UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Diretos

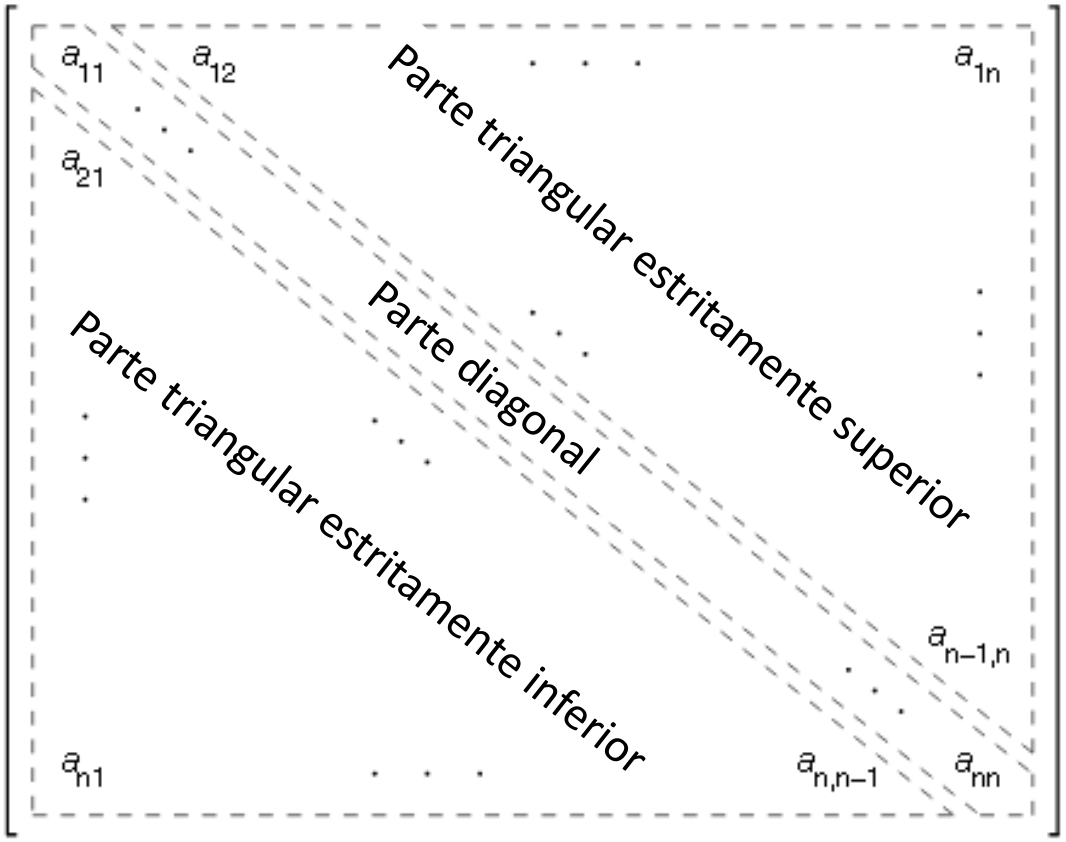
Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina
Agnelo Denis Vieira

Resolução de Sistemas Lineares

- Método de Cramer
- Eliminação de Gauss
- Decomposição LU
- Decomposição Cholesky

Resolução de Sistemas Lineares

Partição da matriz



Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 2.2.3

Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) *Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k, então* $\det(B) = k \det(A)$.

(b) *Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então* $\det(B) = -\det(A)$.

(c) *Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então* $\det(B) = \det(A)$.

Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 2.2.2

Se A é uma matriz triangular (triangular superior, triangular inferior ou diagonal) de tamanho $n \times n$, então $\det(A)$ *é o produto das entradas na diagonal principal da matriz; ou seja,* $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Teorema 2.2.5

Se A é uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

Resolução de Sistemas Lineares

Método de Cramer

Resolução de Sistemas Lineares

Teorema 2.4.3 **Regra de Cramer**

Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que* $\det(A) \neq 0$, *então o sistema tem uma única solução. Esta solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde A_j *é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas da matriz*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Para resolver um sistema de n equações lineares em n incógnitas pela regra de Cramer, é necessário calcular (n+1) determinantes de matrizes de dimensão (n x n).

