



Métodos Numéricos

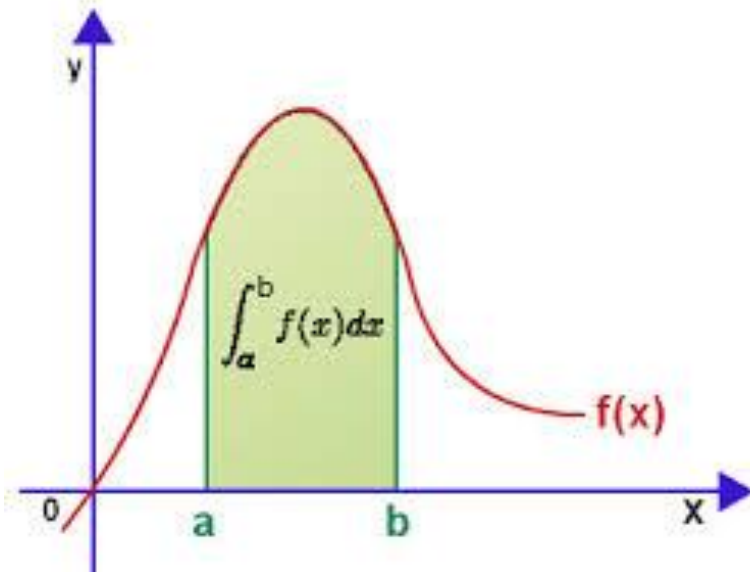
Integração Numérica – Regra dos Trapézio

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Integração Numérica

Integração Definida

a integral definida da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ corresponde à área sob a curva definida pela função $f(x)$ e o eixo X , entre os valores de $x=a$ e $x=b$



Integração Numérica

Integração Definida

- ▶ Há duas situações em que é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.
- ▶ A **primeira situação** decorre do fato de que, a fim de avaliar $\int_a^b f(x)dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos conhecer uma antiderivada de f .

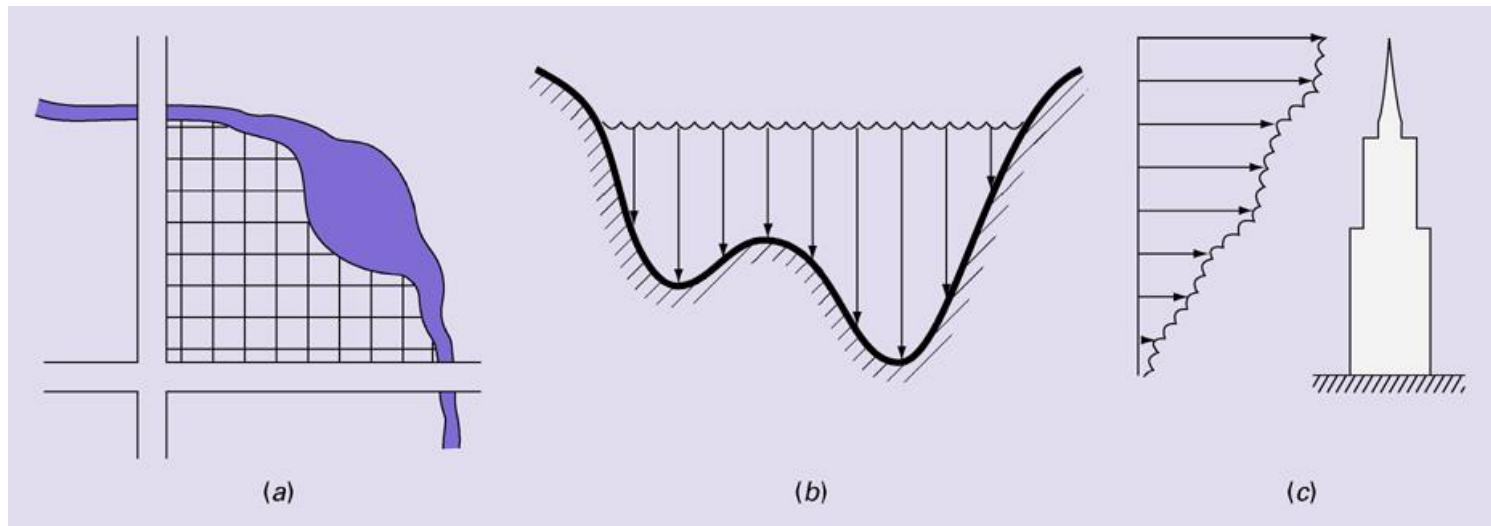
No entanto, às vezes, é difícil, ou mesmo impossível, encontrar uma antiderivada.

- ▶ A **segunda situação** ocorre quando a função é determinada a partir de um experimento científico e/ou através de leituras de instrumentos ou dados coletados.
- ▶ **Em ambos os casos, podemos determinar valores aproximados de integrais definidas através de método numérico.**

Integração Numérica

Integração Numérica – Aplicações

- ▶ Exemplos de como a integração numérica é usado em aplicações científicas e de engenharia.
 - (a) Um topógrafo quer conhecer a área de um campo delimitado por um córrego sinuoso e duas estradas.
 - (b) Um hidrólogo deseja calcular a área da seção transversal de um rio.
 - (c) Um engenheiro estrutural necessita determinar a força resultante devido a um vento não uniforme soprando contra a lateral de um arranha-céu.



