Métodos numéricos para eng. de produção

Engenharia de Produção - UFPR

Agnelo Denis Vieira

Erros

2018

Erros

Todo procedimento experimental e procedimento computacional contem erros.

Erros grosseiros devem ser evitados:

seleção de modelo matemático incorreto, amostragem inadequada, erros de digitação, processamento numérico incorreto

Demais erros são inevitáveis e devem ter as causas comprendidas para serem minimizados e considerados na análise de resultados.

Erro de arredondamento

Erro de truncamento

Propagação de erros

Sequência de realização de operações

Veja o resultado de alguns erros numéricos de grande impacto

Collection of Software Bugs

Prof. Thomas Huckle

https://www5.in.tum.de/persons/huckle/bugse.html

Acurácia (ou exatidão): proximidade em relação ao valor verdadeiro real

categorias de erros na metrologia:

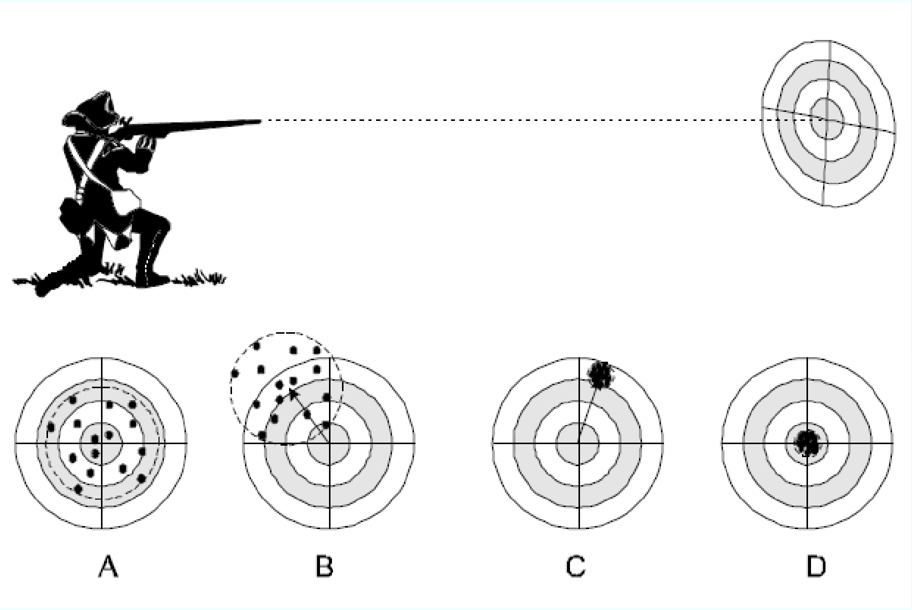
Erro aleatório Erro sistemático Erro grosseiro

"A" elevado nível de erros aleatórios enquanto o erro sistemático é baixo

"B" tanto os erros aleatórios quanto sistemáticos são grandes.

"C" reduzidos erros aleatórios e grande erro sistemático, este erro pode ser compensado

"D" reduzidos níveis de erros aleatórios e também do erro sistemático



Precisão: número de dígitos significativos utilizados

a) $\pi = 3.1$

b) $\pi = 3.1415$

c) $\pi = 3.5758982$

d) $\pi = 3.14159265358979$

"b" maior precisão do que "a"

"c" maior precisão do que "b" mas sem exatidão (serve para nada)

"d" maior precisão do que "a" e "b"

"d" maior exatidão do que "c"

Quantificação de erros:

Qual a razão para quantificar os erros?

- determinar a acurácia (proximidade em relação ao valor verdadeiro real) da execução de métodos numéricos
- estabelecer critérios de parada para algoritmos iterativos

Todo método numérico produz um resultado <u>aproximado</u>

<u>Erro Verdadeiro</u> (E_t ou E_v) (True Error) [unidade da grandeza física]

Diferença entre o valor verdadeiro (valor exato) e o valor aproximado determinado pela aplicação do método numérico

Erro Verdadeiro = Valor Verdadeiro - Valor Aproximado

Valor absoluto do Erro Verdadeiro = | Erro Verdadeiro |

Para o caso geral o valor verdadeiro não é conhecido e o que se deseja é, através da aplicação de um método numérico determinar o valor aproximado. Então não é possível determinar o valor do erro verdadeiro

Contudo, esta definição serve para avaliar a acurácia do método realizando a sua aplicação para um caso específico em que o valor verdadeiro é conhecido.