Para sistemas com mais de três equações, a eliminação gaussiana é muito mais eficiente pois somente requer a redução de uma matriz aumentada (n x (n+1)).

Calcular o determinante de uma matriz (n x n) pela definição envolve a realização de n! operações. Aplicando o método da redução Gaussiana o número de operações é proporcional a n^3.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Motivação

Qual sistema é mais fácil resolver?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots \\ c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Introdução

Consiste em **transformar** o sistema a ser resolvido em um sistema triangular equivalente, por meio de operações elementares. A solução é então obtida, resolvendo-se um sistema triangular - resolução de forma retroativa.

Operações Elementares - Transformação do Sistema Linear:

- Trocar duas equações (linhas);
- Trocar duas variáveis (colunas);
- Multiplicar uma equação (linha) por uma constante não nula;
- Adicionar um múltiplo de uma equação (linha) a uma outra equação (linha).

Operações elementares garantem que o sistema obtido é equivalente ao original.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Construção da matriz aumentada [A b]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{(1)}_{11}x_1 + a^{(1)}_{12}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{1n}x_n = b^{(1)}_1 \\ a^{(1)}_{21}x_1 + a^{(1)}_{22}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2 \\ \ldots \\ a^{(1)}_{n1}x_1 + a^{(1)}_{n2}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{nn}x_n = b^{(1)}_n \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & \ldots & a^{(1)}_{1n} & b^{(1)}_1 \\ a^{(1)}_{21} & a^{(1)}_{22} & \ldots & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{(1)}_{n1} & a^{(1)}_{n2} & \ldots & a^{(1)}_{nn} & b^{(1)}_n \end{array}\right]$$

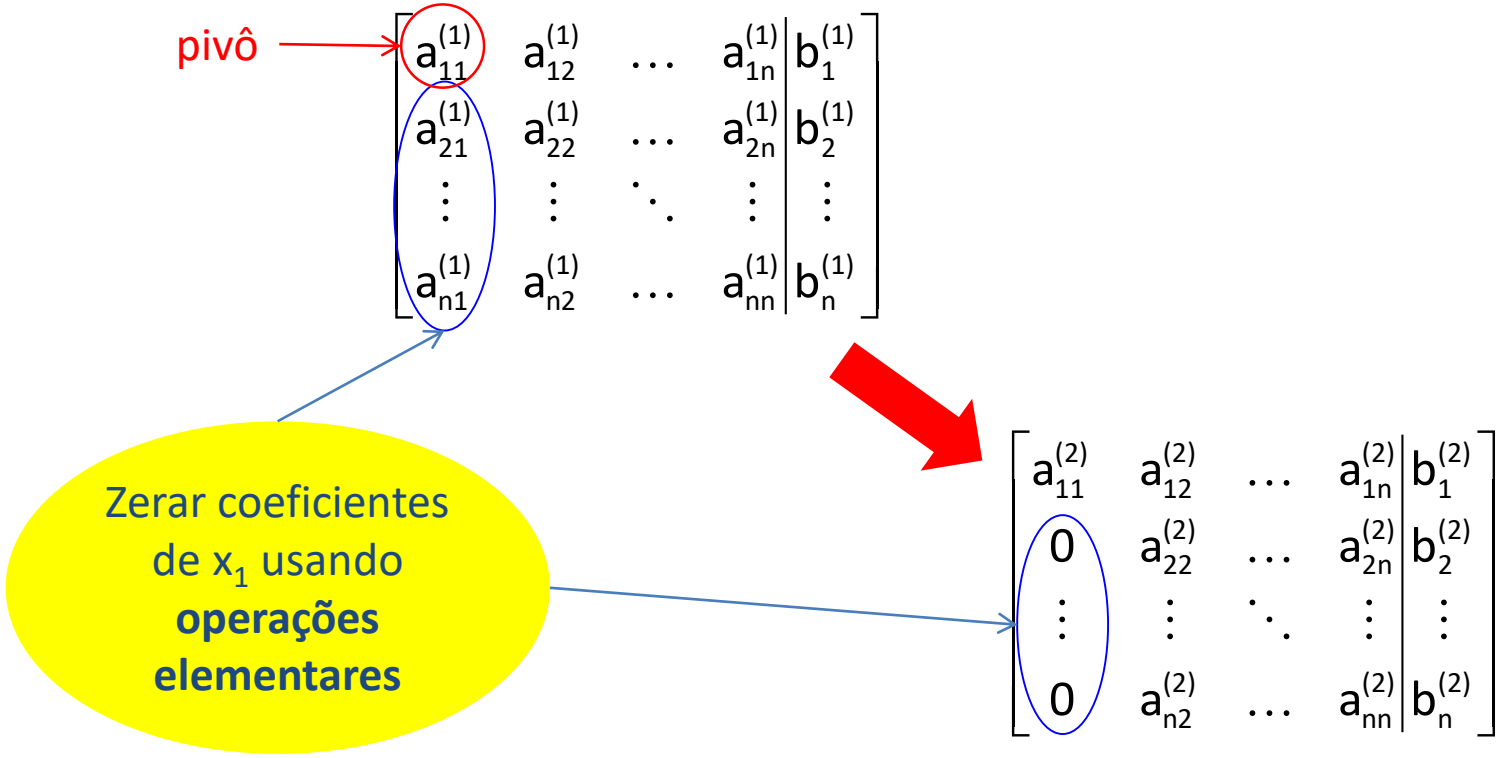
$a^{(k)}_{lin\ col}$ elemento da matriz A na etapa de transformação "k" na linha "lin" e coluna "col"

