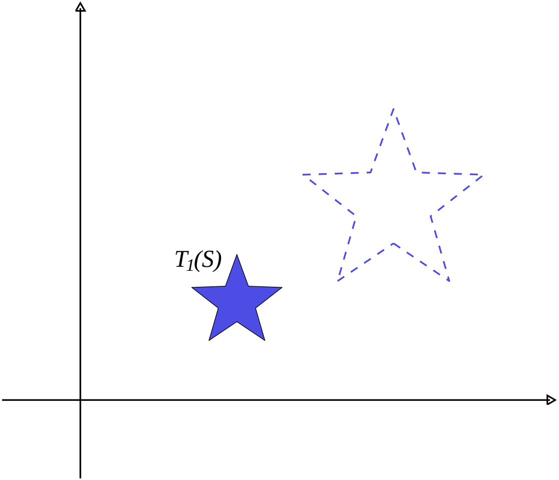
Processo de construção

- O processo de construção empregado aqui é o sistema iterativo de funções (IFS), que aplica de forma iterativa um conjunto de funções em uma figura inicial arbitrária.
- Utilizamos 3 classes de funções afins:
  - Contração
    $$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
  - Translação
    $$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
  - Rotação
    $$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

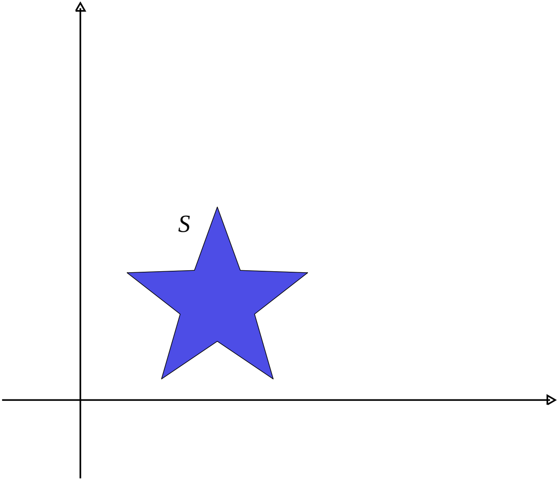
Contração no plano



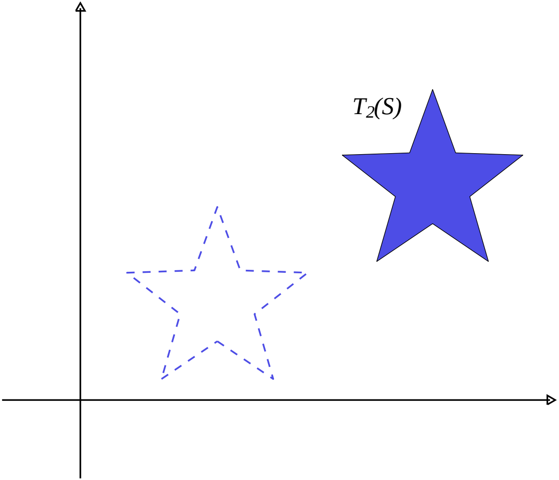
Contração no plano



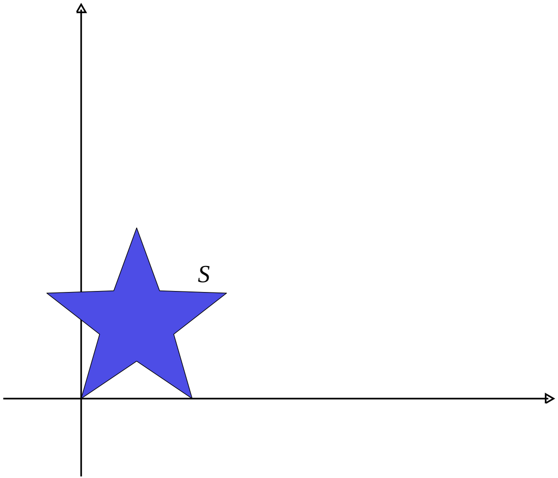
Translação no plano



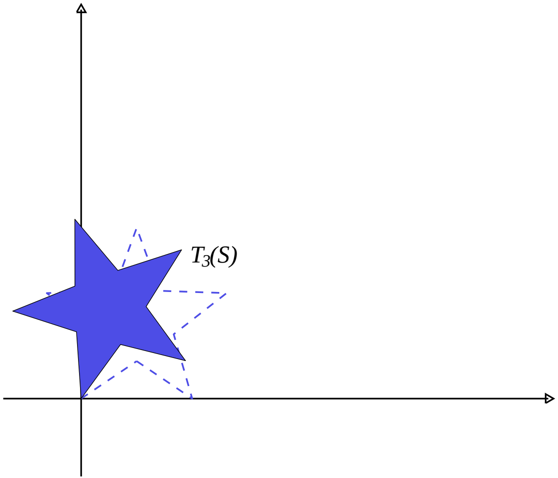
Translação no plano



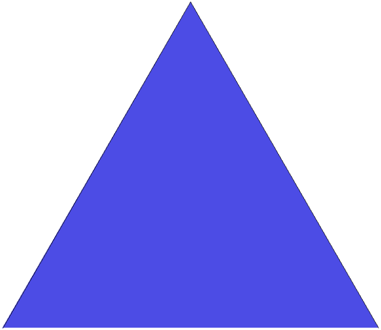
Rotação no plano



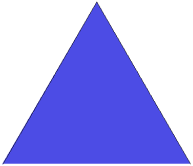
Rotação no plano



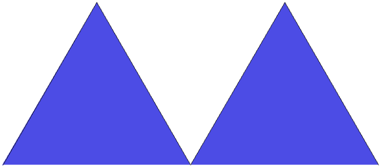
O triângulo de Sierpinski



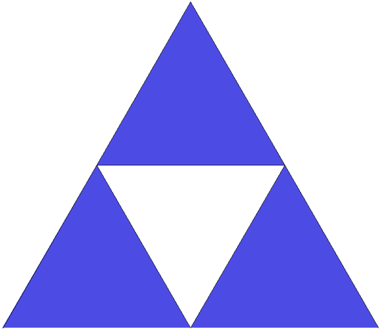
