



Métodos Numéricos

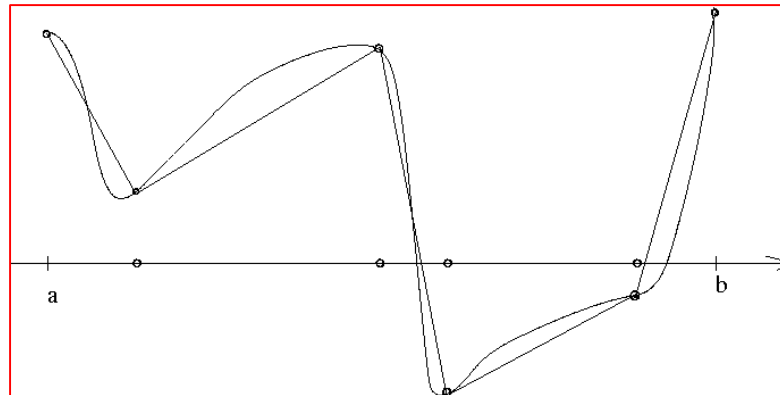
Integração Numérica – Regra de Simpson

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Integração Numérica

Revisão

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p_{m_1}(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} p_{m_2}(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} p_{m_n}(x)dx$$



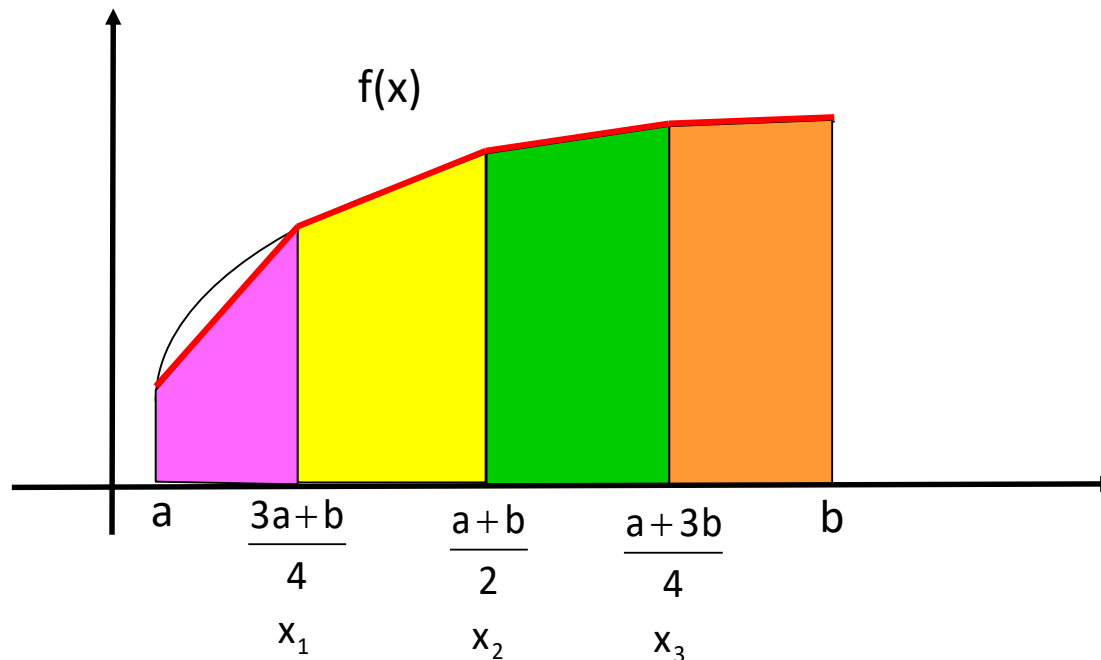
- As técnicas mais comuns de integração numérica são:

m	Polinômio	Fórmula	Erro
1	linear	Trapezoidal	$O(h^2)$
2	quadrático	Simpson1/3	$O(h^4)$
3	cúbico	Simpson3/8	$O(h^4)$

Integração Numérica

Regra dos Trapézios – Revisão

Uma maneira de ver o método trapezoidal para a integração é que a curva que está sendo usada para estimar a integral é uma linha poligonal (um grupo de segmentos de linhas conectadas) e então calcula-se a área abaixo de cada segmento de reta.



