UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Introdução

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Agnelo Denis Vieira

Resolução de Sistemas Lineares

"75% dos problemas científicos envolvem a resolução de um sistema de equações lineares." (Salete Souza de Oliveira Buffoni, UFF)

Resolução de Sistemas Lineares

Introdução

- Um sistema linear é um conjunto de **m** equações lineares envolvendo **n** variáveis (x_i), i = 1,2, ... , n.

- Uma equação linear só apresenta termos proporcionais às variáveis na primeira potência (termos do tipo $a_i x_i$):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

não apresenta função aplicada à variável x_i, tipo

x^n

$\ln(x)$

$\cos(x)$

Resolução de Sistemas Lineares

Forma geral – Definição

Sistema com m equações e n variáveis (incógnitas)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + = b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema linear quadrado – Definição

Em um sistema linear <u>quadrado</u> o número de variáveis é igual ao número de equações (m=n).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo

Suponha que a velocidade de subida de um foguete em 3 momentos diferentes é dada por:

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
5	106,8
8	177,2
12	279,2

Em qualquer instante de tempo, a velocidade é aproximadamente $v(t)=at^2+bt+c$. Determinar os valores de a, b e c.

Pode-se configurar as equações na forma de um sistema de equações lineares para encontrar a, b e c.

$$v(5) = a(5^2) + b(5) + c = 25a + 5b + c = 106{,}8$$
$$v(8) = a(8^2) + b(8) + c = 64a + 8b + c = 177{,}2$$
$$v(12) = a(12^2) + b(12) + c = 144a + 12b + c = 279{,}2$$

continua...

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo

...continuação

$$\begin{cases} 25a+5b+c=106{,}8 \\ 64a+8b+c=177{,}2 \\ 144a+12b+c=279{,}2 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 106{,}8 \\ 177{,}2 \\ 279{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= at^2+bt+c \\ &= 0.290472t^2+19.6905t+1.08571, \qquad 5\le t\le 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(6) &= 0.290472(6)^2+19.6905(6)+1.08571 \\ &= 129.686\ \text{m/s.} \end{aligned}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Resolução

- Resolver um sistema linear significa encontrar os valores numéricos das variáveis x_1, x_2, x_3,..., x_n que satisfazem todas as equações do sistema.

- A solução pode não existir, nem ser única

- Quanto à solução:
  I. Sistema possível (consistente) determinado: uma única solução
  II. Sistema possível (consistente) indeterminado: infinitas soluções
  III. Sistema Impossível (inconsistente) : não possui solução

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 1

Young, T., Mohlenkamp, M.J. Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers

O sistema $Ax = b$ pode possuir

- uma única solução
- nenhuma solução
- infinitas soluções

O que determina a situação acima é a matriz A

Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 2

Young, T., Mohlenkamp, M.J. Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers

Seja o sistema Ax = b, tal que A é uma matriz nxn

As afirmações abaixo são equivalentes (se uma é válida as demais também são válidas)

Sistema possível (consistente) determinado: uma única solução

1) O determinante da matriz A é diferente de zero
2) O sistema possui uma solução que é única para cada b
3) A matriz A possui uma inversa
4) A única solução para Ax = 0 é x = 0
5) As colunas da matriz A são linearmente independentes
6) As linhas da matriz A são linearmente independents

Se a matriz A possui as propriedades anteriores então é não-singular

Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 3

Young, T., Mohlenkamp, M.J. Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers

Seja o sistema Ax = b, tal que A é uma matriz nxn

As afirmações abaixo são equivalentes (se uma é válida as demais também são válidas)

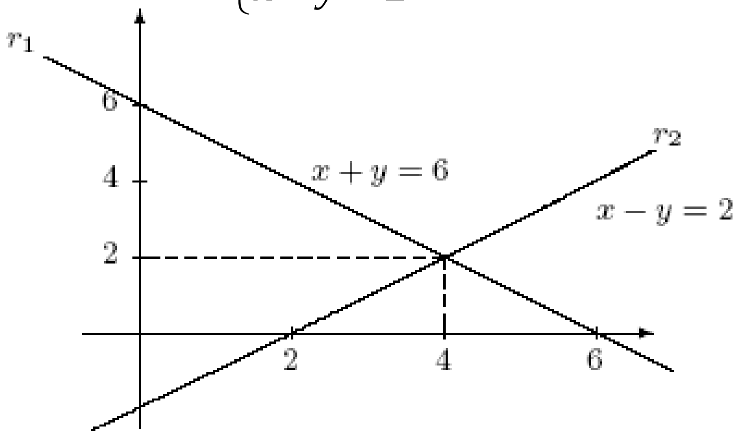
1) O determinante da matriz A é igual a zero
2) O sistema possui zero ou infinitas soluções, e isto depende de b
3) A matriz A não possui uma inversa
4) O sistema Ax = 0 possui outras soluções além da solução x = 0
5) Há colunas na matriz A que são linearmente dependentes
6) Há linhas na matriz A que são linearmente dependents

Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

Exemplo: Sistema possível e determinado: solução única para cada b

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



1) O determinante da matriz A é diferente de zero
   det(A) = -2
2) O sistema possui uma solução que é única para cada b
   para b= $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ x = 4 y = 6 (sol. única)
   para b = $\begin{bmatrix} 15 \\ 37 \end{bmatrix}$ x = 26 y = -11 (sol. única)
3) A matriz A possui uma inversa
   $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $A.\,A^{-1} = A^{-1}.A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4) A única solução para Ax = 0 é x = 0
   para b = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ x = 0 y = 0 (sol.única)
5) As colunas da matriz A são linearmente independentes
6) As linhas da matriz A são linearmente independents

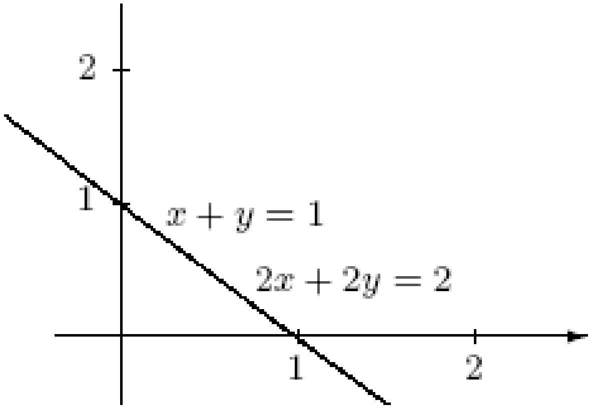
Se a matriz A possui as propriedades anteriores então é não-singular

Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

<u>Exemplo</u>: Sistema possível mas indeterminado: infinitas soluções para cada b

$$(II) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



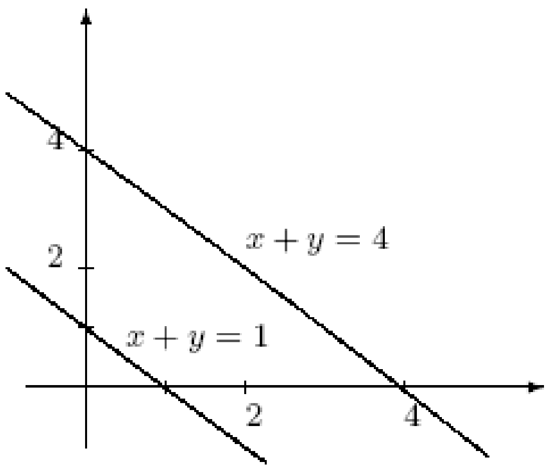
1) O determinante da matriz A é igual a zero
   det(A) = 0
1) O sistema possui zero ou infinitas soluções, e isto depende de b
   para b= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
   sol1) x=0, y = 1 sol2) x=1, y= 0 sol3) x=10, y = -9
3) A matriz A não possui uma inversa
4) O sistema Ax = 0 possui outras soluções além de x = 0
   para b= $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   sol1) x=0, y = 0 sol2) x=1, y= -1 sol3) x=10, y = -10
5) Há colunas na matriz A que são linearmente dependentes
   linha 2 de A = 2*linha 1 de A
6) Há linhas na matriz A que são linearmente dependentes
   coluna 2 de A = 1*linha 1 de A

Resolução de Sistemas Lineares

Quanto a Solução

Exemplo: Sistema impossível: não possui solução

$$(III) \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$$



1) O determinante da matriz A é igual a zero
   det(A) = 0
1) O sistema possui zero ou infinitas soluções, e isto depende de b
   para b= $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$
   não há qualquer solução viável
3) A matriz A não possui uma inversa
4) O sistema Ax = 0 possui outras soluções além de x = 0
   para b= $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
   sol1) x=0, y =-1 sol2) x=2, y= -2 sol3) x=10, y = -10
5) Há colunas na matriz A que são linearmente dependentes
   linha 2 de A = 1*linha 1 de A
6) Há linhas na matriz A que são linearmente dependentes
   coluna 2 de A = 1*linha 1 de A

Resolução de Sistemas Lineares

Métodos de Resolução

Os métodos numéricos para a resolução de um sistema linear podem ser divididos em métodos diretos e métodos iterativos.

<u>Métodos diretos (exatos)</u>: são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações.

- Método de Cramer (este método não faz parte da ementa da disciplina TP062)
- Eliminação de Gauss (ou triangulação)
- Fatoração LU (Decomposição LU)
- Fatoração de Cholesky (Decomposição Cholesky)

<u>Métodos iterativos</u>: são aqueles que permitem obter a solução aproximada de um sistema com uma dada precisão através de um processo iterativo convergente.

- Método Iterativo de Gauss-Jacobi
- Método Iterativo de Gauss-Seidel

Resolução de Sistemas Lineares

Os métodos para a resolução numérica de um sistema linear resultam em erro

Seja o sistema Ax = b

O resíduo associado à uma solução x para o sistema é dado por:

r = Ax - b

tal que, r é um vetor (m x 1)

O comprimento do vetor é denominado "norma do vetor" e pode ser determinado por

$$\|r\| = \sqrt{x1^2 + x2^2 + \cdots + xm^2}$$

Este valor informa o quanto o vetor está distante de ser o vetor nulo

A norma do vetor resíduo quantifica o erro associado à solução x

Para os métodos diretos serve para quantificar os erros resultantes do processamento numérico, e que pode ser reduzido através do pivoteamento do sistema A|b

Para os métodos iterativos pode ser utilizado como um critério de parada