O triângulo de Sierpinski



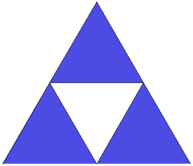
O triângulo de Sierpinski



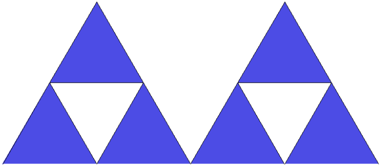
O triângulo de Sierpinski



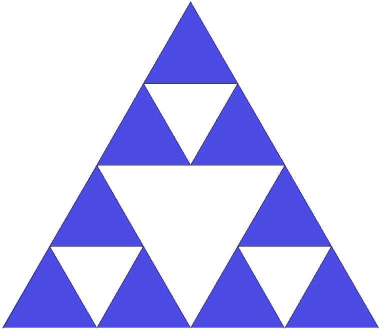
O triângulo de Sierpinski



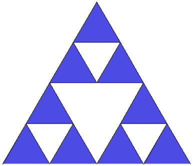
O triângulo de Sierpinski



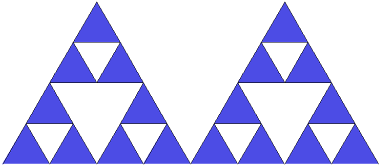
O triângulo de Sierpinski



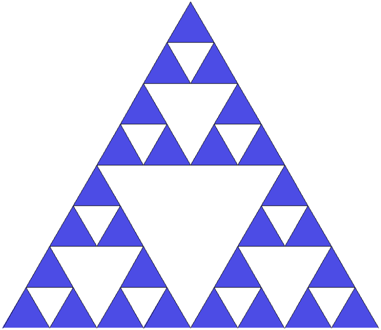
O triângulo de Sierpinski



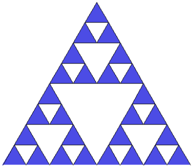
O triângulo de Sierpinski



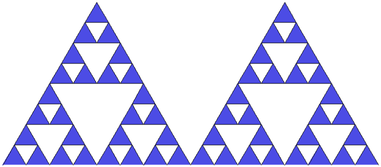
O triângulo de Sierpinski



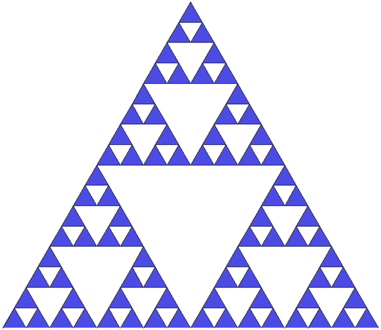
O triângulo de Sierpinski



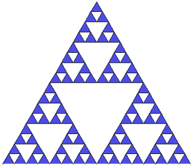
O triângulo de Sierpinski



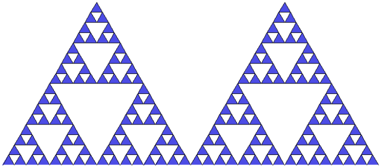
O triângulo de Sierpinski



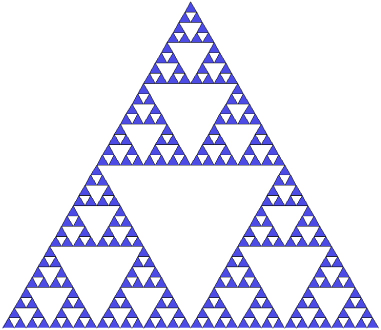
O triângulo de Sierpinski



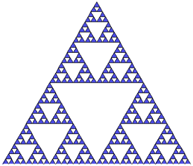
O triângulo de Sierpinski



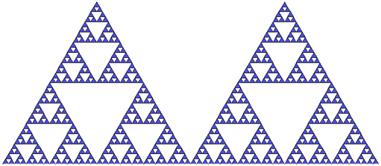
