# Métodos Numéricos

## Sistemas Lineares – Métodos Diretos

**Professor Volmir Eugênio Wilhelm**
**Professora Mariana Kleina**

# Resolução de Sistemas Lineares

- Método de Cramer
- Eliminação de Gauss
- Decomposição LU
- Decomposição Cholesky

# Resolução de Sistemas Lineares

## **Decomposição LU**

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Introdução

Em muitas situações, é desejável resolver 2 sistemas lineares mais simples do que o original. Nesses caso, é indicado resolver o sistema linear Ax = b por uma técnica de decomposição da matriz A. Dentre as técnicas de decomposição mais utilizadas destaca-se a **Decomposição LU (L - lower | U - upper)**.

Esta decomposição consiste em obter as matrizes L e U, tal que A = L . U

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Introdução

As matrizes L e U são obtidas empregando o método da eliminação de Gauss.
A matriz L armazena os multiplicadores obtidos nas diversas etapas da eliminação de Gauss.
Ao final da aplicação do método da eliminação de Gauss é necessário atribuir o valor "1" aos elementos na diagonal principal da matriz L.
A matriz U é a própria matriz A depois de sofrer a transformação pelo método da eliminação de Gauss.
Neste processo a matriz b não é submetida às transformações

(linha transformada = linha original - multiplicador * linha pivô)

realizadas na matriz A pelo método da eliminação de Gauss.
Mas, se durante o pivoteamento for realizada a troca de posição de duas linhas é necessário realizar a mesma troca de posição nas linhas do vetor b.

Denomina-se B o vetor b com as trocas de linhas realizadas pelo pivoteamento
Uma forma de garantir a consistência da matriz B é armazenar em um vetor "Linhas" a sequência das linhas da matriz A, e reordenar o vetor b para produzir B em conformidade com o vetor "Linhas"

# Resolução de Sistemas Lineares

**Decomposição LU – Introdução**

Seja o sistema original A x = b

obtendo com o método da eliminação de Gauss as matrizes L e U, com A = (L U)
o sistema original é representado como (L U) x = B
ou de forma equivalente L (U x) = B,

se durante a aplicação do método da eliminação de Gauss for realizada troca de linhas da matriz A a mesma troca precisa ser realizada em b para produzir B

fazendo U x = y, pode-se escrever L y = B

Desta forma o sistema original A x = b
é reescrito na forma de dois novos sistemas: ( L y = B ) e ( U x = y )

Resolve-se primeiro o sistema ( L y = B) determinando o valor das incógnitas no vetor y
Substituindo estes valores em ( U x = y ) determina-se o valor das incógnitas no vetor x do sistema original

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Introdução

No sistema ( L y = b) a matriz L é uma matriz triangular inferior com os elementos da diagonal principal iguais a "1" e os demais elementos iguais aos multiplicadores determinados pelo método da eliminação de Gauss

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{l}_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{l}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{l}_{\mathrm{n}2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \\ y_{n1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \\ B_{n1} \end{bmatrix}$$

As incógnitas no vetor y são determinadas da primeira para a última linha

$y_{11} = B_{11}$

$y_{21} = B_{21} - ( l_{21}\, y_{11} )$

$y_{n1} = B_{n1} - ( l_{n1}\, y_{11} + l_{n2}\, y_{21} + \dots + l_{n-1\, n}\, y_{n-1\, 1} )$

# Resolução de Sistemas Lineares

**Decomposição LU – Introdução**

No sistema ( U x = y) a matriz U é uma matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \\ x_{n1} \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \\ y_{n1} \end{bmatrix}$$

As incógnitas no vetor x são determinadas da última para a primeira linha, da mesma forma que no método de eliminação de Gauss

$x_{n1} = y_{n1} / u_{nn}$

$x_{11} = ( y_{11} - ( u_{12}\, x_{21} + u_{13}\, x_{31} + \ldots + u_{1n}\, x_{n1} ) ) / u_{11}$

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Introdução

Conforme visto, as matrizes L e U são obtidas aplicando o método da eliminação de Gauss na matriz A, e não na matriz aumentada [ A | b ]

A vantagem do método da decomposição LU em relação ao método da eliminação de Gauss é observada quando é necessário resolver diversos sistemas na forma

$$Ax = b1 \qquad Ax = b2 \qquad Ax = b3 \qquad \ldots$$

sendo que a matriz A é a mesma em todos os sistemas e apenas os vetores b1 b2 b3 é que variam de sistema para sistema

Nesta situação o processo de transformação da matriz A (pivoteamento e transformação das linhas) é realizado uma única vez para determinar as matrizes L e U.

Obtidas as matrizes L e U resolve-se cada sistema:

L y1 = B1 e U x1 = y1 L y2 = B2 e U x2 = 2 L y3 = B3 e U x3 = 2

Os vetores B1 B2 B3 tem os mesmos valores numéricos que os vetores b1 b2 b3, respectivamente, mas as trocas de linhas realizadas com o pivoteamento devem ser aplicadas nestes vetores

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Exemplo(Resumo)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} = A^{(1)} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

$m_{21} = 1/3$ e $m_{31} = 4/3$

$m_{32} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = U$$

continua ...

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Exemplo(Resumo)

... continuação

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & =2 \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Resolução de Sistemas Lineares

## Decomposição LU – Exemplo de Resolução de Sistema Linear

i. Obter a fatoração LU da matriz A

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & =2 \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =4 \end{cases} \Rightarrow \quad U=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii. Resolver o sistema triangular inferior Ly = b

$$\begin{cases} 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & =1 \\ \frac{1}{3}y_1 & +1y_2 & +0y_3 & =2 \\ \frac{4}{3}y_1 & +1y_2 & +1y_3 & =4 \end{cases} \Rightarrow \quad y^*=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

iii. Resolver o sistema triangular superior Ux = y*

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & =1 \\ 0x_1 & +\frac{1}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & =\frac{5}{3} \\ 0x_1 & +0x_2 & -8x_3 & =1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$