Integração Numérica

Integral Numérica – Teorema de Rieman

- ▶ A integração é um processo de soma. Assim, na prática todas as aproximações numéricas podem ser representadas pela soma

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_t$$

onde:

- $(x_i, f(x_i))$ são valores conhecidos da função
- n é o número de subintervalos em que o intervalo $[a,b]$ foi dividido
- w_i são os pesos
- E_t é o erro de truncamento (aproximação)
- ▶ A fórmula é válida para qualquer função contínua e limitada no intervalo fechado de integração $[a,b]$
- ▶ Existem diversas regras (formas analíticas) para determinar integrais de funções e que podem ser utilizadas na prática.

Integração Numérica

Integração Numérica – Terminologia

- ▶ Uma **partição** (de tamanho n) de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto de pontos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

- ▶ Uma **partição regular** possui todos pontos igualmente espaçados.
- ▶ Cada par de pontos consecutivos forma um **subintervalo** $[x_i, x_{i+1}]$.

Integração Numérica

Integração Numérica

- ▶ A fórmula de integração numérica mais comum é baseado em pontos igualmente espaçados.
- ▶ Dividindo $[a,b] = [x_0, x_n]$ em n intervalos ($n \geq 1$)

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Integração Numérica

Integração Numérica – Técnicas Clássicas

- ▶ Quando técnicas de integração analítica não podem ser usadas para resolver alguma integral, então dentro de cada intervalo de integração aproximamos $f(x)$ por um polinômio de ordem (grau) m .

$$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

- ▶ A ordem m dos polinômios pode ser a mesma para todos intervalos ou pode ter um valor específico para cada intervalo
- ▶ Suponha a partição do intervalo $[a,b]$ em n subintervalos

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b.$$

Então a integral $\int_a^b f(x)dx$ pode ser representada nas forma abaixo

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

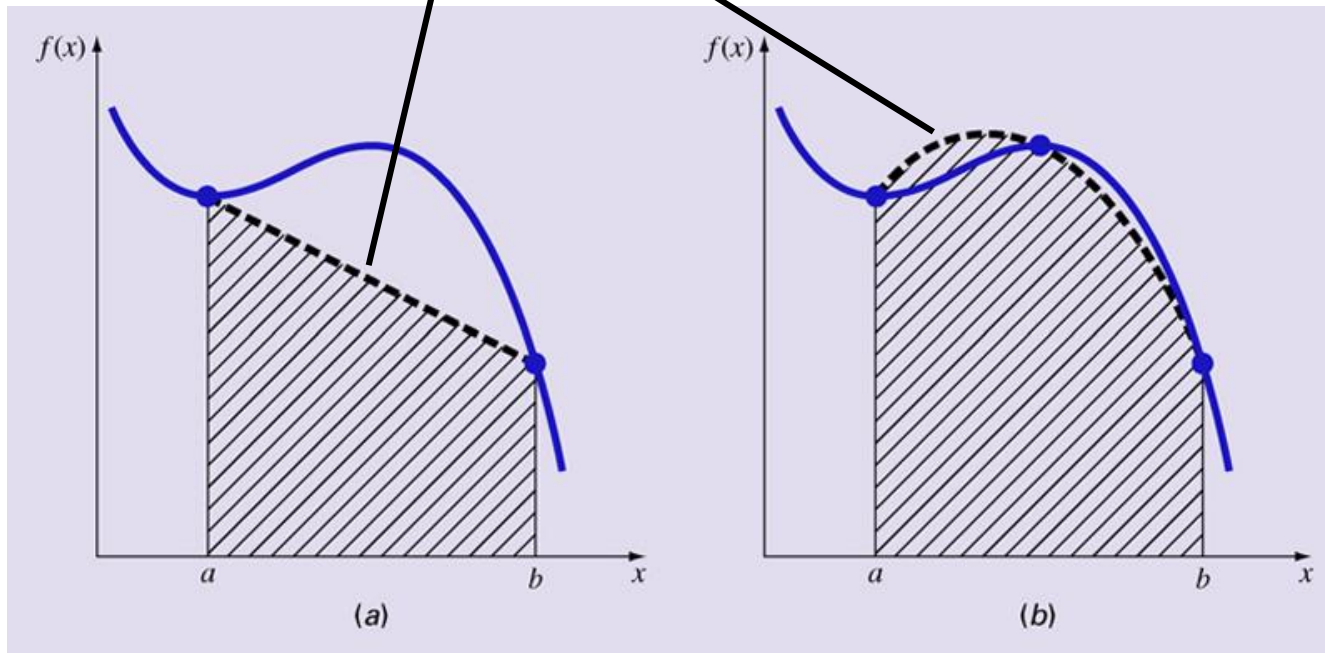
$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_{m_1}(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_{m_2}(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} p_{m_n}(x)dx$$