O triângulo de Sierpinski



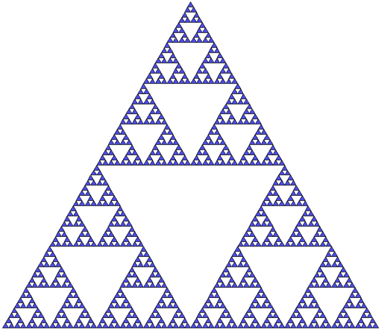
O triângulo de Sierpinski



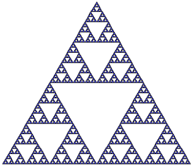
O triângulo de Sierpinski



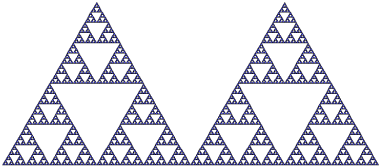
O triângulo de Sierpinski



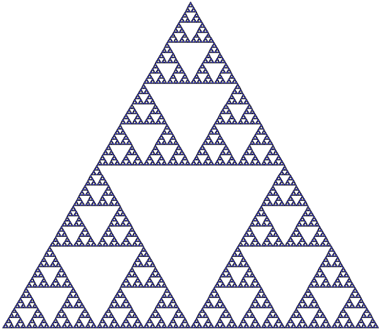
O triângulo de Sierpinski



O triângulo de Sierpinski



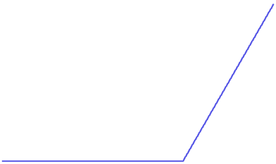
O triângulo de Sierpinski



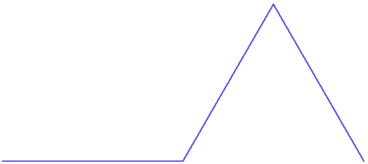
A curva de Koch

A curva de Koch

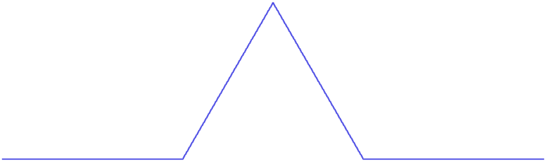
A curva de Koch



A curva de Koch

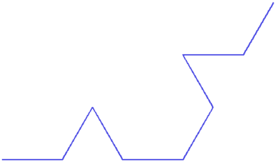


A curva de Koch

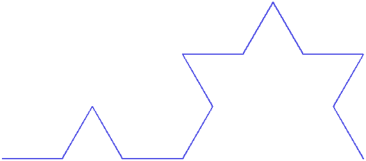


A curva de Koch

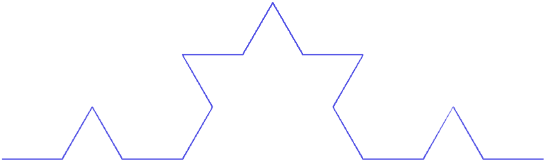
A curva de Koch



A curva de Koch

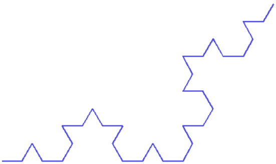


A curva de Koch

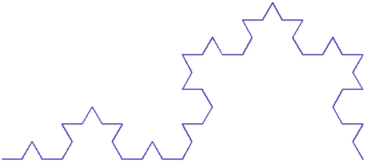


A curva de Koch

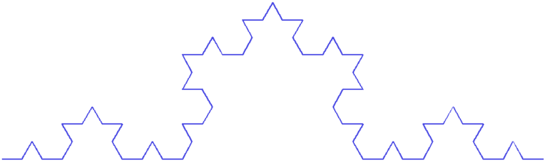
A curva de Koch



A curva de Koch