$b^{(k)}_{lin}$ elemento da matriz b na etapa de transformação "k" na linha "lin"

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

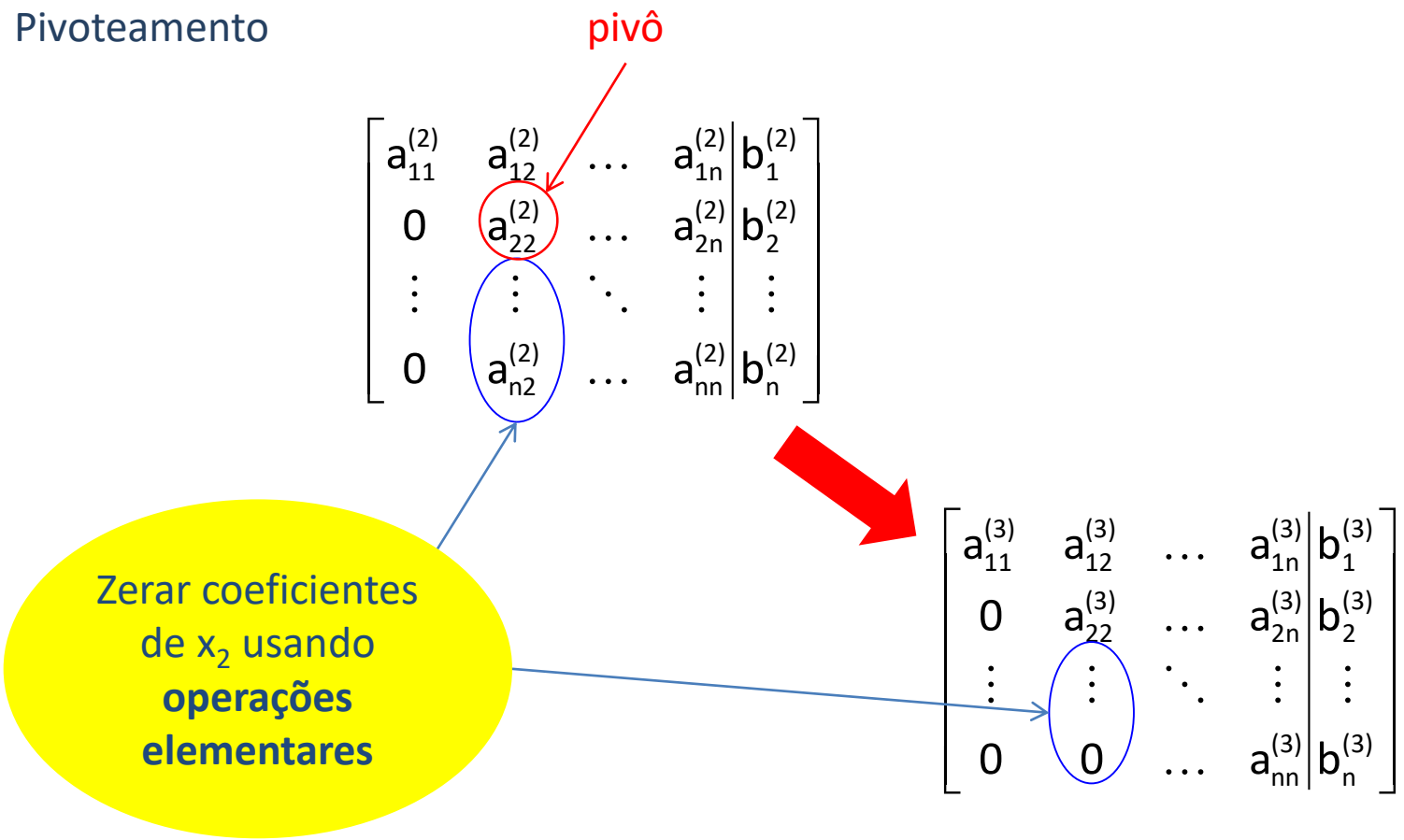
Pivoteamento



Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Pivoteamento



Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Resolução retroativa

Após a transformação do sistema a ser resolvido em um sistema triangular, resolve-se o sistema linear triangular de forma retroativa.

Suponha que após k iterações, alcançou-se a matriz triangular superior. Então a solução de forma retroativa do sistema triangular é dada pela fórmula.

$$x_i = \frac{b_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j}{a_{ii}^{(k)}}, \qquad \forall i = n,\ldots,1$$

Da n-ésima equação calcule o valor de x_n; substitua este valor na equação de ordem (n – 1) e calcule o valor de x_{n-1}; substitua os dois valores na equação de ordem (n – 2) e obtenha o valor de x_{n-2}, ... , até chegar na primeira equação onde substituirá os valores de x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ... , x_4, x_3 e x_2 previamente calculados para obter o valor de x_1.

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Resolução retroativa