Integração Numérica

Integração Numérica – Técnicas Clássicas

- As técnicas mais comuns de integração numérica são:

m	Polinômio	Fórmula	Erro
1	linear	Trapezoidal	$O(h^2)$
2	quadrático	Simpson1/3	$O(h^4)$
3	cúbico	Simpson3/8	$O(h^4)$



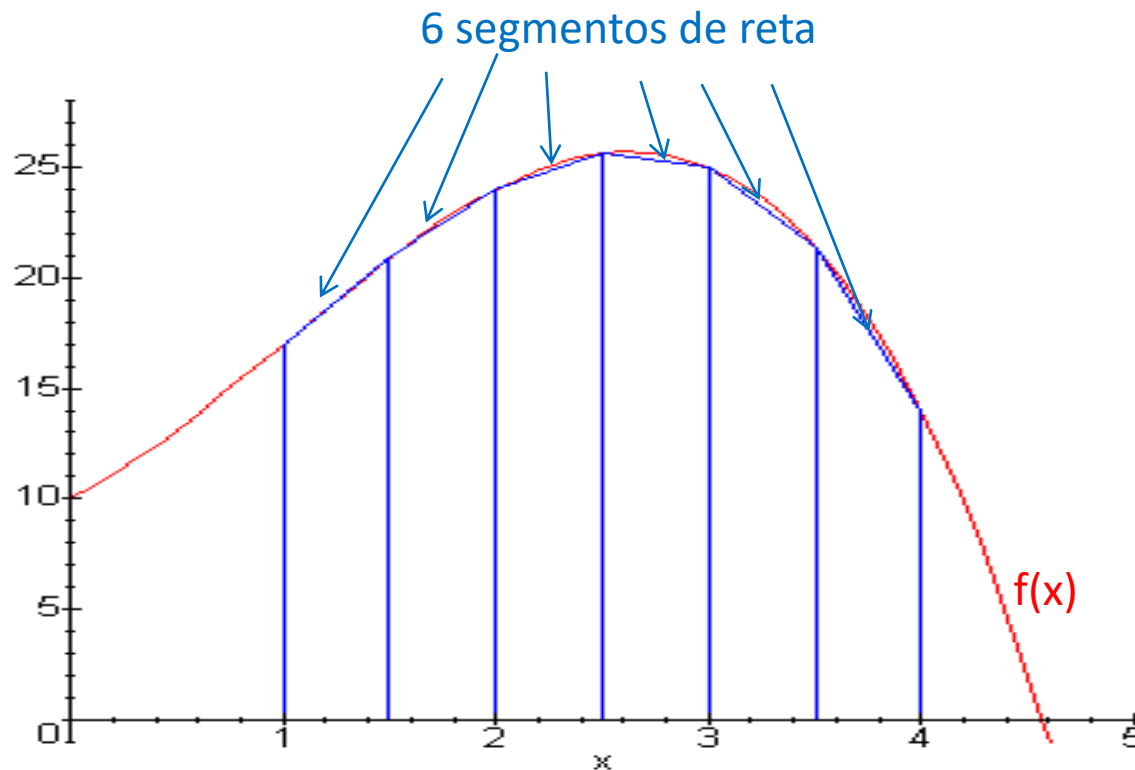
Integração Numérica

Regra dos Trapézios

Integração Numérica

Regra dos Trapézios

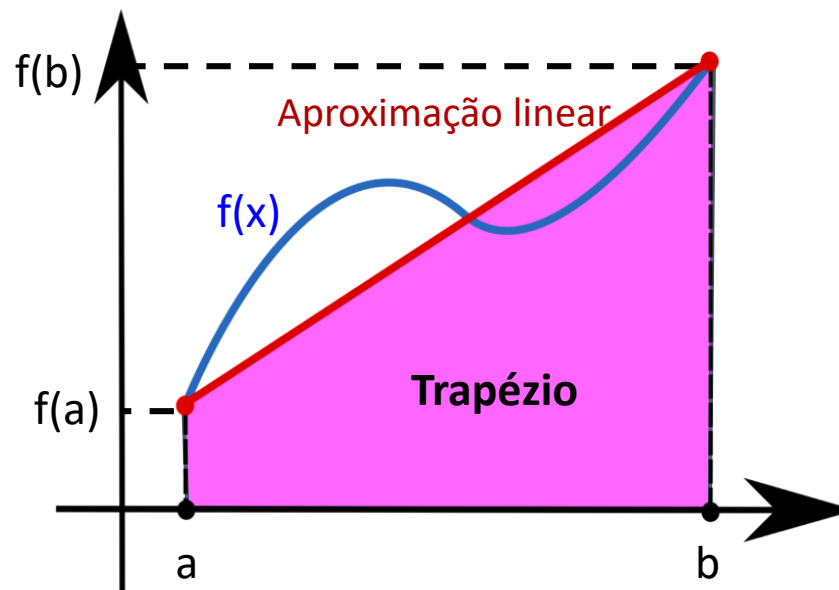
- ▶ Exemplo de aproximação do gráfico da função $f(x)$ por 6 segmentos de reta.



Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Definições

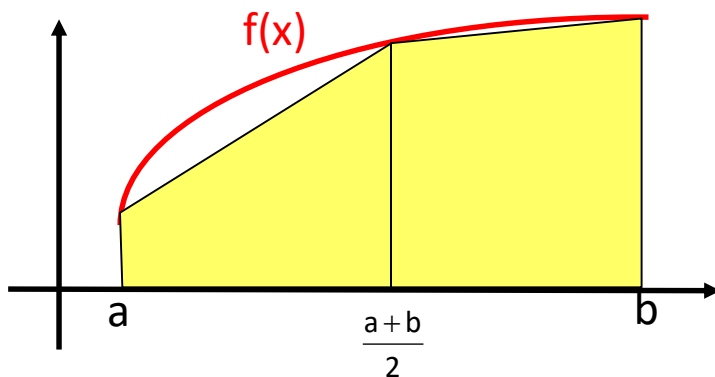
- ▶ Numericamente a regra dos trapézios é obtida aproximando-se f por um polinômio interpolador de 1º grau.
- ▶ Em seguida calcula-se a área do trapézio cuja base está sobre o eixo dos x .



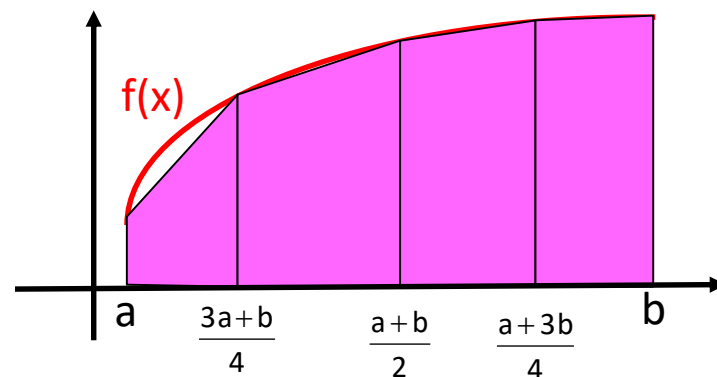
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Dedução da Fórmula

- ▶ Gera-se vários trapézios e soma-se as áreas dos mesmos.
- ▶ Quanto mais trapézios, mais próxima a área total está da área real.
- ▶ Em geral, qualquer conjunto de pontos que particiona o intervalo $[a, b]$ pode ser utilizado como uma aproximação trapezoidal.
- ▶ Sugere-se usar **partição regular** (pontos igualmente espaçados) pois permitirá um processo de cálculo mais fácil.



Área aproximada usando 2 trapézoides.

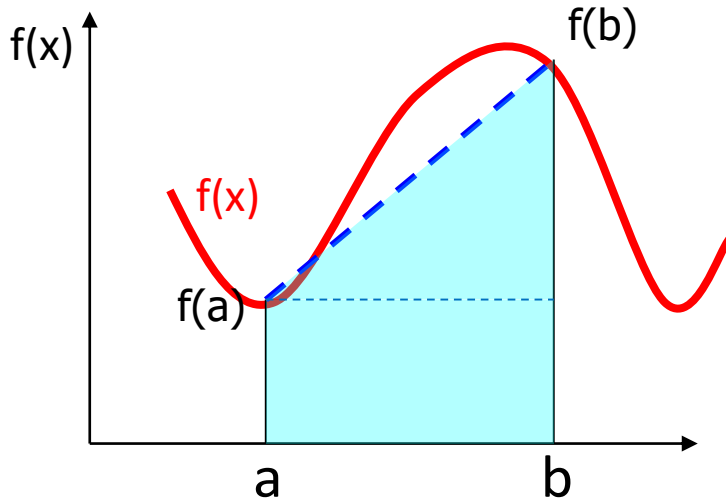


Área aproximada usando 4 trapézoides.

