



Métodos Numéricos

Sistemas Lineares – Métodos Diretos

Professor Volmir Eugênio Wilhelm
Professora Mariana Kleina

Resolução de Sistemas Lineares

- Método de Cramer
- Eliminação de Gauss
- Decomposição LU
- Decomposição Cholesky

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

Em muitas situações, é desejável resolver 2 sistemas lineares mais simples do que o original. Nesse caso, é indicado resolver o sistema linear $Ax = b$ por uma técnica de decomposição da matriz A . Dentre as técnicas de decomposição mais utilizadas destaca-se a **Decomposição LU (L - lower | U - upper)**.

Esta decomposição consiste em obter as matrizes L e U , tal que $A = L \cdot U$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

As matrizes L e U são obtidas empregando o método da eliminação de Gauss.

A matriz L armazena os multiplicadores obtidos nas diversas etapas da eliminação de Gauss.

Ao final da aplicação do método da eliminação de Gauss é necessário atribuir o valor "1" aos elementos na diagonal principal da matriz L.

A matriz U é a própria matriz A depois de sofrer a transformação pelo método da eliminação de Gauss.

Neste processo a matriz b não é submetida às transformações

(linha transformada = linha original - multiplicador * linha pivô)

realizadas na matriz A pelo método da eliminação de Gauss.

Mas, se durante o pivoteamento for realizada a troca de posição de duas linhas é necessário realizar a mesma troca de posição nas linhas do vetor b.

Denomina-se B o vetor b com as trocas de linhas realizadas pelo pivoteamento

Uma forma de garantir a consistência da matriz B é armazenar em um vetor "Linhas" a sequência das linhas da matriz A, e reordenar o vetor b para produzir B em conformidade com o vetor "Linhas"

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

Seja o sistema original $A x = b$

obtendo com o método da eliminação de Gauss as matrizes L e U , com $A = (L U)$

o sistema original é representado como $(L U) x = B$

ou de forma equivalente $L (U x) = B$,

se durante a aplicação do método da eliminação de Gauss for realizada troca de linhas da matriz A a mesma troca precisa ser realizada em b para produzir B

fazendo $U x = y$, pode-se escrever $L y = B$

Desta forma o sistema original $A x = b$

é reescrito na forma de dois novos sistemas: $(L y = B)$ e $(U x = y)$

Resolve-se primeiro o sistema $(L y = B)$ determinando o valor das incógnitas no vetor y

Substituindo estes valores em $(U x = y)$ determina-se o valor das incógnitas no vetor x do sistema original

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

No sistema ($L y = b$) a matriz L é uma matriz triangular inferior com os elementos da diagonal principal iguais a "1" e os demais elementos iguais aos multiplicadores determinados pelo método da eliminação de Gauss

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{n1} \end{bmatrix}$$

As incógnitas no vetor y são determinadas da primeira para a última linha

$$y_{11} = B_{11}$$

$$y_{21} = B_{21} - (l_{21} y_{11})$$

$$y_{n1} = B_{n1} - (l_{n1} y_{11} + l_{n2} y_{21} + \dots + l_{n-1,n} y_{n-1,1})$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

No sistema ($U x = y$) a matriz U é uma matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}$$

As incógnitas no vetor x são determinadas da última para a primeira linha, da mesma forma que no método de eliminação de Gauss

$$x_{n1} = y_{n1} / u_{nn}$$

$$x_{11} = (y_{11} - (u_{12} x_{21} + u_{13} x_{31} + \dots + u_{1n} x_{n1})) / u_{11}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Introdução

Conforme visto, as matrizes L e U são obtidas aplicando o método da eliminação de Gauss na matriz A, e não na matriz aumentada $[A \mid b]$

A vantagem do método da decomposição LU em relação ao método da eliminação de Gauss é observada quando é necessário resolver diversos sistemas na forma

$$Ax = b_1 \quad Ax = b_2 \quad Ax = b_3 \quad \dots$$

sendo que a matriz A é a mesma em todos os sistemas e apenas os vetores $b_1 \ b_2 \ b_3$ é que variam de sistema para sistema

Nesta situação o processo de transformação da matriz A (pivoteamento e transformação das linhas) é realizado uma única vez para determinar as matrizes L e U.