Erro Verdadeiro Relativo (Relative True Error) $\in_t$

Razão entre o erro verdadeiro e o valor verdadeiro [admensional]

$$\text{Erro Relativo Verdadeiro } (\in_t) = \frac{\text{Erro Verdadeiro}}{\text{Valor Verdadeiro}}$$

$$\text{Erro Relativo Verdadeiro } (\in_t) = \frac{\text{Erro Verdadeiro}}{\text{Valor Verdadeiro}} \cdot 100\%$$

Percentual

xxx

Exemplo

A definição exata da derivada de uma função f(x) é dada por:

$$f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada de uma função f(x) pode ser aproximada por:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Considerando:

$f(x) = 7\ e^{0,5x}$

Empregando uma tabela de derivadas sabe-se que $f'(x) = 7\ * 0,5\ e^{0,5x}$

Determine o valor exato da derivada da função em x=2

Determine o valor aproximado da derivada da função em x=2 para Λx = 0,3

Determine o valor do erro verdadeiro e do erro verdadeiro relativo

Exemplo

$f(x) = 7\ e^{0,5x}$

$f'(x=2) = 7\ * 0,5\ e^{0,5x} = 9,51$ Valor Verdadeiro

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

para : x=2 Λx = 0,3

$f(x+\Delta x) = 7\ e^{0,5*(2,3)} = 22,11$

$f(x) = 7\ e^{0,5*(2)} = 19,03$

f'(x) =10,26 Valor aproximado

Errro verdadeiro = Valor verdadeiro - Valor aproximado = -0,75

Erro verdadeiro relativo = Erro verdadeiro / Valor verdadeiro = -0,079

No exemplo anterior

$f(x) = 7\ e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 0,3$

Implemente um código em VBA que determina e apresenta em uma planilha: Erro Verdadeiro, Erro Verdadeiro Relativo, Erro Verdadeiro Relativo Percentual para:

a) $f(x) = 7.10^{-3}\ e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 0,3$

b) $f(x) = 7.10^{-6}\ e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 0,3$

c) $f(x) = 7e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 0,1$

d) $f(x) = 7\ e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 1.10^{-3}$

e) $f(x) = 7\ e^{0,5x}\ x = 2\ e\ \Delta x = 1.10^{-6}$

Realize as alterações no código VBA para que os erros especificados acima sejam determinados para a função $f(x) = A\ e^{Bx}$

quando A B x Λx são especificados através de interface inputbox; os erros devem ser apresentados através de uma única interface msgbox

O que fazer se o valor verdadeiro não é conhecido ou se é muito difícil de ser determinado?

Em procedimentos iterativos, em que a cada iteração é determinado um valor aproximado, o "Erro Aproximado" pode ser utilizado como um critério de parada da execução do procedimento.

Erro Aproximado (Ea) (de aproximação)

(Approximate error) [unidade da grandeza física]

diferença entre o valor aproximado obtido na iteração atual e o valor aproximado obtido na iteração anterior.

Erro Aproximado = Val. aprox. da iter. atual - Val. aprox. da iter. anterior

Valor Absoluto do Erro Aproximado = | Erro aproximado |

Erro aproximado relativo [admensional] $\in_a$

razão entre o erro aproximado e o valor aproximado da iteração atual

$$\text{Erro Aproximado Relativo} = \frac{\text{Erro Aproximado}}{\text{Val. aprox. da iter. atual}}$$

$$\text{Erro Aproximado Relativo Percentual} = \frac{\text{Erro Aproximado}}{\text{Val. aprox. da iter. atual}} \,.\, 100\%$$

Em um procedimento iterativo que a cada iteração, o

"Valor da aproximação da iteração atual"

se aproxima mais do

"Valor Verdadeiro"

do que o

"Valor da aproximação da iteração anterior"

o número mínimo de dígitos significativos corretos obtidos no

"Valor da aproximação da iteração atual"

pode ser estimado através da seguinte relação

$$n = \text{floor}(-\log10(|\varepsilon_a| / 0,5))$$

para que o

"Valor da aproximação da iteração atual"

tenha pelo menos n dígitos significativos corretos, o Erro aproximado relativo deve obedecer a seguinte relação

$$|\varepsilon_a| \leq 0,5 \,.\, 10^{(-m)}$$

onde:

floor : função que transforma um número real em um número inteiro, tal que (Num. inteiro ≤ Num. real)

Sejam:

EAR : valor absoluto do erro aproximado relativo

ErroRelMax : um limite (tolerância) admissível do erro relativo máximo em relação ao valor verdadeiro

NDS_est : uma estimativa do número de dígitos significativos corretos do resultado aproximado determinado

NDS_des : o número mínimo desejado de dígitos significativos corretos do resultado aproximado determinado

NumIter : número de iterações já realizadas pelo procedimento

NumIterMax : número máximo admissível de iterações

A execução do procedimento iterativo é encerrada quando

$$\text{EAR} \leq \text{ErroRelMax} \text{ ou } \qquad \text{NDS\_est} \geq \text{NDS\_des}$$

com NDS_est = floor(-log10(EAR / 0,5))