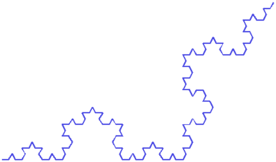


A curva de Koch

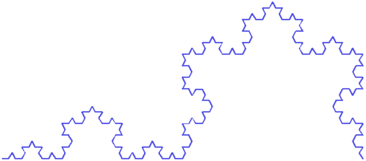


A curva de Koch

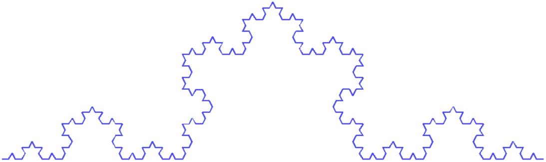
A curva de Koch



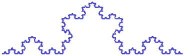
A curva de Koch



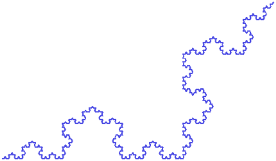
A curva de Koch



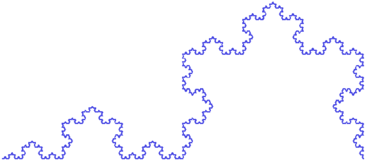
A curva de Koch



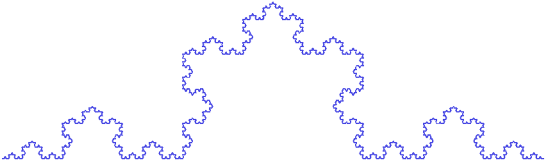
A curva de Koch



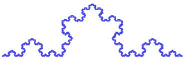
A curva de Koch



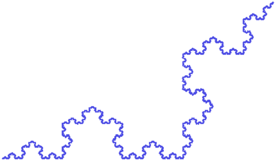
A curva de Koch



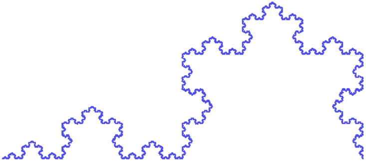
A curva de Koch



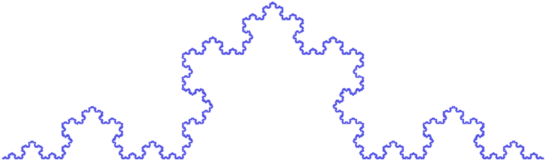
A curva de Koch



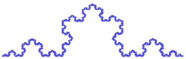
A curva de Koch



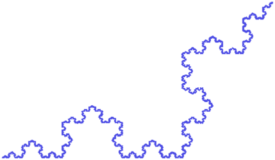
A curva de Koch



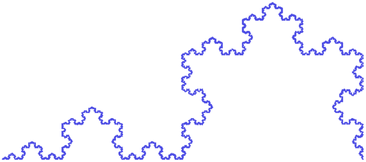
A curva de Koch



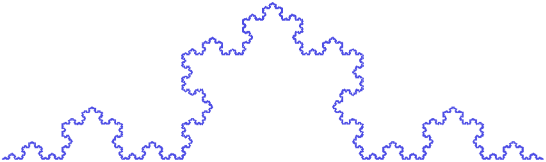
A curva de Koch



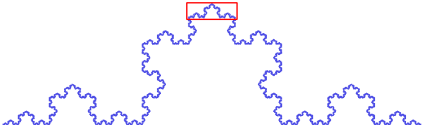
A curva de Koch