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(k)} x_1 = b_1^{(k)} - a_{12}^{(k)} x_3 - \ldots - a_{1(n-1)}^{(k)} x_{(n-1)} - a_{1n}^{(k)} x_n \\
a_{22}^{(k)} x_2 = b_2^{(k)} - a_{23}^{(k)} x_3 - \ldots - a_{2(n-1)}^{(k)} x_{(n-1)} - a_{2n}^{(k)} x_n \\
\ldots \\
a_{(n-1)(n-1)}^{(k)} x_{(n-1)}^{(k)} = b_{(n-1)}^{(k)} - a_{(n-1)n}^{(k)} x_n \\
a_{nn}^{(k)} x_n = b_n^{(k)}
\end{cases}
$$

Retroativa

Último

Penúltimo

...

2º

1º

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}^{(k)}} \left(b_1^{(k)} - a_{12}^{(k)} x_3 - \ldots - a_{1(n-1)}^{(k)} x_{(n-1)} - a_{1n}^{(k)} x_n \right) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}^{(k)}} \left(b_2^{(k)} - a_{23}^{(k)} x_3 - \ldots - a_{2(n-1)}^{(k)} x_{(n-1)} - a_{2n}^{(k)} x_n \right) \\
\ldots \\
x_{(n-1)}^{(k)} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}^{(k)}} \left(b_{(n-1)}^{(k)} - a_{(n-1)n}^{(k)} x_n \right) \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}^{(k)}} \left(b_n^{(k)} \right)
\end{cases}
$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Supor que o elemento que está na posição a_{kk} é diferente de zero no início da etapa k.