Para evitar que o procedimento continue sendo executado indefinidamente, é importante que a execução seja encerrada quando

$$\text{NumIter} \geq \text{NumIterMax}$$

```
Do While (NDS_des > NDS_est) And (ErroRelMax < EAR) And (NumIter < NumIterMax )
```

Exemplo

O valor de e^x pode ser determinado de forma aproximada empregando apenas operações de multiplicação e divisão através da série com infinitos termos na forma

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

O número de termos efetivamente utilizado é determinado estabelecedo o erro máximo admissível em relação ao valor verdadeiro ou estabelecendo o número mínimo de dígitos significativos corretos

Implemente um código em VBA que recebe o valor de x e o número mínimo de dígitos significativos corretos e determina e^x

obs:

comparar a implementação Double e Single com x = 0,7 e NDS_des=6

observar o valor de x, bem como de NDS_estReal quando N = 9

Origem dos erros nos procedimentos numéricos

Há conflito de denominação dos erros:

Erros de armazenamento / representação

Erro de arredondamento

Erro de truncamento

Erros de truncamento: decorrente da interrupção da execução de um procedimento iterativo após um número específico de iterações quando o procedimento poderia continuar sendo executado por mais iterações ou mesmo indefinidamente

Propagação de erros: resultante da realização de operações utilizando variáveis cujos valores possuem erros de representação e ou truncamento

Um número pode ser representado na forma

$$x = (fx \cdot 10^{e}) + (gx \cdot 10^{e-t})$$

onde: $0.1 \leq fx < 1$ $0 \leq gx < 1$

t: número de dígitos utilizados na representação

exemplo:

para x = 234.57 e t = 4 dígitos

$$x = 0.2345 \cdot 10^{3} + 0.7 \cdot 10^{-1}$$

$fx = 0.2345 \cdot 10^{3}$ esta parcela é representada

$gx = 0.7 \cdot 10^{-1}$ esta parcela não pode ser representada, resta saber o que fazer com ela

Um número pode ser representado na forma

$x = fx \;.\; 10^{e} + gx \;.\; 10^{e-t}$

onde: $0.1 \leq fx < 1$ $\quad$ $0 \leq gx < 1$

t: número de dígitos

para: $x = 234.57 \quad t = 4$

$x = 0.2345 \;.\; 10^{3} + 0.7 \;.\; 10^{-1}$

truncamento: gx é desprezado, independentemente do seu valor

$x = fx \;.\; 10^{e}$

$x = 0.2345 \;.\; 10^{3}$

arredondamento:

$x = fx \;.\; 10^{e}$ $\quad$ se $|gx| < 0.5$

$x = fx \;.\; 10^{e} + 10^{e-t}$ $\quad$ se $|gx| \geq 0.5$

$x = 0.2345 \;.\; 10^{3} + 10^{3-4} = 0.2345 \;.\; 10^{3} + 1.10^{-1}$

$x = 0.2346 \;.\; 10^{3}$

Erros de armazenamento / representação

- alguns números não podem ser representados com exatidão, sendo possível apenas uma representação aproximada

$$\frac{1}{3} \cong 0.333333\ldots \quad ErroVerdadeiro = \frac{1}{3} - 0.33333333\ldots = 0.000000333\ldots$$

$$\sqrt{2} \cong 1.4142\ldots \qquad \pi = 3.14\ldots$$

- nos computadores atuais os números são representados na base 2 utilizando uma quantidade pré-estabelecida de bits, alguns permitem uma representação exata , enquanto outros não

$$(11.1875)_{10} = (1011.0011)_2 = \begin{pmatrix} (1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0) \\ +(0\times 2^{-1} + 0\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} + 1\times 2^{-4}) \end{pmatrix}_{10}$$

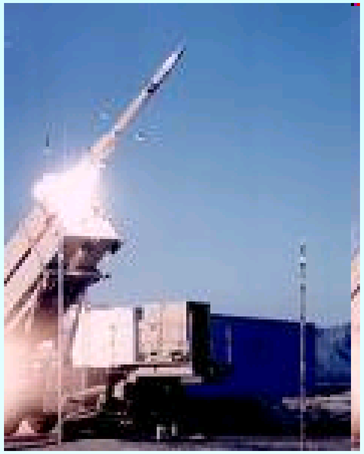
1/16 (= 0,0625)$_{10}$ = $(0{,}0011)_2$

1/10 (=0,1)$_{10}$ = 0,0001100110011[0011]…$_{(2)}$

Problems created by round off error

- 28 Americans were killed on February 25, 1991 by an Iraqi Scud missile in Dhahran, Saudi Arabia.
- The patriot defense system failed to track and intercept the Scud. Why?