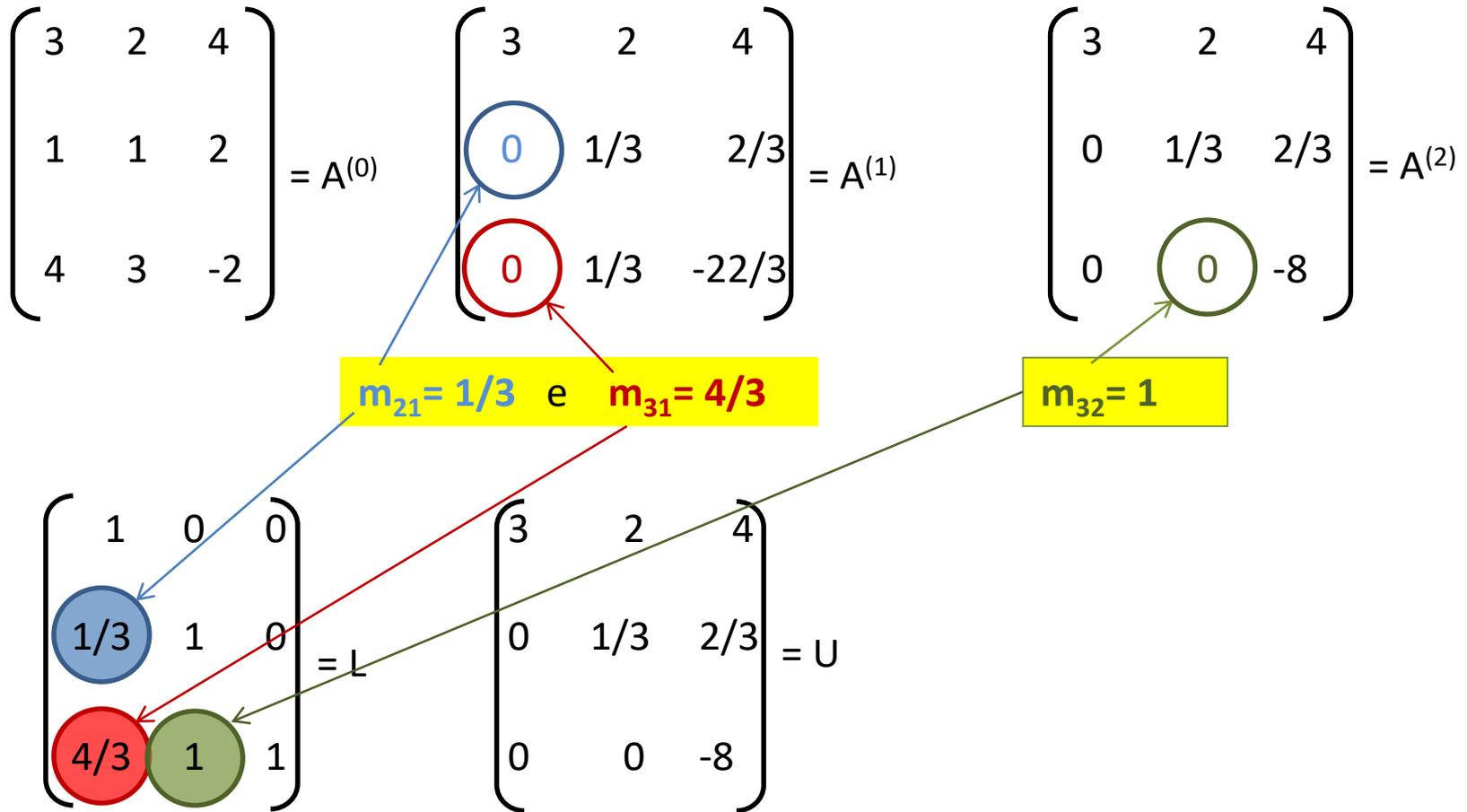
Obtidas as matrizes L e U resolve-se cada sistema:

$$L y_1 = B_1 \text{ e } U x_1 = y_1 \qquad L y_2 = B_2 \text{ e } U x_2 = 2 \qquad L y_3 = B_3 \text{ e } U x_3 = 2$$

Os vetores $B_1 \ B_2 \ B_3$ tem os mesmos valores numéricos que os vetores $b_1 \ b_2 \ b_3$, respectivamente, mas as trocas de linhas realizadas com o pivoteamento devem ser aplicadas nestes vetores

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo(Resumo)



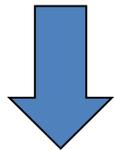
continua ...

Resolução de Sistemas Lineares

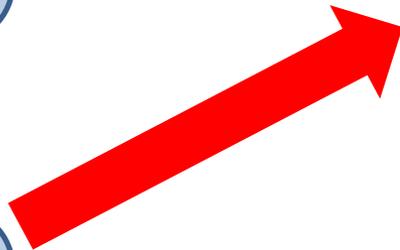
Decomposição LU – Exemplo(Resumo)

... continuação

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$



$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -\frac{4}{3} \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução de Sistemas Lineares

Decomposição LU – Exemplo de Resolução de Sistema Linear

i. Obter a fatoração LU da matriz A

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ii. Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$

$$\begin{cases} 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 1 \\ \frac{1}{3}y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 2 \\ \frac{4}{3}y_1 + 1y_2 + 1y_3 = 4 \end{cases} \rightarrow y^* = (y_1 \ y_2 \ y_3) = \left(1 \quad \frac{5}{3} \quad 1 \right)$$

iii. Resolver o sistema triangular superior $Ux = y^*$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{5}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow (x_1 \ x_2 \ x_3) = \left(-3 \quad \frac{21}{4} \quad -\frac{1}{8} \right)$$