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Para $n=1$ Subintervalos

► $n = 1 \rightarrow 1$ intervalo



área do retângulo
 $(b - a)f(a)$

área do triângulo
$$\frac{(b - a)(f(b) - f(a))}{2}$$

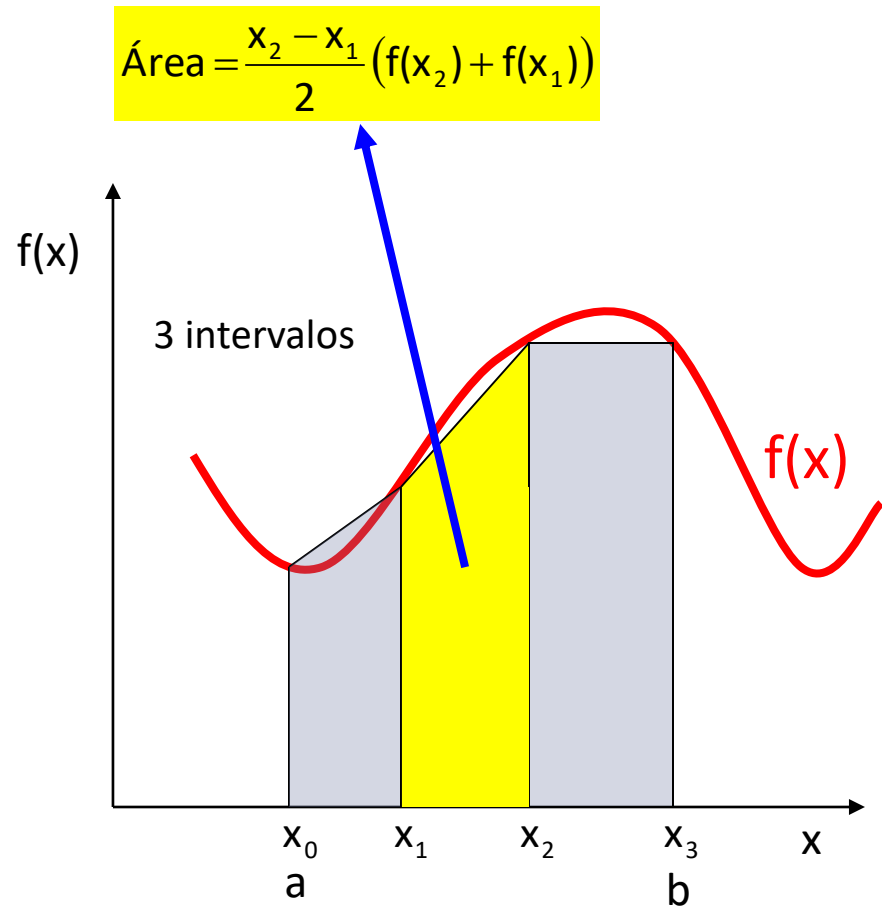
área do trapézio
$$\frac{(b - a)(f(b) + f(a))}{2}$$

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Para n Subintervalos

- ▶ $n > 1 \rightarrow n$ intervalos

O intervalo $[a, b]$ é
particionado em n segmentos
 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$
então $\int_a^b f(x)dx$ é igual a soma
das áreas dos n trapézios.



Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Para n Subintervalos

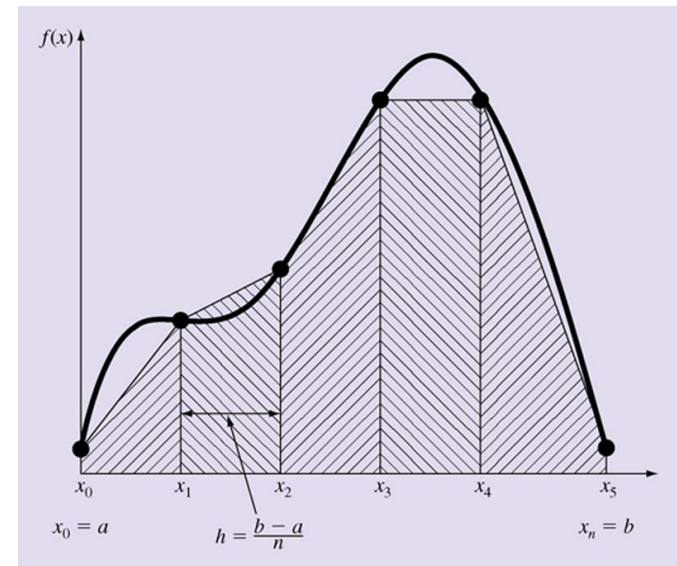
- ▶ n intervalos – intervalos igualmente espaçados

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right) (f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right)$$

$$x_i = a + h * i$$

$$\Delta x = h = \frac{(b-a)}{n}$$



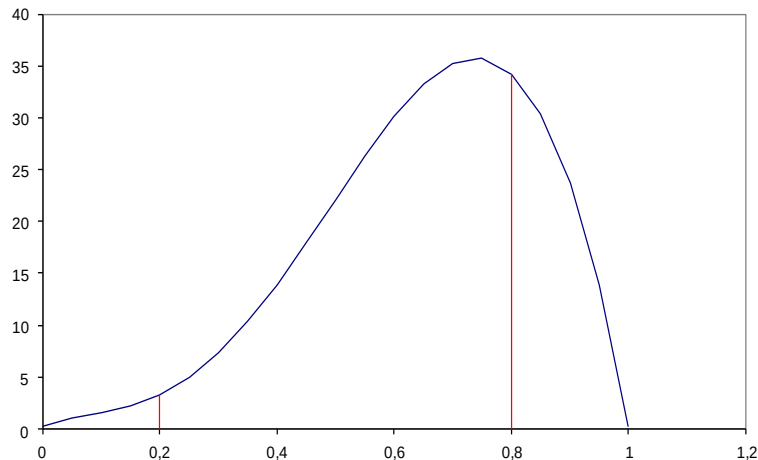
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

Integre $f(x) = 0,3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5$ de $a=0,2$ até $b=0,8$

valor exato

$$\int_{0,2}^{0,8} (0,3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5) dx = 12,8237$$



continua ...