Problem with Patriot missile



- Clock cycle of 1/10 seconds was represented in 24-bit fixed point register created an error of 9.5 x 10^{-8} seconds.
- The battery was on for 100 consecutive hours, thus causing an inaccuracy of

$$
\begin{aligned}
&= 9.5\times10^{-8}\ \frac{\mathrm{s}}{0.1\mathrm{s}}\times100\mathrm{hr}\times\frac{3600\mathrm{s}}{1\mathrm{hr}} \\
&= 0.342s
\end{aligned}
$$

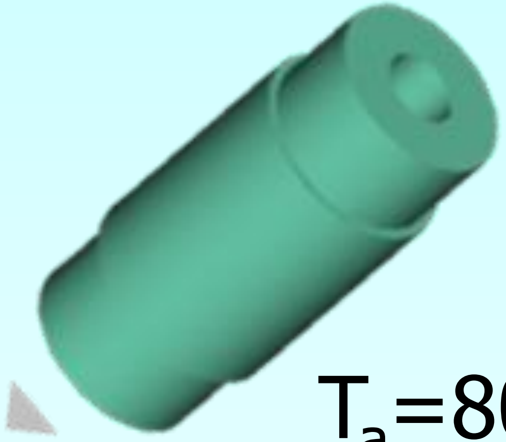
Problem (cont.)

- The shift calculated in the ranging system of the missile was 687 meters.
- The target was considered to be out of range at a distance greater than 137 meters.

Effect of Carrying Significant Digits in Calculations

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Find the contraction in the diameter

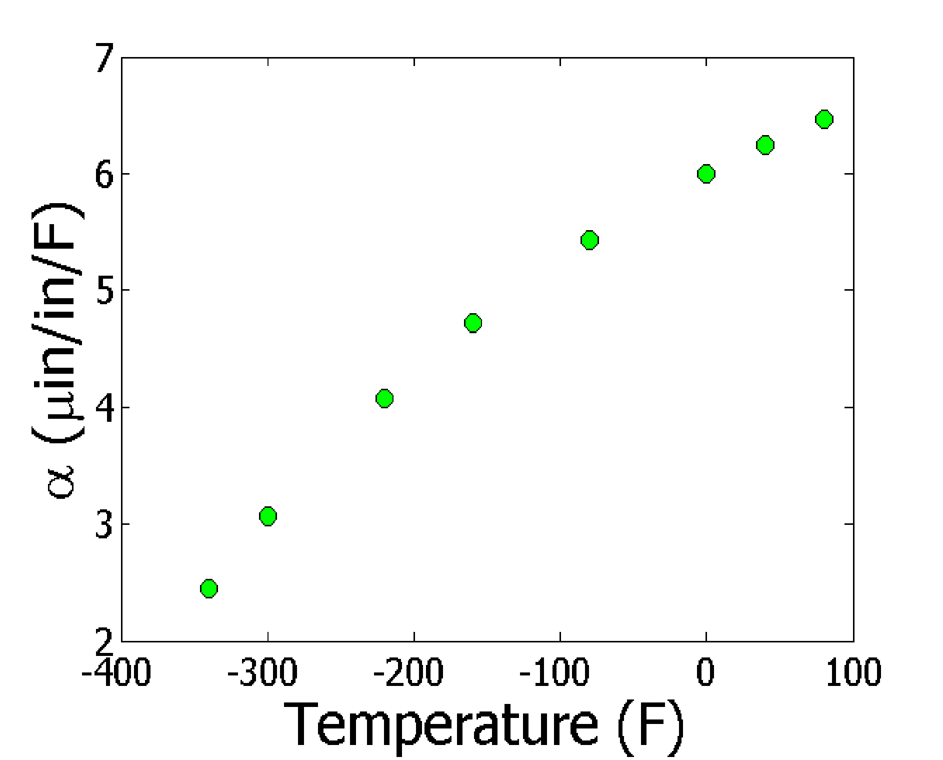


$$\Delta D = D\int_{T_a}^{T_c} \alpha(T)\,dT$$

T_a=80°F; T_c=-108°F; D=12.363"