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{4} \right) (f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(b))$$

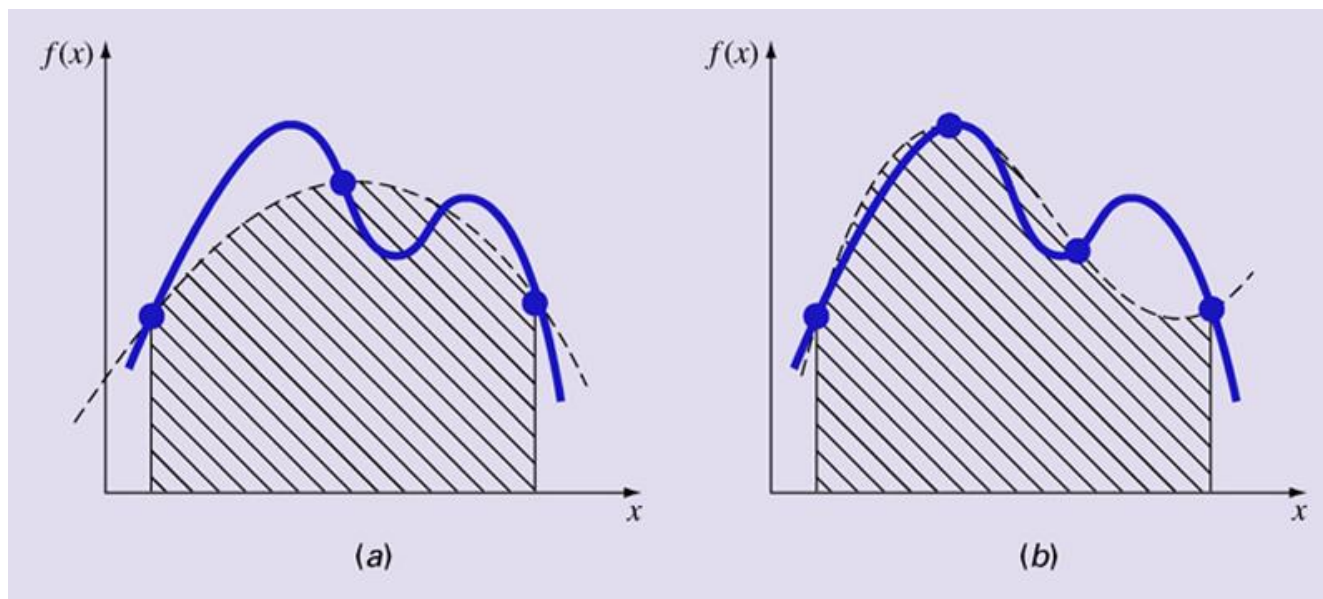
Integração Numérica

Regra de Simpson (1/3)