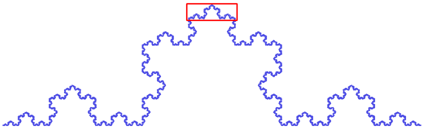
A curva de Koch

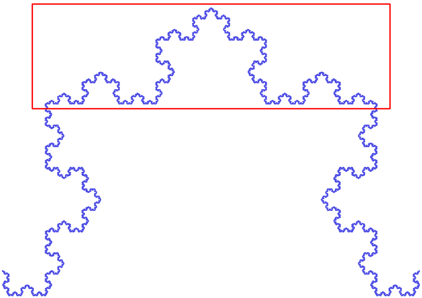


Auto-similaridade da curva de Koch

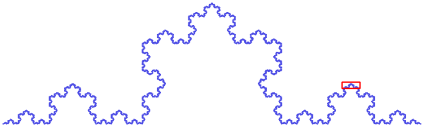


Auto-similaridade da curva de Koch

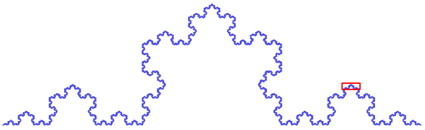


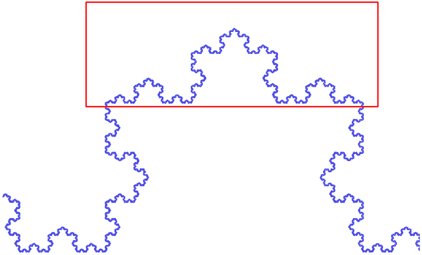


Auto-similaridade da curva de Koch

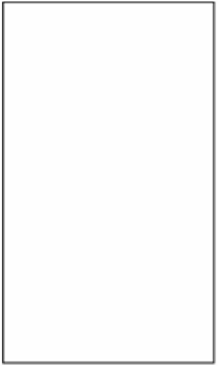


Auto-similaridade da curva de Koch

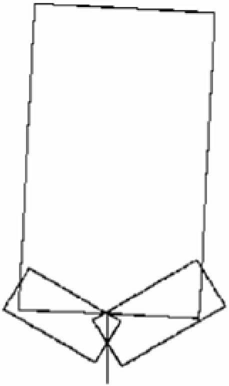




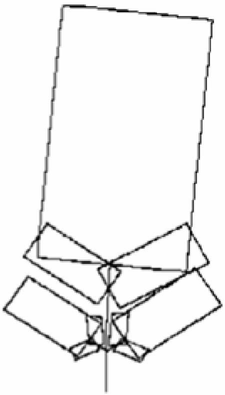
A Samambaia de Barnsley



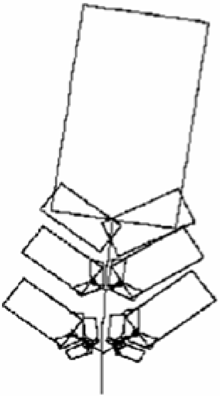
A Samambaia de Barnsley



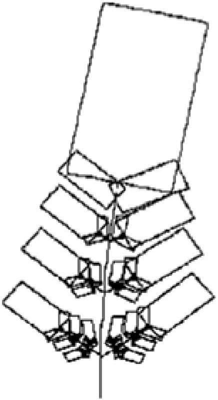
A Samambaia de Barnsley



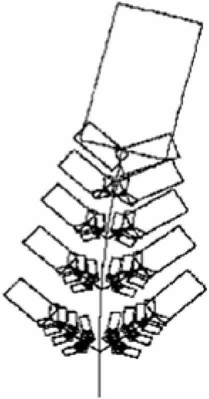
A Samambaia de Barnsley



A Samambaia de Barnsley



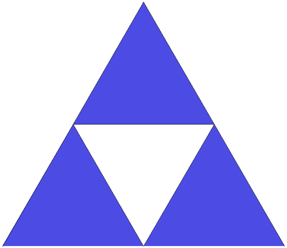
A Samambaia de Barnsley



A Samambaia de Barnsley

Propriedades matemáticas do triângulo de Sierpinski

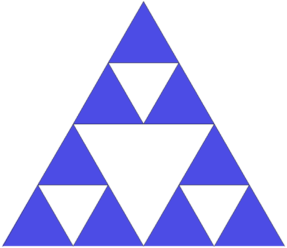
- Quantidade de triângulos na etapa j:



$$j = 1 \Rightarrow qt = 3$$

Propriedades matemáticas do triângulo de Sierpinski

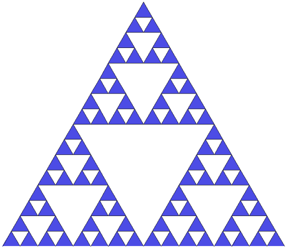
- Quantidade de triângulos na etapa j:



$$j = 2 \Rightarrow qt = 3 \times 3 = 3^2$$

Propriedades matemáticas do triângulo de Sierpinski

- Quantidade de triângulos na etapa j:



$$j = n \Rightarrow qt = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

Propriedades matemáticas do triângulo de Sierpinski

- Perímetro de cada triângulo na etapa n:

$$p_n = 3 \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}$$

- Soma total dos perímetros na etapa n:

$$P_n = 3^n \times \frac{3}{2^n} = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$$

Propriedades matemáticas do triângulo de Sierpinski

- Área de cada triângulo na etapa n:

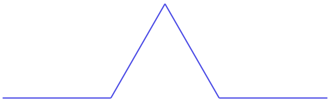
$$s_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

- Área total dos triângulos na etapa n:

$$S_n = 3^n \times \frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{4} \to 0$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

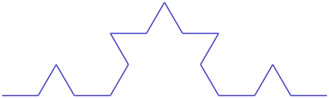
- Quantidade de segmentos na etapa j:



$$j = 1 \Rightarrow qs = 4$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

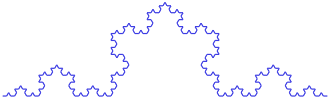
- Quantidade de segmentos na etapa j:



$$j = 2 \Rightarrow qs = 4 \times 4 = 4^2$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

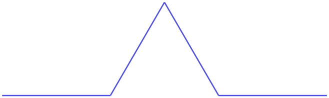
- Quantidade de segmentos na etapa j:



$$j = n \Rightarrow qs = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

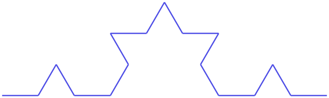
- Comprimento de cada segmento na etapa j:



$$j = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

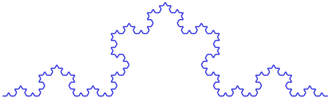
- Comprimento de cada segmento na etapa j:



$$j = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

- Comprimento de cada segmento na etapa j:



$$j = n \Rightarrow c = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

- Comprimento da curva na etapa n:

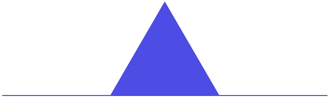
$$l_n = 4^n \times \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

- Comprimento total da curva:

$$l = \lim_{n \to \infty} l_n = \infty$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

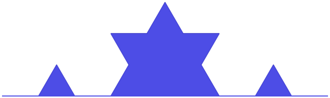
- Área delimitada pela curva na etapa j:



$$j = 1 \Rightarrow s_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

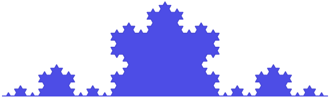
- Área delimitada pela curva na etapa j:



$$j = 2 \Rightarrow s_2 = s_1 + 4\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

- Área delimitada pela curva na etapa j:



$$j = n \Rightarrow s_n = s_{n-1} + 4^{n-1} \left(\frac{1}{3^n} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Propriedades matemáticas da curva de Koch

- Área delimitada pela curva na etapa n:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} 4^{j-1} \left(\frac{1}{3^j} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{4}{9} \right)^j$$

- Área total delimitada pela curva:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^j = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20}$$

Conclusões

O que vimos aqui é insuficiente para dar uma idéia da gama de aplicações, curiosidades e sutilezas que tem a matemática. Vários campos da ciência fazem uso das ferramentas apresentadas nesta palestra, com o objetivo de ajudar na tomada de decisões:

- Informática
- Economia
- Logística - transporte
- Medicina
- Processos sísmicos

Quase sempre o objetivo é minimizar ou maximizar certa variável, como o custo ou o lucro em determinado processo.