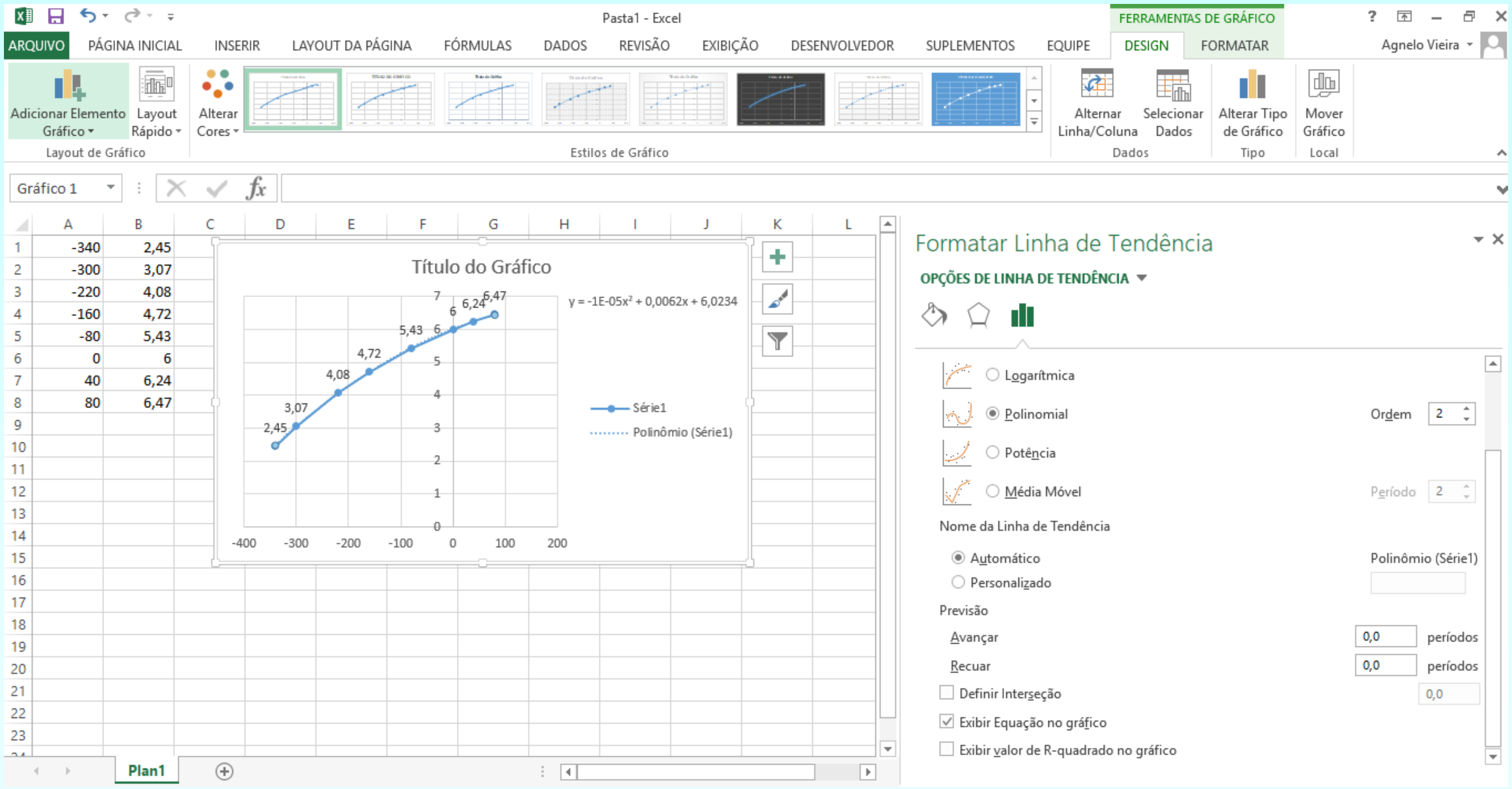
$$\alpha = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$