Integração Numérica

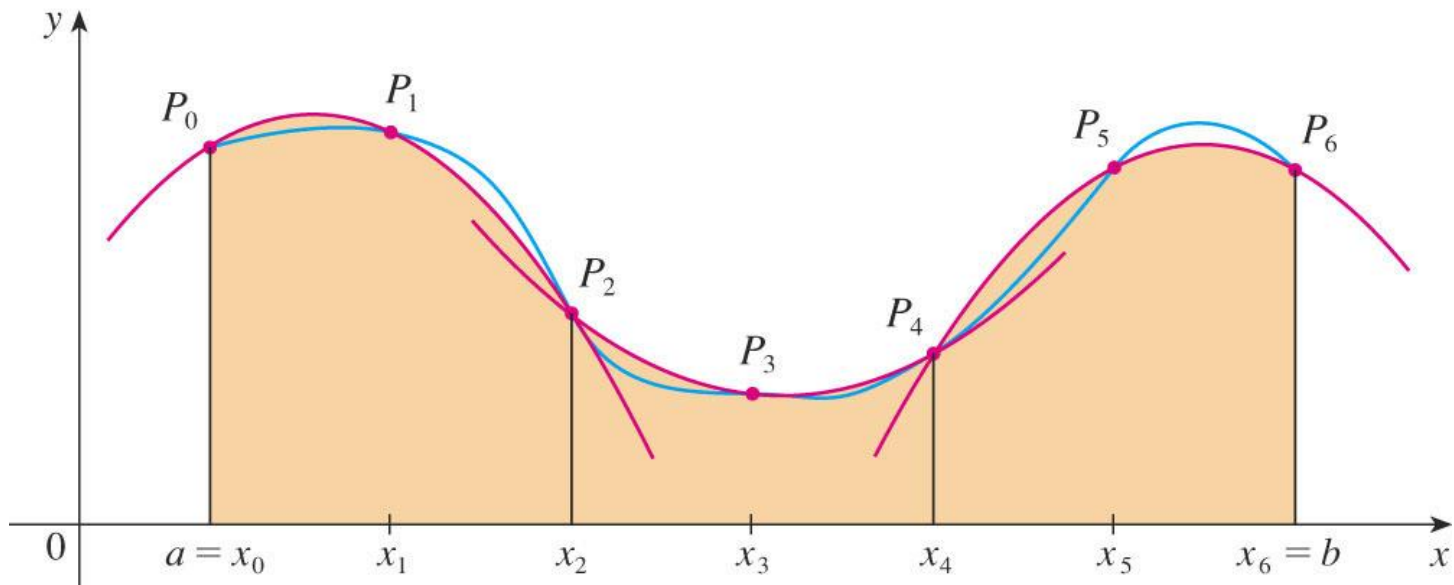
Regra de Simpson

- (a) representação gráfica regra de Simpson 1/3: Consiste em tomar a área sob uma parábola que liga três pontos.
- (b) representação gráfica da regra de Simpson 3/8: Consiste em tomar a área sob uma equação cúbica que conecta quatro pontos.



Integração Numérica

Regra de Simpson



Integração Numérica

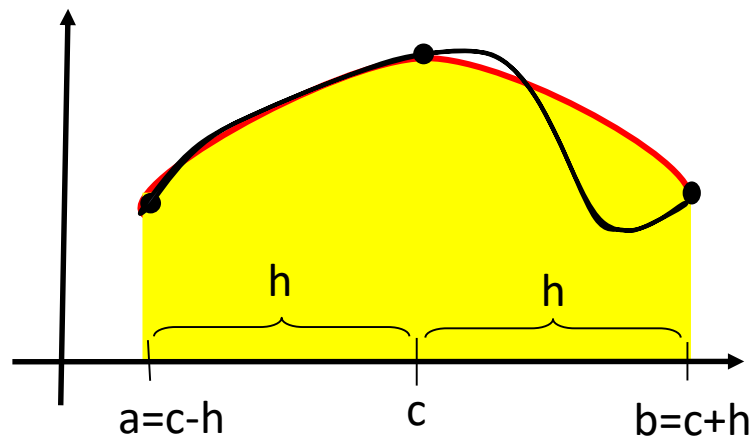
Regra de Simpson

- ▶ O método de Simpson usa um polinômio de segundo grau (ou seja, uma função quadrática) para estimar a curva para a qual você está tentando encontrar a integral. Esta é uma curva da forma

$$p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

- ▶ Os pontos são assumidos uniformemente espaçados.
- ▶ Para obter a estimativa para a integral escreve-se o polinômio de grau 2 usando 3 pontos consecutivos, em seguida integra-se.

x	y
$a=c-h$	$y_0=f(a)$
c	$y_1=f(a+h)$
$b=c+h$	$y_2=f(b)$



Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

Seja o caso especial com $c = 0$.

Será integrado o polinômio de 2º grau

$$p_2(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0.$$

x	y
-h	$y_0 = f(-h)$
0	$y_1 = f(0)$
h	$y_2 = f(h)$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (c_2 t^2 + c_1 t + c_0) dt &= \\ &= \frac{c_2}{3} t^3 + \frac{c_1}{2} t^2 + c_0 t \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{c_2}{3} h^3 + \frac{c_1}{2} h^2 + c_0 h - \left(-\frac{c_2}{3} h^3 + \frac{c_1}{2} h^2 - c_0 h \right) \\ &= \frac{2}{3} c_2 h^3 + 2c_0 h \end{aligned}$$

$$y_0 = c_2 h^2 - c_1 h + c_0$$

$$y_1 = c_0$$

$$y_2 = c_2 h^2 + c_1 h + c_0$$

$$y_0 + y_2 = 2c_2 h^2 + 2c_0$$

$$c_2 = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

Substituindo c_0 e c_2

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2} \right) h^3 + 2y_1 h$$

$$= \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

$$= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right) \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