Eliminação

```
Para k = 1, ... , n − 1
    Para i = k + 1, ... , n
            m = a_ik / a_kk
            a_ik = 0
            Para j = k + 1, ... n
            a_ij = a_ij − m a_kj
            b_i = b_i − m b_k
```

Resolução do sistema:

```
x_n = b_n / a_nn
Para k = (n − 1), ... 2,1
    s = 0
    Para j = (k + 1), ... , n
    [s = s + a_kj x_j
    x_k = (b_k − s) / a_kk
```

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

```
% implementação essencial do método da Eliminação Gaussiana
% triangularização da matriz A
clear
clc

A = [25, 5, 1; 64, 8, 1; 144,12,1]
b = [106.8; 177.2; 279.2]

[lin,col] = size(A);                        % determina o no. de linhas e colunas da matrlinz A
n = lin;                                    % atribui à variável n o no. de linhas da matriz
for col=1:(n-1)                             % percorre a matriz A da coluna 1 até a coluna (n-1)
    pivo = A(col,col);                      % identifica pivô da coluna
    for lin=(col+1):n                       % percorre as linhas da coluna em análise,
                                            % da linha (col+1) até a linha n
        m(col) = A(lin,col)/A(col,col);     % determina o multiplicador da coluna
        for j=col:n                                 % determina o novo valor de cada elemento
                                                    % na linha em análise na matriz A
            A(lin,j) = A(lin,j)-m(col)*A(col,j)
        end
        b(lin)=b(lin)-m(col)*b(col)                 % determina o novo valor do elemento
                                                    % na linha em análise no vetor b
    end
end
```

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Determinação das incógnitas

```
% determinação das incógnatas pela substituição reversa
x(n,1) = b(n,1)/A(n,n)
for lin=(n-1):-1:1
    soma = 0
    for col = (lin+1):n
        soma = soma + A(lin,col)*x(col,1);
    end
    x(lin,1) = (b(lin,1)-soma)/A(lin,lin)
end

% determinação do resíduo e da norma do resíduo
R = A*x - b
normaR = norm(R)
```

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo - Aplicar manualmente o método da Eliminação de Gauss para resolver o sistema abaixo

Suponha que a velocidade de subida de um foguete em 3 momentos diferentes é dada por:

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
5	106,8
8	177,2
12	279,2

Em qualquer instante de tempo, a velocidade é aproximadamente $v(t)=at^2+bt+c$. Determinar os valores de a, b e c.

Pode-se configurar as equações na forma de um sistema de equações lineares para encontrar a, b e c.

$$v(5) = a(5^2) + b(5) + c = 25a + 5b + c = 106,8$$

$$v(8) = a(8^2) + b(8) + c = 64a + 8b + c = 177,2$$

$$v(12) = a(12^2) + b(12) + c = 144a + 12b + c = 279,2$$

continua...

Resolução de Sistemas Lineares

Sistema Linear – Exemplo

...continuação

$$\begin{cases} 25a+5b+c=106{,}8 \\ 64a+8b+c=177{,}2 \\ 144a+12b+c=279{,}2 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 106{,}8 \\ 177{,}2 \\ 279{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

$$v(t)=at^2+bt+c$$

$$=0.290472t^2+19.6905t+1.08571, \qquad 5\le t\le 12$$

$$v(6)=0.290472(6)^2+19.6905(6)+1.08571$$

$$=129.686\,\text{m/s}.$$

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Transformação em matriz triangular superior

Estratégias práticas de pivoteamento.

O que acontece se o pivô for nulo?

- Pivô próximo de zero pode levar a resultados totalmente imprecisos.
- Para contornar este problema deve-se adotar uma estratégia para a escolha de um “bom” pivô.

Pivoteamento parcial

Escolher para pivô o elemento de maior módulo na coluna, dentre os que ainda irão atuar no processo de eliminação.
Requer alteração de linhas

Pivoteamento completo

Escolher para pivô o elemento de maior módulo (nas linhas e colunas) dentre todos os elementos que ainda irão atuar no processo de eliminação.
Requer alteração de linhas e colunas

Resolução de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss – Número de Operações

Seja um sistema de equações lineares Ax = b, com $A_{n\times n}$.

O número de operações para resolver o sistema via método de eliminação de Gauss é aproximadamente igual a

$$\frac{n^3}{3}$$

Por exemplo, se a matriz A possui dimensões 500×500, o total de operações para resolver o sistema Ax = b é aproximadamente

$$\frac{(500)^3}{3} = 4{,}2\times 10^7 \quad (42\text{milhões})$$