Thermal Expansion Coefficient vs Temperature



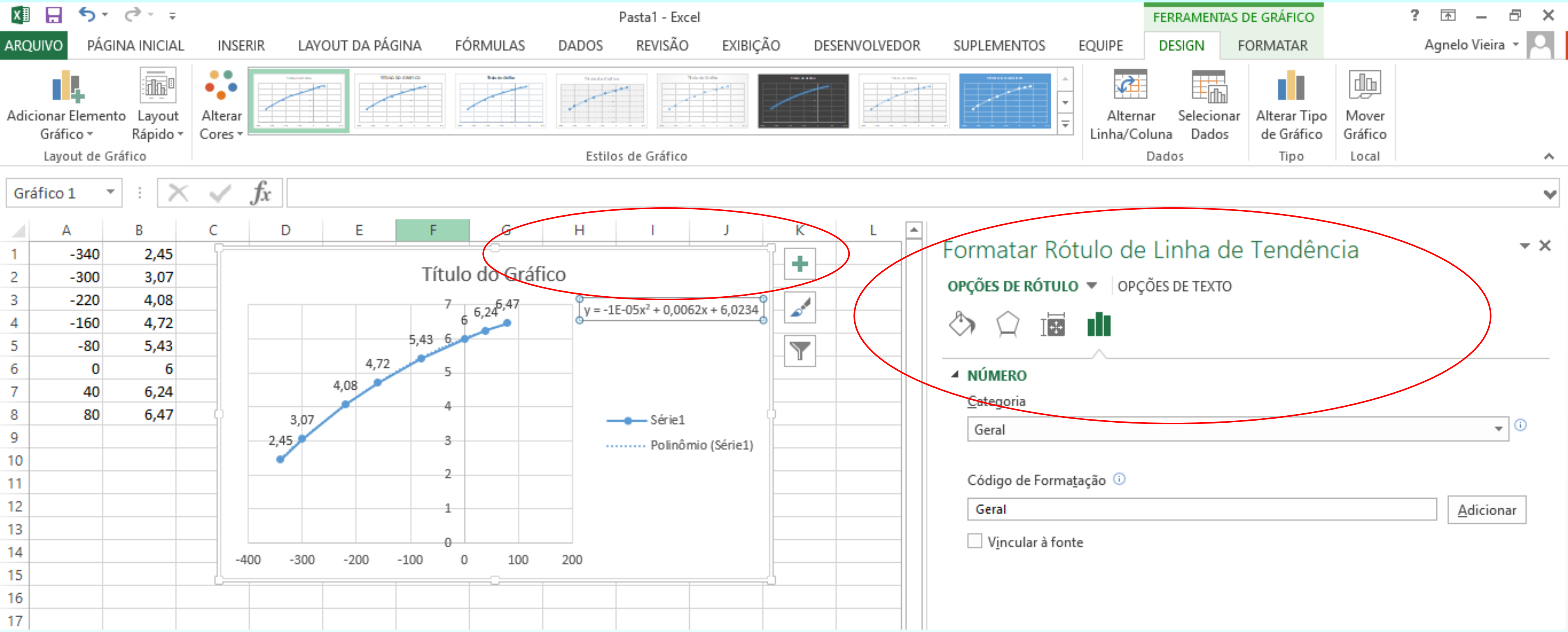
T(°F)	α (μin/in/°F)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

Regressing Data in Excel (general format)



	A	B
1	-340	2,45
2	-300	3,07
3	-220	4,08
4	-160	4,72
5	-80	5,43
6	0	6
7	40	6,24
8	80	6,47

Regressing Data in Excel (general format)