- Um intervalo fechado $[a,b]$ – 2 subintervalos, c assume um valor qualquer diferente de zero

x	y
$a=c-h$	$y_0=f(a)$
c	$y_1=f(a+h)$
$b=c+h$	$y_2=f(b)$

% código Matlab para deduzir a equação de Simpson

```
clc
clear
syms c0 c1 c2 y0 y1 y2 h a b
```

% caso 1) $c = 0$

```
c0 = y1
c2 = (y0 - 2*y1 + y2) / (2* h^2)
caso1 = simplify( (2/3)*c2*h^3 + 2*c0*h)
```

% caso 2) c assume um valor qualquer

```
A = [1 a a^2; 1 (a+(b-a)/2) (a+(b-a)/2)^2; 1 b b^2]
B = [y0; y1; y2]
C = A\B
C0 = simplify(C(1))
C1 = simplify(C(2))
C2 = simplify(C(3))
caso2 = simplify( ((C2*b^3)/3 + (C1*b^2)/2 + C0*b) ...
- ((C2*a^3)/3 + (C1*a^2)/2 + C0*a) )
```

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

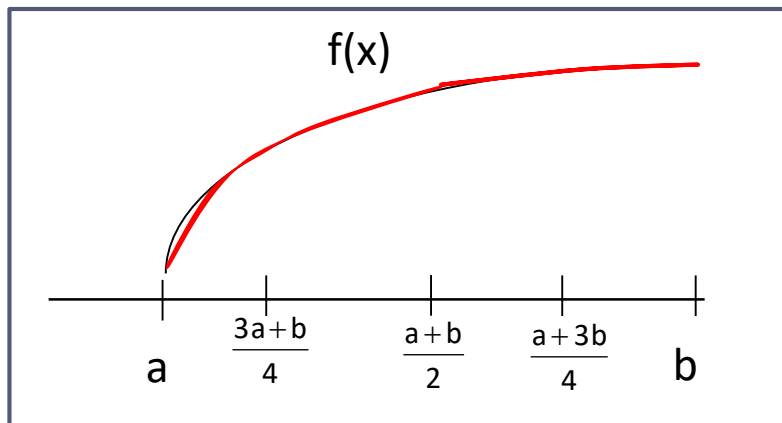
3 pontos para interpolar -> 2 subintervalos

Integração Numérica

Regra de Simpson – Dedução 1 da Equação

- Um intervalo fechado $[a,b]$ – 4 subintervalos

$$h = \frac{b-a}{4}$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{4} \right) (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{4} \right) (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{4} \right) (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{4} \right) \left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right)$$

4 subintervalos $\rightarrow 4/2=2$ parábolas

Integração Numérica

Regra de Simpson – Equação Geral

- ▶ Um intervalo fechado $[a,b]$ – n subintervalos
- ▶ A fórmula geral da Regra de Simpson para calcular integrais é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(y_0 + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + y_{2n} \right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

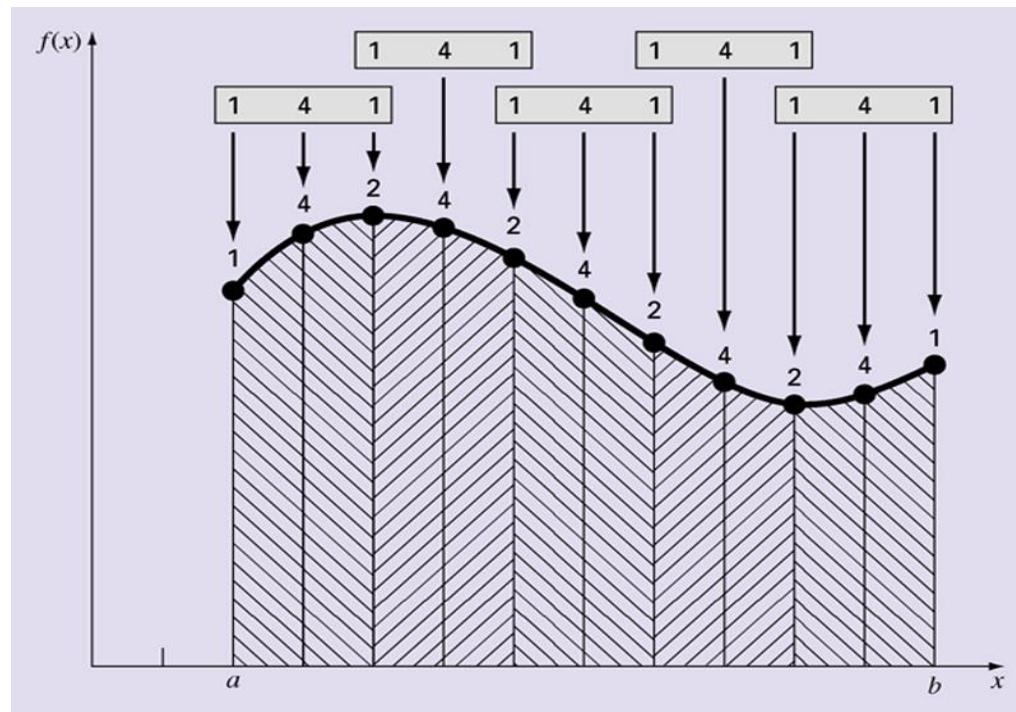
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + f(b))$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Equação Geral