Integração Numérica

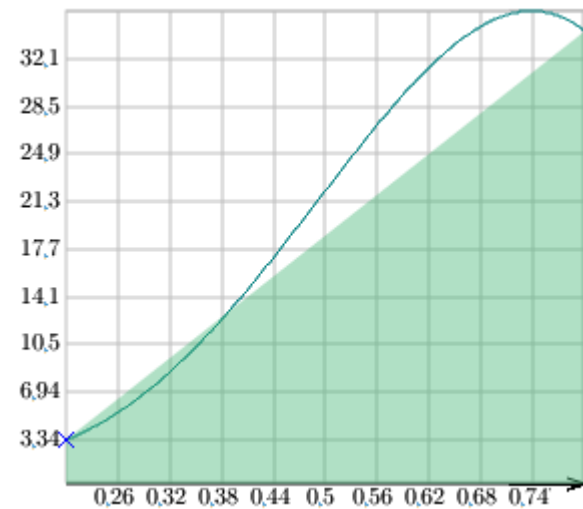
Regra dos Trapézios – Exemplo 1

Integre $f(x) = 0,3 + 20x - 140x^2 + 730x^3 - 810x^4 + 200x^5$ de $a=0,2$ até $b=0,8$

i) Para $n=1$ subintervalo

$$I = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} = (0,8-0,2) \frac{34,22+3,81}{2} = 11,26$$

$$\text{Erro} = (12,8237 - 11,26) = 1,5637 \text{ (12,19\%)}$$

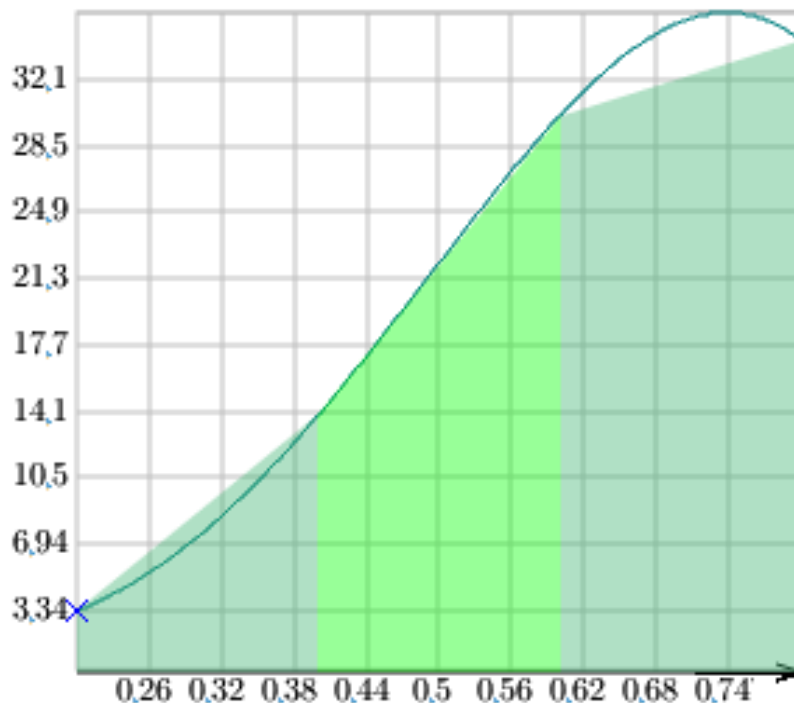


continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

ii) Para $n=3$



$$\begin{aligned} I &= \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right] = \\ &= \frac{(0.8-0.2)}{(2)(3)} [f(0.2) + 2(f(0.4) + f(0.6)) + f(0.8)] \\ &= \frac{0.6}{6} [3.31 + 2(13.93 + 30.16) + 34.22] = 12.57 \end{aligned}$$

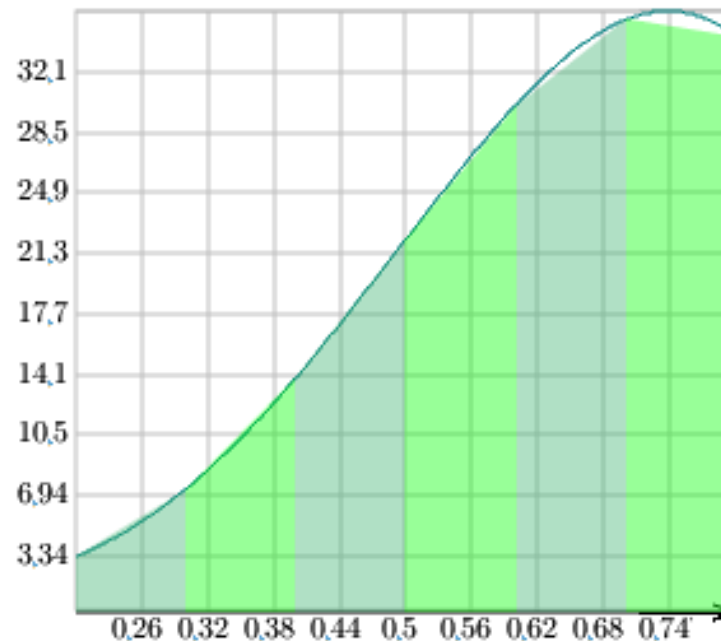
$$\text{Erro} = (12.8237 - 12.57) = 0.2535 \text{ (1,98\%)}$$

continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 1

iii) Para n = 6



$$\begin{aligned} I &= \frac{(0.8 - 0.2)}{(2)(6)} [f(0.2) + 2[f(0.3) + f(0.4) + f(0.5) + f(0.6) + f(0.7)] + f(0.8)] = \\ &= \frac{0.6}{12} [3.31 + 2(7.34 + 13.93 + 22.18 + 30.16 + 35.22) + 34.22] = 12.76 \end{aligned}$$

$$\text{Erro} = (12.8237 - 12.76) = 0.0637 \text{ (0.4967\%)}$$

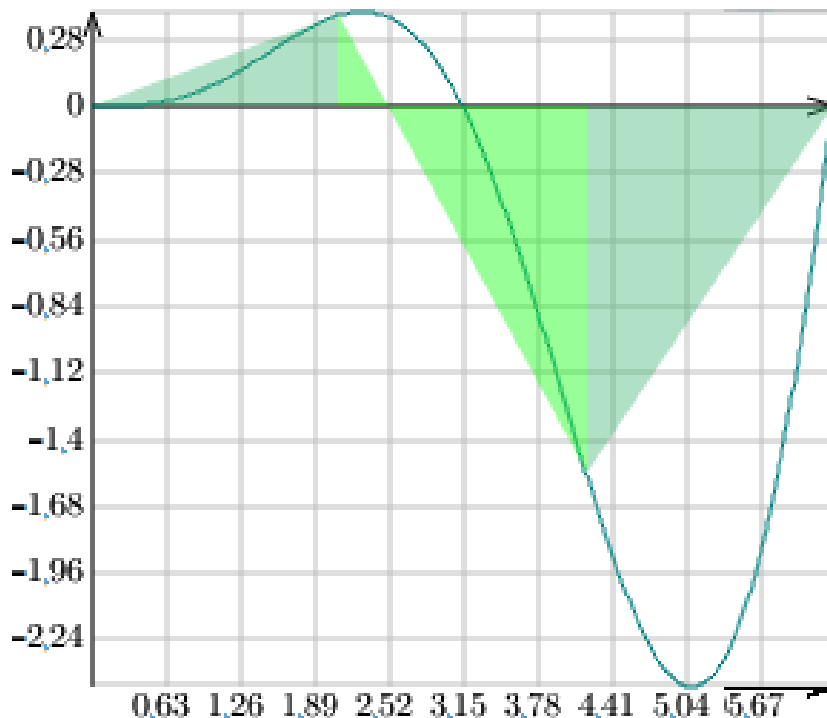
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 2

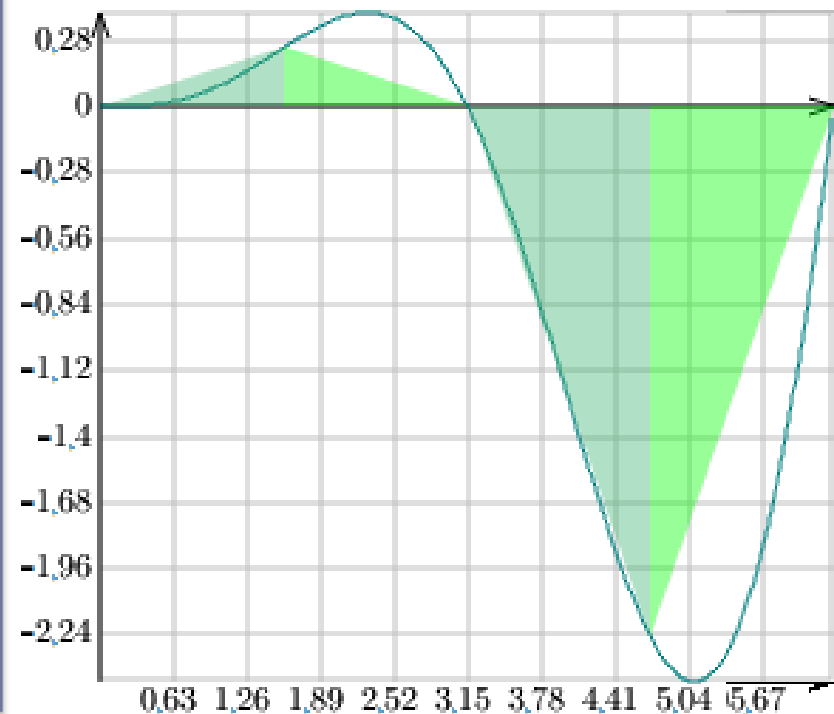
- ▶ Estimar a integral $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx$

com 3 e 4 partições.