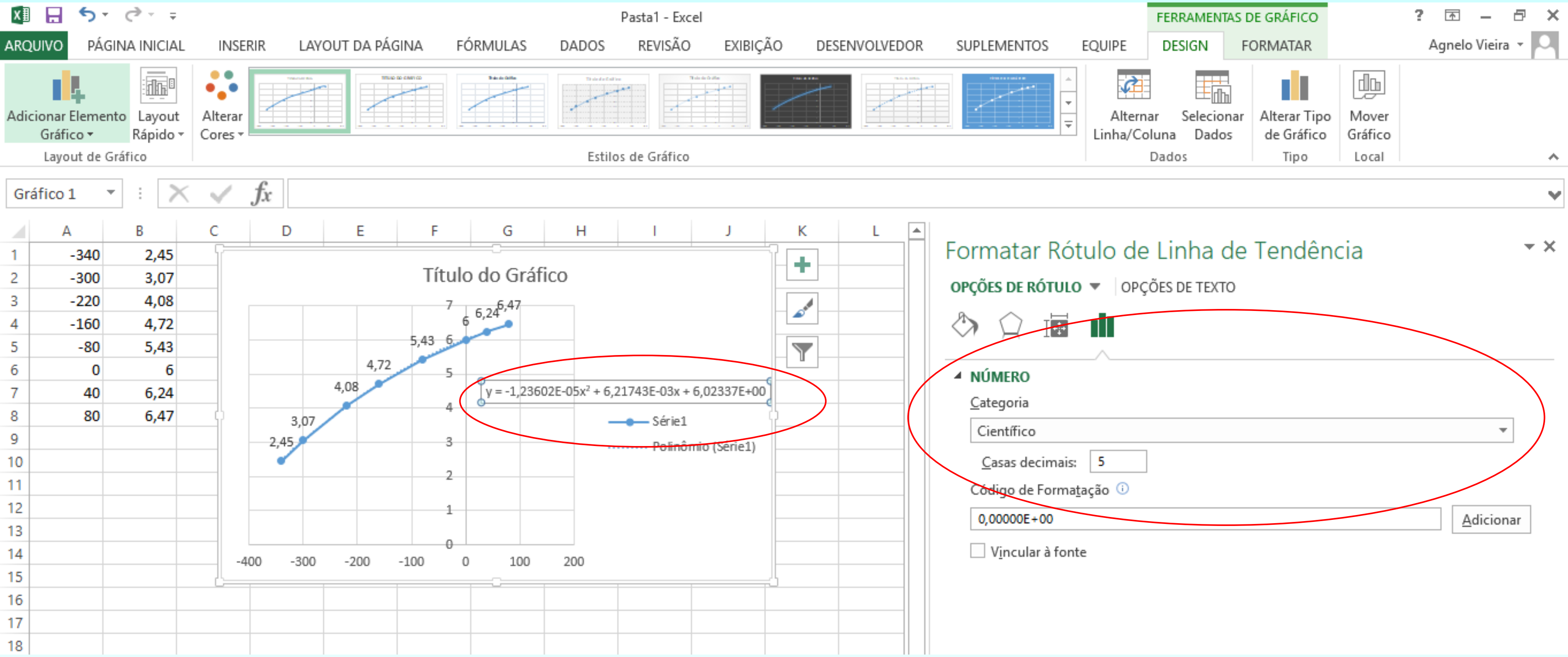


Observed and Predicted Values

$$\alpha = -1E\text{-}05T^2 + 0.0062T + 6.0234$$

T(°F)	α (μin/in/°F) Given	α (μin/in/°F) Predicted
-340	2.45	2.76
-300	3.07	3.26
-220	4.08	4.18
-160	4.72	4.78
-80	5.43	5.46
0	6.00	6.02
40	6.24	6.26
80	6.47	6.46

Regressing Data in Excel (scientific format)



Observed and Predicted Values

$$\alpha = -1.2360E\text{-}05T^2 + 6.2714E\text{-}03T + 6.0234$$

$$\alpha = -1E\text{-}05T^2 + 0.0062T + 6.0234$$

T(°F)	α (μin/in/°F) Given	α (μin/in/°F) Predicted	α (μin/in/°F) Predicted
-340	2.45	2.46	2.76
-300	3.07	3.03	3.26
-220	4.08	4.05	4.18
-160	4.72	4.70	4.78
-80	5.43	5.44	5.46
0	6.00	6.02	6.02
40	6.24	6.25	6.26
80	6.47	6.45	6.46

Erro de truncamento

Causado pela aproximação do método numérico utilizado em relação à solução exata

Example of Truncation Error

Taking only a few terms of a Maclaurin series to approximate e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$

If only 3 terms are used,

$$Truncation\ Error = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$$

solução exata: n° infinito de termos
aproximação: considerar um número finitos de termos

Another Example of Truncation Error

Using a finite Δx to approximate $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

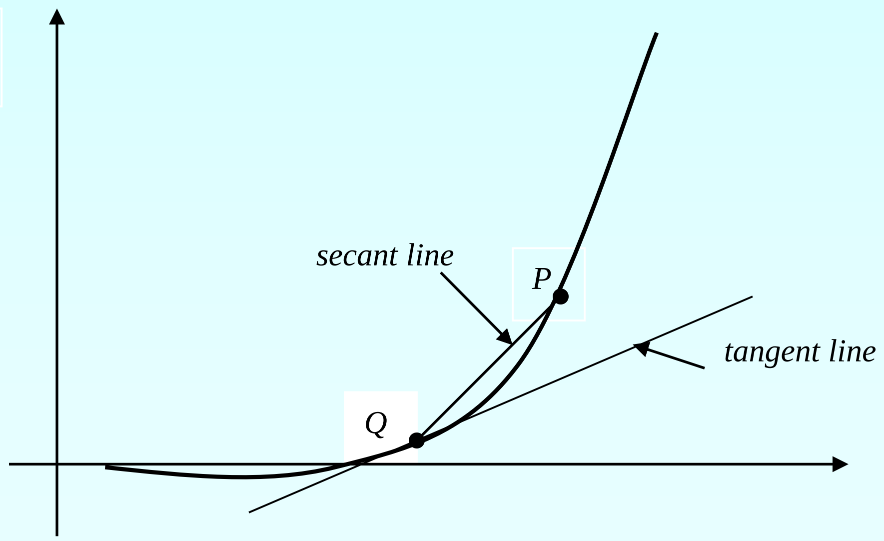


Figure 1. Approximate derivative using finite Δx

Another Example of Truncation Error

Using a finite Δx to approximate $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