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + f(b))$$

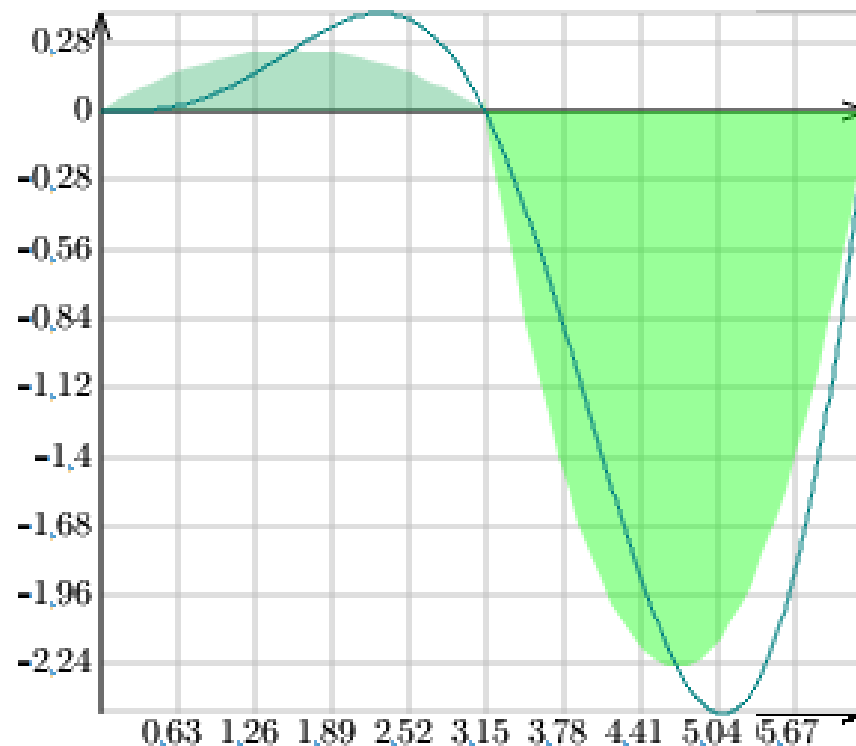
- Os pesos relativos da integral são representados acima dos valores da função. Note-se que o método só pode ser utilizado se o número de segmentos/subintervalos é par.



Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 1

- ▶ Estimar com 4 partições a integral $\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx$ em $[a, b] = [0, 2\pi]$



<http://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html>

continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 1

... continuação

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx = -4 \quad (\text{valor exato})$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{n} \right) \left(f(a) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi-0}{4} \right) (f(0) + 4f(0+h) + 2f(0+2h) + 4f(0+3h) + f(2\pi))$$

$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \pi$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x_4 = b = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx \approx \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} (f(0) + 4f(\frac{\pi}{2}) + 2f(\pi) + 4f(\frac{3\pi}{2}) + f(2\pi))$$

$$= \frac{\pi}{6} (0 + \sin \frac{\pi}{2} + 2\sin \pi + 9\sin \frac{3\pi}{2} + 0)$$

$$= \frac{\pi}{6} (1 - 9) = \frac{\pi}{6} (-8) = \frac{-4\pi}{3} = -4,18879$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 2

- ▶ Calcule a integral definida.

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^2}{\pi^2} \sin x dx = \frac{2x \sin(x) + (2 - x^2) \cos(x)}{\pi^2} = -4$$

- ▶ Utilize a Regra de Simpson e calcule a integral aproximadamente.