3 subintervalos



4 subintervalos



<http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html>

continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 2

... continuação

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx = -4 \quad (\text{valor exato})$$

<u>$n = 3$</u> $\Delta x = \frac{2\pi - 0}{3} = \frac{2\pi}{3}$ $x_0 = a = 0$ $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{2\pi}{3}$ $x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{4\pi}{3}$ $x_3 = b = 2\pi$	$f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} \sin x$ $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx \approx \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \left(f(0) + 2f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f(2\pi) \right)$ $\approx \frac{\pi}{3} \left(0 + 2 \frac{4}{9} \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \frac{16}{9} \sin \frac{4\pi}{3} + 0 \right)$ $\approx \frac{\pi}{3} \left(\frac{8}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{32}{9} \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \frac{-24\sqrt{3}}{18} = \frac{-8\sqrt{3}\pi}{9} = -2,418$
<u>$n = 4$</u> $\Delta x = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}$ $x_0 = a = 0$ $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{2}$ $x_2 = x_1 + \Delta x = \pi$ $x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{3\pi}{2}$ $x_4 = b = 2\pi$	$f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} \sin x$ $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx \approx \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \left(f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f(\pi) + 2f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f(2\pi) \right)$ $\approx \frac{\pi}{4} \left(0 + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin \pi + \frac{18}{4} \sin \frac{3\pi}{2} + 0 \right)$ $\approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (-4) = -\pi$

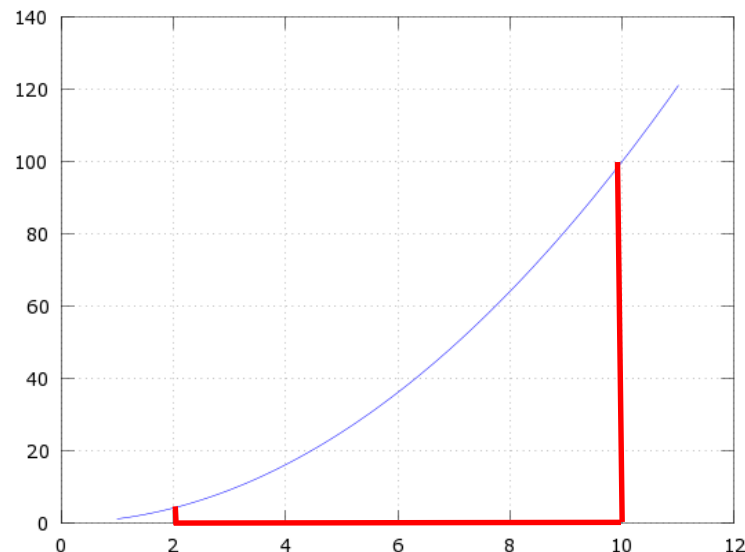
Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Exemplo 3

- ▶ Calcule a integral definida.

$$\int_2^{10} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_2^{10} = \frac{1}{3} (10^3 - 2^3) = \frac{1}{3} (1000 - 8) = \frac{992}{3} \approx 330,66 \text{ (Valor exato)}$$

- ▶ Implemente um código em VBA que aplica a regra do trapézio para calcular a integral aproximada da função especificada.



Trapézios	Integral
1	416
2	352
4	336
10	331,52
50	330,7
100	330,675
1000	330,666
10000	330,66666

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Estimativa do Erro

Hipótese: $f''(x)$ é contínua em $[a,b]$, os intervalos são iguais (comprimento igual a h)

Teorema: Se o método dos Trapézios é usado para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ então

$$\text{Erro} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \text{ onde } \xi \in [a,b]$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \text{ou}$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Erro – Exemplo

- ▶ Quantos intervalos igualmente espaçados são necessários para calcular, com uma precisão de 5 casas decimais, a integral $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$?

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx, \text{ achar } h \text{ talque } |\text{Erro}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$b = \pi; a = 0; f'(x) = \cos(x); f''(x) = -\sin(x)$$

$$|f''(x)| \leq 1 \Rightarrow |\text{Erro}| \leq \frac{\pi}{12} h^2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h^2 \leq \frac{6}{\pi} \times 10^{-5} \Rightarrow h \leq 0,00437$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(b-a)}{h} = \frac{\pi}{0,00437} = 719 \text{ intervalos}$$

continua ...

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Erro – Exemplo

... continuação

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = 2 \quad (\text{Valor exato})$$

Número dos Trapézios	Integral
1	0
700	1,999800000
718	1,999996600
719	1,999996818
1000	1,999996835

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (h = 0,00436939172961028) \quad |\text{Erro}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$