método da diferença central

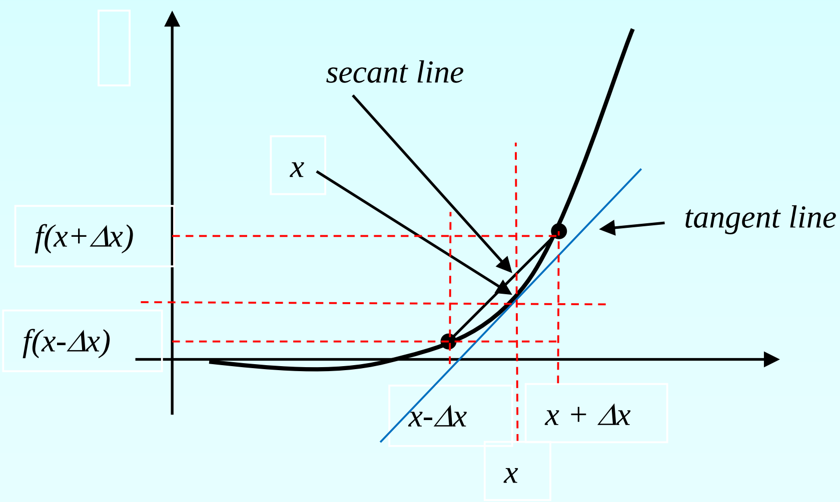


Figure 1. Approximate derivative using finite Δx

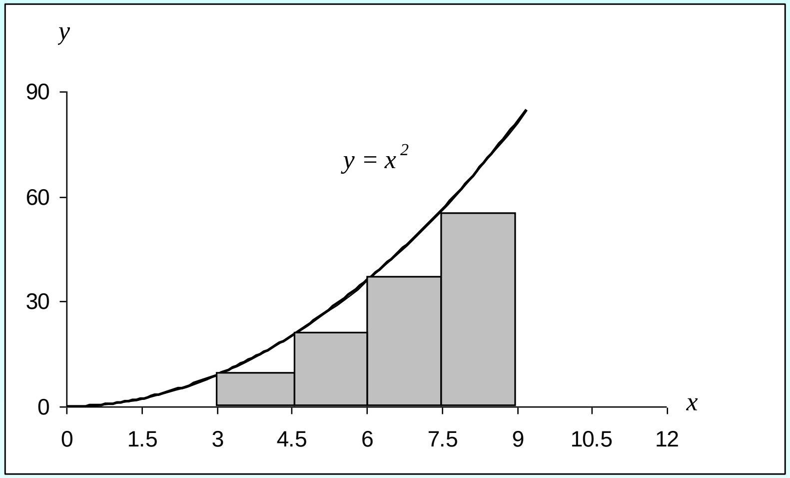
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

solução exata: limite quando Λx tende a zero

aproximação: Λx finito

Another Example of Truncation Error

Using finite rectangles to approximate an integral.



solução exata: n° infinito de retângulos de largura infinitesimal
aproximação: n° finito de retângulos de largura finita

Propagação de Erros

Toda operação numérica contém um erro associado devido à limitação do armazenamento do número no computador.

Ao realizar uma sequência de operações, haverá uma propagação de erros.

EA - Erro absoluto (erro verdadeiro)

ER - Erro relativo (erro verdadeiro relativo)

$\delta = 10^{-t+1}$ (truncamento)

$\delta = 0.5 \cdot 10^{-t+1}$ (arredondamento)

Soma e Subtração

$$EA_{(x \pm y)} = | EA_x \pm EA_y |$$

Multiplicação

$$EA_{(xy)} = | \bar{x} EA_y + \bar{y} EA_x |$$

Divisão

$$EA_{(x/y)} = \left| \frac{EA_x}{\bar{y}} - \frac{\bar{x} EA_y}{\bar{y}^2} \right|$$

Soma e Subtração

$$ER_{(x \pm y)} = \left| \frac{\bar{x}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_x \pm \frac{\bar{y}}{\bar{x} \pm \bar{y}} ER_y \right| + \delta$$

Multiplicação

$$ER_{(xy)} = | ER_x + ER_y | + \delta$$

Divisão

$$ER_{(x/y)} = | ER_x - ER_y | + \delta$$

Sequência de execução de operações

O resultado numérico é determinado pela sequência em que as operações são realizadas

Implemente no VBA estrutura de repetição que realiza as operações abaixo. Realize declaração de variável Single e Double. Verifique o que ocorre quando "i" é maior ou igual a 39

teste1 = $(1 + 1.10^{1}) - (1.10^{1}) = 1$
teste2 = $(1 + 1.10^{2}) - (1.10^{2}) = 1$
...
teste15 = $(1 + 1.10^{15}) - (1.10^{15}) = 1$
teste16 = $(1 + 1.10^{16}) - (1.10^{16}) = 0$

teste1 = $(1) + (1.10^{1} - 1.10^{1}) = 1$
teste2 = $(1) + (1.10^{2} - 1.10^{2}) = 1$
...
teste100 = $(1) + (1.10^{100} - 1.10^{100}) = 1$