Simpson	Integral
2	-
4	-4,18879
10	-4,18879
20	-4,00021
50	-4,00000
100	-4,00000
1000	-4,00000

(Intervalos)

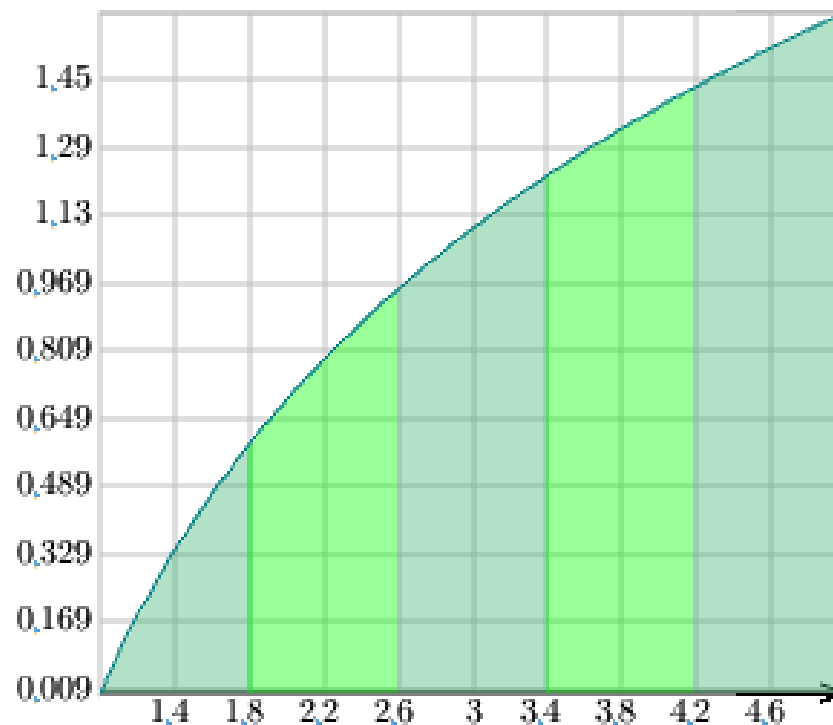
Trapézio	Integral
1	-
4	-3,14159
10	-3,86753
20	-3,86753
50	-3,99473
100	-3,99868
1000	-3,99998

(Intervalos)

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 3

- Método prático. Use 10 subintervalos para calcular $\int_1^5 \ln(x) dx$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Exemplo 3

... continuação

$$\int_1^5 \ln(x) dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{10} \right) \left(\ln(1) + 4 \sum_{k=0}^9 \ln(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^9 \ln(x_{2k}) + \ln(5) \right)$$

$$\begin{aligned} \int_1^5 \ln(x) dx \approx & \frac{1}{3} \left(\frac{5-1}{10} \right) \times (f(1) + \\ & + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \\ & + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \\ & + 4f(x_5) + 2f(x_6) + \\ & + 4f(x_7) + 2f(x_8) + \\ & + 4f(x_9) + f(5)) \end{aligned}$$

x	f(x)	k	kf(x)
1,00	0,0000	1	0,0000
1,40	0,3365	4	1,3459
1,80	0,5878	2	1,1756
2,20	0,7885	4	3,1538
2,60	0,9555	2	1,9110
3,00	1,0986	4	4,3944
3,40	1,2238	2	2,4476
3,80	1,3350	4	5,3400
4,20	1,4351	2	2,8702
4,60	1,5261	4	6,1042
5,00	1,6094	1	1,6094

$$\sum_{i=1}^{10} k_i f(x_i) = 30,3522$$

$$h = 0,4$$

$$\int_1^5 \ln(x) dx \approx \left(\frac{0,4}{3} \right) \times 30,3522 = 4,0470$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Estimativa do Erro

- De modo análogo à Regra do Trapézio, na Regra de Simpson realiza-se uma aproximação e comete-se um erro.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)] \} - \sum_{i=1}^{m/2} \frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90} = I_{SR} + \text{Erro}$$

$$I_{SR} = \frac{h}{3} \{ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m) \}$$

- Este erro é dado por:

$$\text{Erro} = -\frac{m}{2} \left(\frac{h^5 f^{(iv)}(c_i)}{90} \right) \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \rightarrow \quad |\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Estimativa do Erro

... continuação

- ▶ O erro é dado por:

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

ou

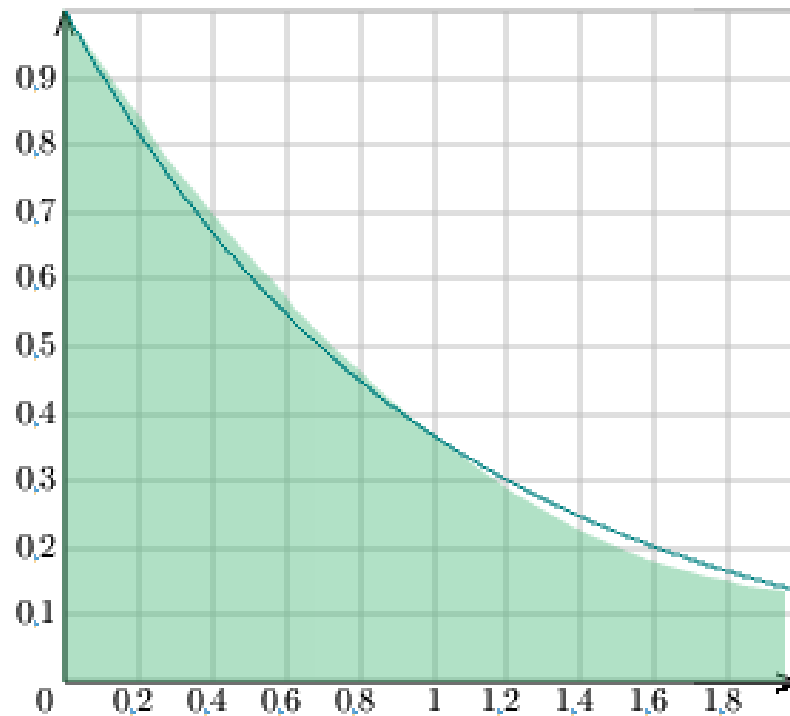
$$|\text{Erro}| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 1

- Integre $\int_0^2 e^{-x} dx$ pela Regra de Simpson usando dois subintervalos. Calcule o erro.

$$n=2 \quad h = \frac{b-a}{2} = 1 \quad x_0 = a = 0 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 1 \quad x_2 = b = 2$$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 1

... continuação

$$\int_0^2 e^{-x} dx$$

$$h = \frac{b-a}{2} = 1 \quad x_0 = a = 0 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 1 \quad x_2 = b = 2$$

$$\int_0^2 e^{-x} dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

$$= \frac{h}{3} [e^0 + 4e^{-1} + e^{-2}] = 0,868951016$$

$$|\text{Erro}| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

$$|\text{Erro}| = \frac{(2-0)^5}{180(2)^4} \max_{x \in [0,2]} |f^{(iv)}(x)|, \quad f^{(iv)}(x) = e^{-x}$$

$$f^{(iv)}(x) = e^{-x}, \quad \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)| = \max_{x \in [0,2]} |e^{-x}| = 1$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(2)^5}{(180)(2)^4} \times 1 = 0,011111...$$

$$\int_0^2 e^{-x} dx = 0,86466 \text{ (valor exato)}$$

$$\int_0^2 e^{-x} dx \approx 0,86895 \text{ (simpson-2 intervalos)}$$

$$\text{Erro} = 0,00429 \text{ (erro real)}$$

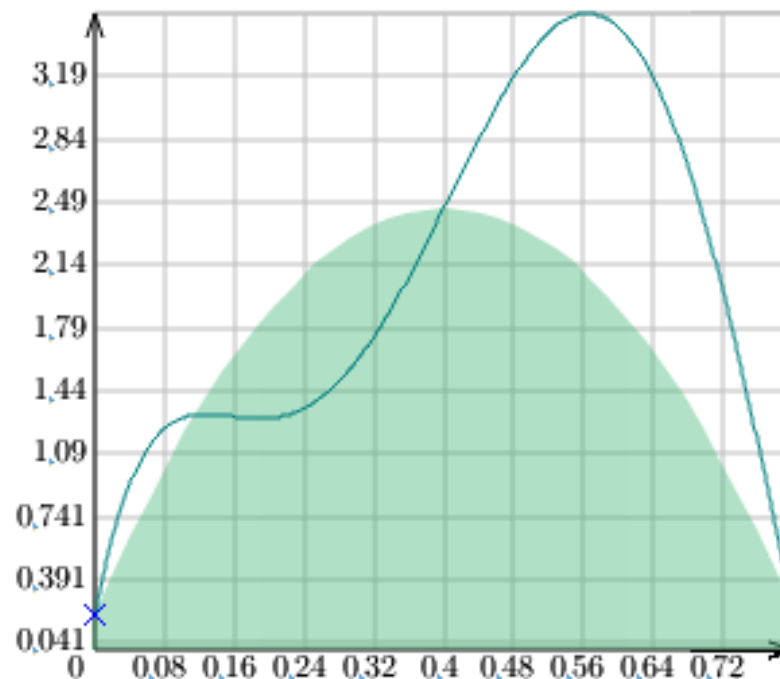
Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 2

- Integre $f(x)$, de $a=0$ até $b=0,8$ pela Regra de Simpson usando dois subintervalos.

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$n = 2 \quad h = \frac{b-a}{2} = 0,4, \quad x_0 = a = 0, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 0,4, \quad x_2 = b = 0,8$$



continua ...

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 2

... continuação

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$h = \frac{b-a}{2} = 0,4, \quad x_0 = a = 0, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 0,4, \quad x_2 = b = 0,8$$

$$\begin{aligned} \int_0^{0,8} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\ &= \frac{1}{3} [f(0) + 4f(0,4) + f(0,8)] = 1,36746667 \end{aligned}$$

$$|\text{Erro}| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)|$$

$$|\text{Erro}| = \frac{(0,8-0)^5}{180(2)^4} \max_{x \in [0,2]} |f^{(iv)}(x)|$$

$$f^{(iv)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)| = \max_{x \in [0,0,8]} |f^{(iv)}(x)| = 16800$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(0,8)^5}{180(16)} \times 16800 = 1,91146$$

$$\int_0^{0,8} f(x) dx = 1,64053333 \quad (\text{valor exato})$$

$$\int_0^{0,8} f(x) dx \approx 1,36746667 \quad (\text{simpson-2 subintervalos})$$

$$\text{Erro} = 0,27306666 (\text{erro observado})$$

Integração Numérica

Regra de Simpson – Erro – Exemplo 3

- Integre $f(x)$, de $a=0$ até $b=0,8$ pela Regra de Simpson usando 4 subintervalos.

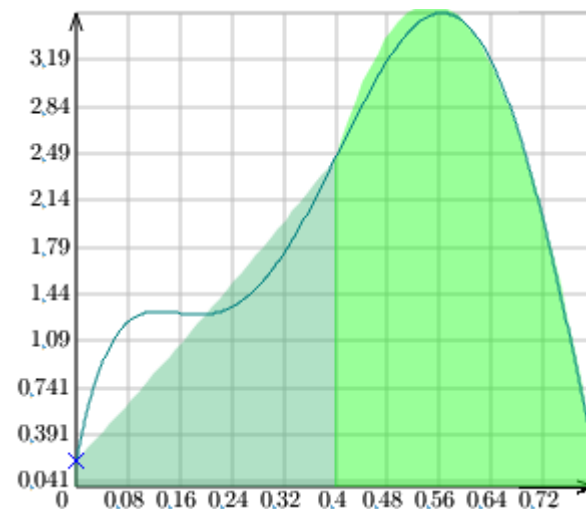
$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$n = 4 \quad h = \frac{b-a}{4} = 0,2$$

$$\{[0, 0,2], [0,2, 0,4], [0,4, 0,6], [0,6, 0,8]\}$$

$$f(x) = 0,2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

$$\int_0^{0,8} f(x) dx \approx 1,62346666$$



$$|\text{Erro}| = \frac{(0,8-0)^5}{180(4)^4} \max_{x \in [0,2]} |f^{(iv)}(x)|$$

$$f^{(iv)}(x) = -21600 + 48000x$$

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(iv)}(x)| = \max_{x \in [0,0,8]} |f^{(iv)}(x)| = 16800$$

$$|\text{Erro}| \leq \frac{(0,8)^5}{180(4)^4} \times 16800 = 0,119466$$

$$\int_0^{0,8} f(x) dx = 1,64053333 \text{ (valor exato)}$$

$$\int_0^{0,8} f(x) dx \approx 1,62346666 \text{ (simpson-4 subintervalos)}$$

$$\text{Erro} = 0,01706667 \text{ (erro observado)}$$